# ケプラーの法則と惑星の軌道が2次曲線であること

ケプラーは、惑星の軌道が太陽を焦点とする楕円となることを、ティコ・ブラーエとの長期間にわたる実測と綿密な計算によって発見した。
ニュートンは、このことを運動方程式および万有引力の法則によって説明した。
ここでは、(1)惑星のエネルギーが保存されること(2)面積速度一定の法則(角運動量保存の法則)
(3)楕円の極方程式が運動方程式および万有引力の法則から導かれる微分方程式の解であること　を示す。

【設定】

$xy$ 平面の原点に太陽があり、太陽の質量は M であるとする。また $\vec{r}=\left(x(t),\,y(t)\right)$ を時刻 t における質量 m の惑星(彗星)の位置とする。

万有引力の法則から

$$\vec{F}=-G\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=-GmM\,\frac{(x\,,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(G は万有引力定数で、 $6.67\times10^{-11}\ m^3/kg\cdot s^2$ )・・・①

一方、ニュートンの運動方程式より、 $\vec{F}=m\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ ・・・②

①②を連立して

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)=-GmM\,\frac{(x\,,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

m で割って、

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)=-GM\,\frac{(x\,,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

成分ごと比較して、

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=-GM\,\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\\[2ex]\dfrac{d^2y}{dt^2}=-GM\,\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\end{cases}\quad\cdots③$$

となる。

【(1)惑星のエネルギーが保存されることの証明】

惑星のエネルギー E とすると、

$E$ =(運動エネルギー)+(位置エネルギー)

$$=\ \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2-\frac{GmM}{r}=\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}-\frac{GmM}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

である。よって、 $\dfrac{dE}{dt}=0$ を示せばよい。

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}\right]-\frac{d}{dt}\frac{GmM}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\ \frac{1}{2}m\left(2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)-GmM\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\ m\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)+GmM\,\frac{x\dfrac{dx}{dt}+y\dfrac{dy}{dt}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\ m\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}+GM\,\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)+m\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+GM\,\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

この式に③を代入すると、この値は 0 であることがわかる。よって、示された。(終)

【(2)面積速度一定の法則(角運動量保存の法則)の証明】
面積速度をΩとすると、

$$\Omega=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$$ であるが、これは

$$\Omega=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|=\frac{1}{2}\left|(x(t),y(t))\times\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x(t) & y(t)\\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt}\end{vmatrix}$$ となるから、

$$\Omega=\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$ である。

よって、 $$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+x\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\left(\frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt}+y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{1}{2}\left(-GM\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+GM\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)=0$$ よって示された。(終)

(付け加え)面積速度一定の法則は、角運動量保存の法則の帰結である。実は、中心力のみによって運動している質点の角運動量は保存される。

角運動量= $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$ なので、角運動量保存の法則は $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{0}$ と表せる。

惑星が同一平面内を運動すると暗黙のうちに仮定されているとしてよいので 、

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}$$ が定ベクトル $\Leftrightarrow$ $\Omega=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$ が一定の値 と考えられるわけである。

【(3)楕円の極方程式が運動方程式および万有引力の法則から導かれる微分方程式の解であることの証明】
原点を極とする極座標を用いる。このとき、 $x=r\cos\theta,\ y=\sin\theta$ ・・・①となる。
エネルギーEおよび面積速度Ωを極座標で表す。
①を微分して、

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\\ \frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\end{cases}$$ となる。これをE, Ωに代入すると

$$E=\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}-\frac{GmM}{r}$$

$$=\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\cos^2\theta-2r\cos\theta\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\sin^2\theta-2r\cos\theta\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r^2\cos^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}-\frac{GmM}{r}$$

よって、

$$E=\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}-\frac{GmM}{r}$$ すなわち、 $$\frac{E}{m}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}-\frac{GM}{r}$$ ・・・⑥

$$\Omega=\frac{1}{2}\left\{r\cos\theta\left(\frac{dr}{dt}\sin\theta+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right)-r\sin\theta\left(\frac{dr}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right)\right\}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

すなわち、 $\Omega=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$ ・・・⑦となる。これより、 $\frac{d\theta}{dt}=\frac{2\Omega}{r^2}$ ・・・⑧

⑧と合成関数の微分より、 $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{dr}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{2\Omega}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta}$ ・・・⑨

⑧⑨を⑥に代入して、

$$\frac{E}{m}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2\Omega}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\left(\frac{2\Omega}{r^2}\right)^2\right\}-\frac{GM}{r}$$

これを整理すると

$$\frac{E}{m}+\frac{GM}{r}=\frac{1}{2}\left\{\frac{4\Omega^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{4\Omega^2}{r^2}\right\}$$

両辺÷ $2\Omega^2$ として、さらに左辺と右辺を入れ換えて

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}=\frac{E}{2\Omega^2 m}+\frac{GM}{2\Omega^2}\cdot\frac{1}{r} \quad \cdots ⑩$$

ゆえに、惑星（彗星）の軌道の極方程式は⑩の微分方程式の解として得られる。
すなわち、 $r$ をθの関数として求めればよい。

この微分方程式を解くのはやや難しい（後で示す）ので、2次曲線 $r=\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}$ が、Ω, E から定まる $e, a$ に対して、⑩の解となることを代入して示すことにする。（ $e, a$ は以下で定めていく。）

$r=\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}$ をθで微分して、 $\dfrac{dr}{d\theta}=ea\cdot\dfrac{-(-e\sin\theta)}{(1+e\cos\theta)^2}=\dfrac{e^2a\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$ であるから、

⑩の左辺＝ $\dfrac{1}{r^4}\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}$

$$=\frac{(1+e\cos\theta)^4}{e^4a^4}\cdot\frac{e^4a^2\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^4}+\frac{(1+e\cos\theta)^2}{e^2a^2}$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{(1+e\cos\theta)^2}{e^2a^2}$$

$$=\frac{e^2-1}{e^2a^2}+\frac{2}{ea}\cdot\frac{1+e\cos\theta}{ea}=\frac{e^2-1}{e^2a^2}+\frac{2}{ea}\cdot\frac{1}{\dfrac{ea}{1+e\cos\theta}}$$

ゆえに、 $e, a$ を $\dfrac{e^2-1}{e^2a^2}=\dfrac{E}{2\Omega^2 m}$ ， $\dfrac{2}{ea}=\dfrac{GM}{2\Omega^2}$ となるように定めれば、解の一意性から、惑星（彗星）の軌道は2次曲線であることがわかる。（終）

【別法】直接、微分方程式を解くと、次のようになる。

$$\frac{E}{m}+\frac{GM}{r}=\frac{1}{2}\left\{\frac{4\Omega^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{4\Omega^2}{r^2}\right\}=\frac{2\Omega^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{2\Omega^2}{r^2}$$

両辺÷ $2\Omega^2$ で

$$\frac{1}{2\Omega^2}\left(\frac{E}{m}+\frac{GM}{r}\right)=\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=r^4\left\{\frac{1}{2\Omega^2}\left(\frac{E}{m}+\frac{GM}{r}\right)-\frac{1}{r^2}\right\}=\frac{r^4}{2\Omega^2}\left(\frac{E}{m}+\frac{GM}{r}\right)-r^2=\frac{r^4}{2\Omega^2}\left(\frac{E}{m}+\frac{GM}{r}-\frac{2\Omega^2}{r^2}\right)$$

平方根をとれば

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{r^2}{\sqrt{2}\,\Omega}\sqrt{\frac{E}{m}+\frac{GM}{r}-\frac{2\Omega^2}{r^2}}=r^2\sqrt{\frac{E}{2m\Omega^2}+\frac{GM}{2r\Omega^2}-\frac{1}{r^2}}$$

逆数をとれば

$$\frac{d\theta}{dr}=\frac{1}{r^2\sqrt{\dfrac{E}{2m\Omega^2}+\dfrac{GM}{2r\Omega^2}-\dfrac{1}{r^2}}}$$

積分して

$$\theta = \int \frac{1}{r^2\sqrt{\frac{E}{2m\Omega^2}+\frac{GM}{2r\Omega^2}-\frac{1}{r^2}}}dr$$

ここで　$u=\frac{1}{r}$　とおくと、　$du=-\frac{1}{r^2}dr$　であるから

$$\theta = \int \frac{-du}{\sqrt{\frac{E}{2m\Omega^2}+\frac{GM}{2\Omega^2}u-u^2}}$$

分母のルートの中を平方完成すれば

$$\theta = \int \frac{-du}{\frac{G^2M^2}{16\Omega^2}+\frac{E}{2m\Omega^2}-\left(u-\frac{GM}{4\Omega^2}\right)^2}$$

ここで公式

$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　すなわち　$-\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+(x-a)^2}}=\arccos\frac{x-a}{b}$　を用いると

$$\theta = \int \frac{-du}{\frac{G^2M^2}{16\Omega^2}+\frac{E}{2m\Omega^2}-\left(u-\frac{GM}{4\Omega^2}\right)^2}=\arccos\left(\frac{u-\frac{GM}{4\Omega^2}}{\sqrt{\frac{G^2M^2}{16\Omega^2}+\frac{E}{2m\Omega^2}}}\right)$$

よって、　$\cos\theta = \frac{u-\frac{GM}{4\Omega^2}}{\sqrt{\frac{G^2M^2}{16\Omega^2}+\frac{E}{2m\Omega^2}}}$

変形して、　$u=\frac{GM}{4\Omega^2}+\sqrt{\frac{G^2M^2}{16\Omega^2}+\frac{E}{2m\Omega^2}}\cos\theta$　　この左辺は　$\frac{1}{r}$　に等しい。

ゆえに、　$r=\frac{1}{\frac{GM}{4\Omega^2}+\sqrt{\frac{G^2M^2}{16\Omega^2}+\frac{E}{2m\Omega^2}}\cos\theta}=\frac{\frac{4\Omega^2}{GM}}{1+\sqrt{1+\frac{8E\Omega^2}{mG^2M^2}}\cos\theta}$　となる。

ここで、　$ea=\frac{4\Omega^2}{GM}$　，　$e=\sqrt{1+\frac{8E\Omega^2}{mG^2M^2}}$　とおけば

$r=\frac{ea}{1+e\cos\theta}$　となる。よって2次曲線である。

実際、このように置くことは、　$\frac{e^2-1}{e^2a^2}=\frac{E}{2\Omega^2m}$　，　$\frac{2}{ea}=\frac{GM}{2\Omega^2}$　と置くことと同値であることが、単純な計算で確かめられる。（終）

ちなみに、地球の場合は、　$e\approx\frac{1}{60}$　であり、ほぼ円軌道を描く。


（参考文献）　応用積分学　　　高橋　進一
　　　　　　　力学　　　　　　為近和彦