重心座標について

重心座標とは、平面上の 3 点 A,B,C の位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ とするとき、この平面上の点 P の位置ベクトルを

$$\vec{p} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}, \quad u+v+w=1$$

と表したときの係数 (u, v, w)のことである。この表示は一意的である。ただし u+v+w=1 という制限をつけることにはあまり意味がない。なぜなら u：v：w がわかればそれを標準化して u+v+w=1 にすることができるからである。したがって以下では u：v：w を考えることとする。
重心座標の幾何学的意味は u：v：w=△PBC：△PCA：△PAB である。

主な重心座標について書くと次のようになる。

外心　sin2A：sin2B：sin2C

垂心　tanA：tanB：tanC

内心　a：b：c

傍心　－a：b：c,　a：－b：c,　a：b：－c

重心座標が有効な例

△ABC に関する点 P, Q, R の重心座標がそれぞれ $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$，$(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$，$(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$ のとき

$$\triangle PQR = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & r_3 \end{vmatrix}}{(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3)} \times \triangle ABC \qquad \cdots ①$$

という関係がある。
したがって、このことから特に P, Q, R が同一直線上にあることを示すに

は、（△PQR=0 とすればよいので）$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0$ を示せばよいことになる。　　　・・・②

②を次のように直接示すこともできる。
（証明）
$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$　　(i=1, 2, 3) とする。
P, Q, R が同一直線上にある。

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = k(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP})$　　・・・①

また $\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c}$ であるが、これに $\vec{c} = \vec{a} + \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \vec{a} + \overrightarrow{AB}$ を代入すると、

$\overrightarrow{OP} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c} = \vec{a} + \beta_1 \overrightarrow{AB} + \gamma_1 \overrightarrow{AC}$　となる。

同様にして $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \beta_2 \overrightarrow{AB} + \gamma_2 \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OR} = \vec{a} + \beta_3 \overrightarrow{AB} + \gamma_3 \overrightarrow{AC}$　を得る。

これらを①に代入すると

$\Leftrightarrow (\beta_3 - \beta_1)\overrightarrow{AB} + (\gamma_3 - \gamma_1)\overrightarrow{AC} = k(\beta_2 - \beta_1)\overrightarrow{AB} + k(\gamma_2 - \gamma_1)\overrightarrow{AC}$

となるから、係数比較により

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_3 - \beta_1 = k(\beta_2 - \beta_1) \\ \gamma_3 - \gamma_1 = k(\gamma_2 - \gamma_1) \end{cases}$　これと $1 - 1 = k(1 - 1)$　とから

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = k\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \right\}$$ が成り立つ。これを変形すると

$$\Leftrightarrow (k-1)\begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = 0$$ となる。これは $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$ が

一次従属であることを示している。したがって

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 1 & \beta_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0$$ である。　　　　（終）