

準多面体について

準多面体とはサッカーボールのように、2種類の合同な正多角形から成り、どの頂点にも面が同じ数だけ集まっているへこみのない多面体のことである。

サッカーボールの模様には正五角形が12個ある。このように1つの頂点に3個の面が集まり、正五角形と正六角形からなる準多面体では正六角形は何個でもよいが、正五角形の数はいずれも12個である。

このことを証明してみよう。

(証明) 正六角形の数をも x 、正五角形の数をも y とする。

このことから正六角形の面の数は x 、正五角形の面の数は y となる。

頂点の数を a 、辺の数を b とすると、オイラーの多面体定理 $V - E + F = 2$ により

$$(x + y) + a - b = 2$$

ところで $a = \frac{5x + 6y}{3}$ 、 $b = \frac{5x + 6y}{2}$ であるので、代入して

$$(x + y) + \frac{5x + 6y}{3} - \frac{5x + 6y}{2} = 2$$

これを解くと

$$6(x + y) + 2(5x + 6y) - 3(5x + 6y) = 12$$

$$6x + 6y + 10x + 12y - 15x - 18y = 12$$

$x = 12$ となる。

したがって、正五角形の数はいずれも12個である。(終)