ケプラーの法則から万有引力の法則を導く

ここではケプラーの 2 つの法則と運動方程式　$F=ma$　から万有引力の法則を導くことを考える。

ケプラーの法則は次である。
(1)　すべての惑星は太陽を1つの焦点とするある楕円に沿って動く。
これを惑星の軌道を焦点を中心とする極座標　(r,θ)　で表せば　$r=\dfrac{a}{1+e\cos\theta}$　となる。
ただし、e は離心率を表す。
(2)　一定時間に太陽と惑星を結ぶ直線のなぞる面積は一定である。（面積速度一定の法則）
これを式で表せば　$A=\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}$　（一定の値）となる。
この 2 つの式と運動方程式　$F=ma$　から、以下のようにして万有引力の法則を導くことができる。

（証明）　$x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$　とおく。複素数を用いて表せば、　$x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$　となる
ここで　x,y,r,θ　は時間 t の関数である。

t で 1 回微分すると　$\dfrac{dx}{dt}+i\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{d}{dt}re^{i\theta}=\dfrac{dr}{dt}e^{i\theta}+\dfrac{r}{dt}e^{i\theta}=\dfrac{dr}{dt}e^{i\theta}+ir\dfrac{d\theta}{dt}e^{i\theta}$
もう 1 回微分すると

$$\frac{d^2x}{dt^2}+i\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}e^{i\theta}+ir\frac{d\theta}{dt}e^{i\theta}\right)$$
$$=\ \frac{d^2r}{dt^2}e^{i\theta}+\frac{dr}{dt}e^{i\theta}i\frac{d\theta}{dt}+i\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}e^{i\theta}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}e^{i\theta}+r\frac{d\theta}{dt}e^{i\theta}i\frac{d\theta}{dt}\right)$$
$$=\ \left\{\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+i\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\right\}e^{i\theta}$$

ここで　$e^{i\theta}$　は大きさが 1 の複素数で θ 回転を表すだけであることに注意すれば
焦点方向の加速度は　$\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$　であり、
それに垂直な方向への加速度は　$2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}+r\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$　であることがわかる。

垂直方向への加速度　$2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}+r\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$　は次のように変形すれば 0 となることがわかる。

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{1}{r}\left(2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=\frac{2}{r}\frac{dA}{dt}\quad\cdots①$$

ここで面積速度一定の法則から、　$\dfrac{dA}{dt}=0$　であるから、①は 0 となる。
すなわち焦点方向に垂直方向の加速度は 0 であることがわかった。

次に焦点方向の加速度を計算する。まず準備として　$\dfrac{dr}{dt}$　を計算すると

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{a}{1+e\cos\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}=\frac{ae\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\frac{d\theta}{dt}=\frac{ae\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\frac{2\mathrm{A}}{dt}$$

ここで　$r^2=\dfrac{a^2}{(1+e\cos\theta)^2}$　であるから　$\dfrac{1}{(1+e\cos\theta)^2}=\dfrac{r^2}{a^2}$　であるので、これを上の式に代入すると

$\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{2Ae\sin\theta}{a}$ となる。

これをもう 1 回微分して、 $\dfrac{d^2r}{dt^2}$ を計算すると

$\dfrac{d^2r}{dt^2}=\dfrac{2Ae}{a}\dfrac{d}{dt}\sin\theta=\dfrac{2Ae}{a}\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{2Ae}{a}\cos\theta\dfrac{2A}{r^2}=\dfrac{4A^2e\cos\theta}{ar^2}$ となる。

また $r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2=r\left(\dfrac{2A}{r^2}\right)^2=\dfrac{4A^2}{r^3}$ となるので、結局、焦点方向の加速度は

$\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2=\dfrac{4A^2e\cos\theta}{ar^2}-\dfrac{4A^2}{r^3}=\dfrac{4A^2(re\cos\theta-a)}{ar^3}$

ここで、 $r=\dfrac{a}{1+e\cos\theta}$ を変形すると $r+re\cos\theta=a$ すなわち $re\cos\theta-a=-r$ であるから

これを代入すると、 $\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2=\dfrac{4A^2(-r)}{ar^3}=-\dfrac{4A^2}{ar^2}$ となる。

つまり焦点方向の加速度は r^2 に反比例する。これと運動方程式 $F=ma$ と合わせると、

惑星を引っ張る太陽の引力は距離の 2 乗に反比例するという、万有引力の法則が導かれたことになる。（終）