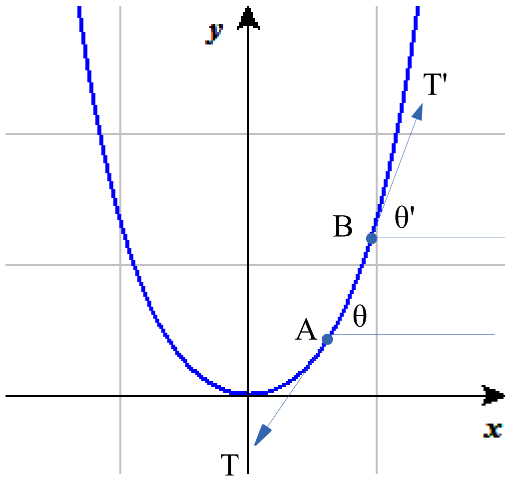
懸垂線について



懸垂線の方程式を微分方程式の応用として導く。

座標軸を定める。
ロープの一番下の点を原点とする。
ロープの上に任意の 2 点 A, B をとる。
ロープの微小区間 AB について考える。

A,B における接線と x 軸とのなす角を
θ, θ'とする。 $(-90°\leq\theta,\theta'\leq 90°)$

また O から A,B までの鎖の長さを
それぞれ s, s'とする。

また、A (x,y) , B $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ とする。

A,B の点でロープを引っ張る力を T, T'とする。(ベクトル量)

(水平方向の力)
B における張力は $T'\cos\theta'$ 、A における張力は $T\cos\theta$ であるが、ロープ AB は動かないから、
つり合いの式から $T'\cos\theta'=T\cos\theta$ 。
つまり $T\cos\theta$ はどの点でも一定であるので、 $T\cos\theta=C$ (定数)とおける。
これを変形して、 $T=\dfrac{C}{\cos\theta}$ ・・・①となる。

(垂直方向の力)
$T'-T=\Delta T$, $\theta'-\theta=\Delta\theta$, $s'-s=\Delta s$ とおき、ロープの単位長さの質量を m とする。
単位長さのロープに下向きにかかる重力は mg である。ここで $mg=k$ とおく。
このとき運動方程式は $T'\sin\theta'=T\sin\theta+k\,\Delta s$ となる。
よって、 $(T+\Delta T)\sin(\theta+\Delta\theta)-T\sin\theta=k\,\Delta s$
両辺を Δs で割って、 $\dfrac{(T+\Delta T)\sin(\theta+\Delta\theta)-T\sin\theta}{\Delta s}=k$

$\Delta s\to 0$ として、 $\dfrac{d}{ds}(T\sin\theta)=k$ となる。

左辺の T に①を代入して、 $\dfrac{d}{ds}(C\tan\theta)=k$ すなわち $\dfrac{d}{ds}(\tan\theta)=\dfrac{k}{C}$ となる。
左辺は x の関数と考えて、合成関数の微分法を適用すると

左辺= $\dfrac{d}{ds}(\tan\theta)=\dfrac{d}{d\theta}(\tan\theta)\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d\theta}{dx}$

ここで s は原点から A までの弧長なので、 $s=\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+\{f'(t)\}^2}\,dt$ であるから $\dfrac{ds}{dx}$ は計算できて

$\dfrac{ds}{dx}=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}$ となる。

代入して

左辺= $\dfrac{d}{ds}(\tan\theta)=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\cos\theta\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{d\theta}{dx}$

ゆえに、微分方程式は $\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{k}{C}$ となる。

ここで改めて $\dfrac{k}{C}=a$ とおくと、 $\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{d\theta}{dx}=a$ となる。

これを解くと、 $\displaystyle\int\frac{d\theta}{\cos\theta}=a\int dx$

左辺は

$$\int\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|=\log\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\log\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)$$

したがって、 $\log\left(\dfrac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)=ax+D_1$ （ D_1 ：積分定数）

$x=0$ のとき $\theta=0$ であるから、 $D_1=0$

よって、 $\log\left(\dfrac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)=ax$ となる。

したがって、 $\dfrac{1}{\cos\theta}+\tan\theta=e^{ax}$ ･･･②となる。

ここで x を $-x$ とすると θ は $-\theta$ に変わるので、 $\dfrac{1}{\cos(-\theta)}+\tan(-\theta)=e^{-ax}$

が成り立っている。

この式より、 $\dfrac{1}{\cos(-\theta)}+\tan(-\theta)=e^{-ax}$ ･･･③

②－③から $2\tan\theta=e^{ax}-e^{-ax}$

ここで $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\tan\theta$ であったので代入して $2\dfrac{dy}{dx}=e^{ax}-e^{-ax}$

すなわち $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$

これを解いて、 $y=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int(e^{ax}-e^{-ax})dx=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})+D_2$ （ D_2 ：積分定数）

$x=0$ のとき $y=0$ であるから $D_2=-\dfrac{1}{a}$

これより $y=\dfrac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})-\dfrac{1}{a}$

a を戻して $y=\dfrac{C}{2k}(e^{\frac{k}{C}x}+e^{-\frac{k}{C}x})-\dfrac{C}{k}$ これが懸垂線の方程式である。

これを $x=0$ の周りでテイラー展開すると

$$y=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})-\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}\left\{\left(1+\frac{ax}{1!}+\frac{(ax)^2}{2!}+\frac{(ax)^3}{3!}+\cdots\right)+\left(1-\frac{ax}{1!}+\frac{(ax)^2}{2!}-\frac{(ax)^3}{3!}+\cdots\right)\right\}-\frac{1}{a}$$

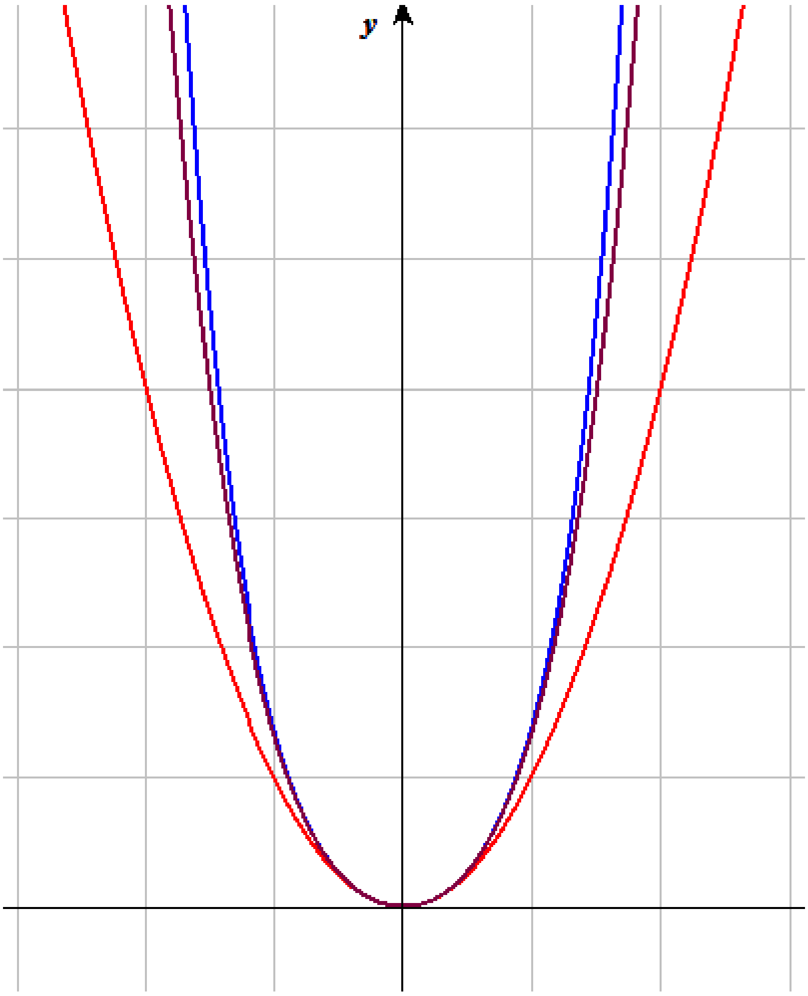
$$=\frac{1}{a}\left(\frac{a^2x^2}{2!}+\frac{a^4x^4}{4!}+\frac{a^6x^6}{6!}+\cdots\right)=\frac{ax^2}{2!}+\frac{a^3x^4}{4!}+\frac{a^5x^6}{6!}+\cdots$$

$$=\frac{k}{2c}x^2+\frac{k^3}{24c^3}x^4+\frac{k^5}{720c^5}x^6+\cdots$$

となるから４次以上の項を無視すれば放物線になる。

ガリレオは放物線を簡単に描くためには懸垂線の形を利用すればよいと言ったと伝えられているが、ガリレオは微分方程式を知らなかったので、放物線と懸垂線の違いがわからなかった。しかしこの展開式より、放物線の形であるという答えは当たらずとも遠からずと言える。

下は $y=\dfrac{C}{2k}(e^{\frac{k}{C}x}+e^{-\frac{k}{C}x})-\dfrac{C}{k}$ ， $y=\dfrac{k}{2c}x^2$ ， $y=\dfrac{k}{2c}x^2+\dfrac{k^3}{24c^3}x^4$ のグラフである。



（参考文献） 数学入門　 遠山 啓