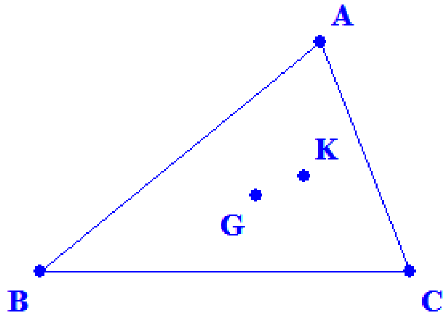
# ルモアーヌ(Lemoine)点(類似重心)

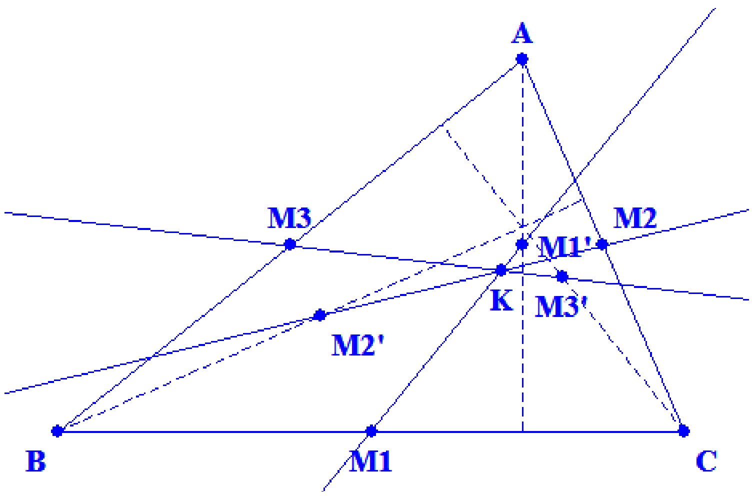
【定義】三角形において、重心の等角共役点をルモアーヌ(Lemoine)点(類似重心)という。ルモアーヌ点はKで表すことが多い。




・ルモアーヌ点Kの重心座標について
ルモアーヌ点は重心の等角共役点であるので重心の重心座標が $(1,1,1)$ であることより、ルモアーヌ点Kの重心座標は、$\left(\frac{a^2}{1},\frac{b^2}{1},\frac{c^2}{1}\right)=(a^2,b^2,c^2)$ である。

これより $\overrightarrow{OK}=\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{OB}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{OC}$ となる。

【定理1】三角形の各頂点A,B,Cの対辺の中点をM1,M2,M3とし、各頂点から下した垂線の中点をM1',M2',M3'とすると、ルモアーヌ点Kは3直線M1M1',M2M2',M3M3'の共点である。



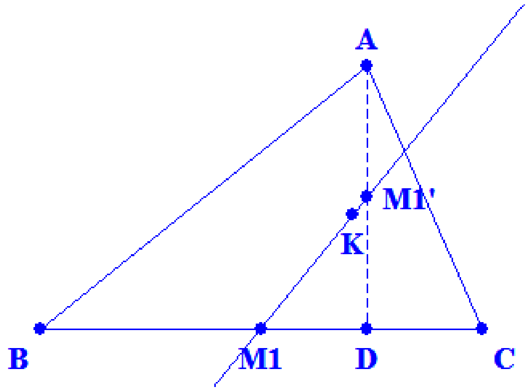

(証明)AからBCに下した垂線の足をDとする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおく。

このとき $\overrightarrow{AD}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$ と表される。

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{BD}{c}$ であるから

$BD=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}$ 同様にして $CD=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$



したがって　$s=\dfrac{BD}{BD+CD}=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a^2}$　となる。

これより　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}\vec{b}+\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a^2}\vec{c}$　と表される。

よって　$\overrightarrow{AM_1}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4a^2}\vec{b}+\dfrac{a^2-b^2+c^2}{4a^2}\vec{c}$　である。

以上の準備をもとに、$M_1, K, M_1'$ が同一直線上にあることを証明する。

$$\overrightarrow{M_1M_1'}=\overrightarrow{AM_1'}-\overrightarrow{AM_1}=\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{4a^2}\vec{b}+\frac{a^2-b^2+c^2}{4a^2}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{-a^2+b^2-c^2}{4a^2}\vec{b}+\frac{-a^2-b^2+c^2}{4a^2}\vec{c}$$

一方、$\overrightarrow{AK}$ は $\overrightarrow{OK}$ においてAをOとしたものだから、$\overrightarrow{AK}=\dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{AC}$

したがって　$\overrightarrow{M_1K}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AM_1}=\left(\dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{AC}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)$

$$=\frac{-a^2+b^2-c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}\vec{b}+\frac{-a^2-b^2+c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}\vec{c}$$

以上により、$M_1, K, M_1'$ が同一直線上にある。

同様にして、$M_2, K, M_2'$ ，$M_3, K, M_3'$ も同一直線上にあることがわかる。

ゆえにルモアーヌ点Kは3直線M1M1',M2M2',M3M3'の共点である。(終)

・ルモアーヌ点の幾何学的性質について

【定理2】⊿ABCにおいて任意の点Pから辺BC,CA,ABに下ろした垂線の長さをそれぞれ $x, y, z$ とすると、$x^2+y^2+z^2$ の値が最小になるのは、点Pがルモアーヌ点のときである。

(証明)Pの重心座標は $\left(\dfrac{1}{2}ax, \dfrac{1}{2}by, \dfrac{1}{2}cz\right)$ すなわち $(ax, by, cz)$ であることに注意する。

さらに、⊿ABCの面積をSとすると、$\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{1}{2}by+\dfrac{1}{2}cz=S$ であるから、$ax+by+cz=2S$ ・・・①

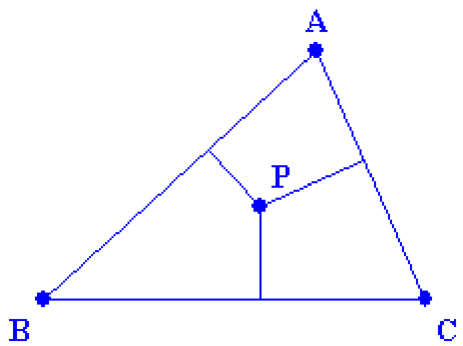
よって条件①の下で $x^2+y^2+z^2$ の値が最小になるときの点Pの重心座標 $(ax, by, cz)$ を求める。

コーシー・シュワルツの不等式 $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(ax+by+cz)^2$ を用いると①より

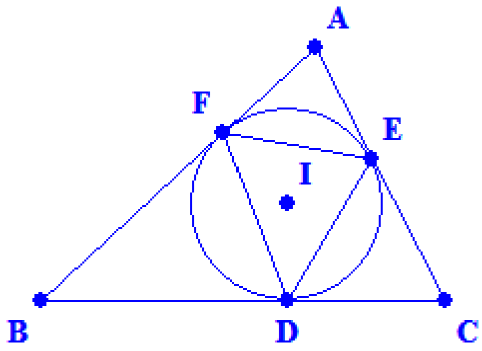
$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)\geq(ax+by+cz)^2=4S^2$$

ゆえに $x^2+y^2+z^2\geq\dfrac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$ となる。等号成立は $x:y:z=a:b:c$ のときである。

このとき、点Pの重心座標は $(ax, by, cz)=(a^2, b^2, c^2)$ となるので、点Pはルモアーヌ点となる。(終)



【定理3】⊿ABC のジェルゴンヌ点は⊿DEF のルモアーヌ点と一致する。




（証明）

⊿DEF のルモアーヌ点を K'とすると、

$$\overrightarrow{OK'}=\frac{d^2}{d^2+e^2+f^2}\overrightarrow{OD}+\frac{e^2}{d^2+e^2+f^2}\overrightarrow{OE}+\frac{f^2}{d^2+e^2+f^2}\overrightarrow{OF}$$ ・・・①である。これを計算する。

「内接円と外接円の接点」より、 $AE=AF=s-a\,,\,BD=BF=s-b\,,\,CD=CE=s-c$ である。

よって $\overrightarrow{OD}=\frac{s-c}{a}\overrightarrow{OB}+\frac{s-b}{a}\overrightarrow{OC}$ , $\overrightarrow{OE}=\frac{s-c}{b}\overrightarrow{OA}+\frac{s-a}{b}\overrightarrow{OC}$ , $\overrightarrow{OF}=\frac{s-b}{c}\overrightarrow{OA}+\frac{s-a}{c}\overrightarrow{OB}$

また、 $d^2=\left|\overrightarrow{EF}\right|^2=\left|\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\right|^2$ であるが、 $\overrightarrow{AF}=\frac{s-a}{c}\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{AE}=\frac{s-a}{b}\overrightarrow{AC}$ より

$$d^2=\left|\overrightarrow{EF}\right|^2=\left|\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\right|^2=(s-a)^2\left|\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}\right|^2=2(s-a)^2\left(1-\frac{1}{bc}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\ 2(s-a)^2\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=(s-a)^2\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}=(s-a)^2\cdot\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{bc}$$

$$=\ \frac{(s-a)^2(a+b-c)(a-b+c)}{bc}$$

よって、 $d=\frac{-a+b+c}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{bc}}$

同様にして、 $e=\frac{a-b+c}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a+b-c)}{ca}}$ , $f=\frac{a+b-c}{2}\sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)}{ab}}$ である。

これより

$$d^2=\frac{(-a+b+c)^2(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$$

$$e^2=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)^2(a+b-c)}{4ca}$$

$$f^2=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)^2}{4ab}$$ である。

以上の計算結果を①に代入して、 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ の係数の比を求める。

$\overrightarrow{OA}$ の係数は $\frac{e^2}{d^2+e^2+f^2}\cdot\frac{a+b-c}{2b}+\frac{f^2}{d^2+e^2+f^2}\cdot\frac{a-b+c}{2c}$

$\overrightarrow{OB}$ の係数は $\frac{f^2}{d^2+e^2+f^2}\cdot\frac{-a+b+c}{2c}+\frac{d^2}{d^2+e^2+f^2}\cdot\frac{a+b-c}{2a}$

$\overrightarrow{OC}$ の係数は $\frac{d^2}{d^2+e^2+f^2}\cdot\frac{a-b+c}{2a}+\frac{e^2}{d^2+e^2+f^2}\cdot\frac{-a+b+c}{2b}$

であるから、その比は $2\left(d^2+e^2+f^2\right)$ 倍して計算すればよい。

$\overrightarrow{OA}$ の係数× $2\left(d^2+e^2+f^2\right)$ は

$$\frac{e^2(a+b-c)}{b}+\frac{f^2(a-b+c)}{c}=\frac{(-a+b+c)(a-b+c)^2(a+b-c)^2}{2abc}$$

$\overrightarrow{OB}$ の係数× $2\left(d^2+e^2+f^2\right)$ は

$$\frac{d^2(a+b-c)}{a}+\frac{f^2(-a+b+c)}{c}=\frac{(-a+b+c)^2(a-b+c)(a+b-c)^2}{2abc}$$

$\overrightarrow{OC}$ の係数× $2\left(d^2+e^2+f^2\right)$ は

$$\frac{d^2(a-b+c)}{a}+\frac{e^2(-a+b+c)}{b}=\frac{(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)}{2abc}$$

となるので、さらに約せば、K'のルモアーヌ点の重心座標は

$\left((a-b+c)(a+b-c),(-a+b+c)(a+b-c),(-a+b+c)(a-b+c)\right)$ となる。

これは⊿ABC のジェルゴンヌ点の重心座標に等しい。したがって成り立つ。(終)

【定理4】ルモアーヌ点 K、内心 I、ミッテンプンクト M は同一直線上にある。
証明はミッテンプンクトを参照。