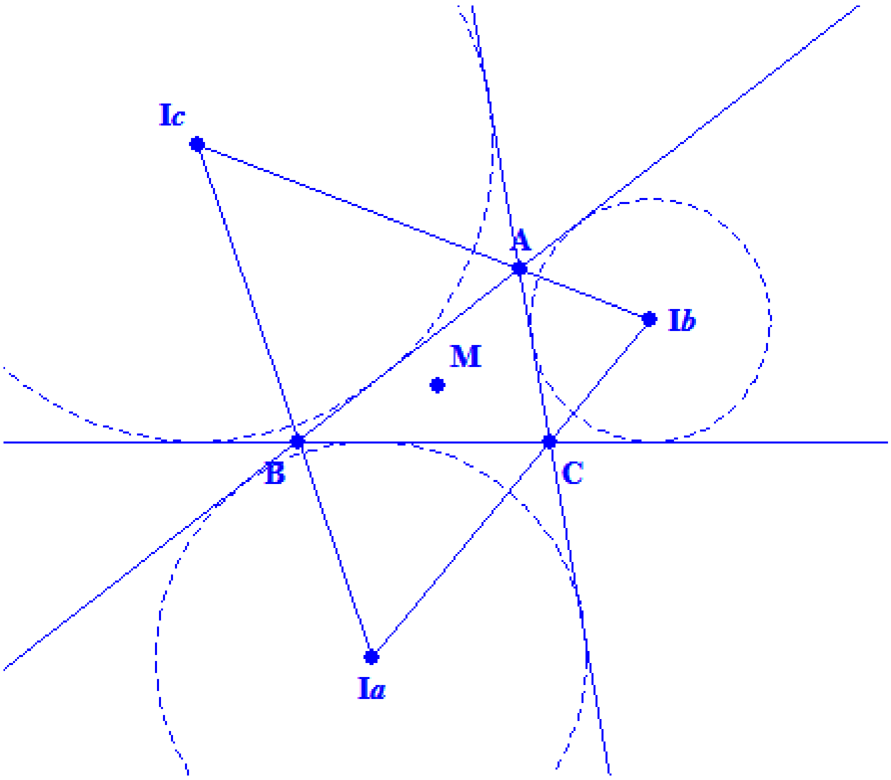
ミッテンプンクト（Mittenpunkt）

【定義】三角形の3つの傍心のつくる三角形を傍心三角形ということにする。
⊿ABC の傍心三角形 (I_a, I_b, I_c) のルモアーヌ点、すなわち傍心三角形 (I_a, I_b, I_c) の重心の等角共役点）をミッテンプンクト（Mittenpunkt）という。

ミッテンプンクト M の重心座標を求める。
傍心の重心座標は $I_a:(-a, b, c)$ ， $I_b:(a, -b, c)$ ， $I_c:(a, b, -c)$ である。



$I_bI_c = x, I_cI_a = y, I_aI_b = z$ とおく。
ルモアーヌ点の重心座標より

$$\overrightarrow{OM} = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}\overrightarrow{OA}' + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\overrightarrow{OB}' + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\overrightarrow{OC}'$$ である。

$x = \left|\overrightarrow{I_bI_c}\right|$ かつ傍心の重心座標より、

$$\overrightarrow{OI_b} = \frac{a}{a-b+c}\overrightarrow{OA} + \frac{-b}{a-b+c}\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a-b+c}\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OI_c} = \frac{a}{a+b-c}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b-c}\overrightarrow{OB} + \frac{-c}{a+b-c}\overrightarrow{OC}$$

だから、O を A として

$$\overrightarrow{AI_b} = \frac{-b}{a-b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a-b+c}\overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{AI_c} = \frac{b}{a+b-c}\overrightarrow{AB} + \frac{-c}{a+b-c}\overrightarrow{AC}$$ となるので

$$\overrightarrow{I_bI_c} = \overrightarrow{AI_c} - \overrightarrow{AI_b} = \left(\frac{b}{a+b-c} + \frac{b}{a-b+c}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{-c}{a+b-c} - \frac{c}{a-b+c}\right)\overrightarrow{AC}$$

$$= b\left(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c}\right)\overrightarrow{AB} - c\left(\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c}\right)\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{2ab}{(a+b-c)(a-b+c)}\overrightarrow{AB} - \frac{2ac}{(a+b-c)(a-b+c)}\overrightarrow{AC}$$

$= \quad \dfrac{2a}{(a+b-c)(a-b+c)}\left(b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC}\right)$

ゆえに　$x=\left|\overrightarrow{I_bI_c}\right|=\dfrac{2a}{(a+b-c)(a-b+c)}\left|b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC}\right|$

ここで　$\left|b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC}\right|^2=b^2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-2bc\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+c^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

$= \quad b^2c^2-2bc\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+c^2b^2=2b^2c^2-2bc\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

ここで　$a^2=\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=b^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+c^2$　であるから

$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=b^2+c^2-a^2$

したがって　$\left|b\overrightarrow{AB}-c\overrightarrow{AC}\right|^2=2b^2c^2-2bc\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2b^2c^2-bc(b^2+c^2-a^2)=bc(a+b-c)(a-b+c)$

$x=\left|\overrightarrow{I_bI_c}\right|=\dfrac{2a\sqrt{bc(a+b-c)(a-b+c)}}{(a+b-c)(a-b+c)}=\dfrac{2a\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}}$　同様にして、

$y=\left|\overrightarrow{I_aI_c}\right|=\dfrac{2b\sqrt{ca}}{\sqrt{(b+c-a)(b-c+a)}}$　,　$z=\left|\overrightarrow{I_aI_b}\right|=\dfrac{2c\sqrt{ab}}{\sqrt{(c+a-b)(c-a+b)}}$　となる。

これより　$x^2+y^2+z^2=\dfrac{4a^2bc}{(a+b-c)(a-b+c)}+\dfrac{4b^2ca}{(b+c-a)(b-c+a)}+\dfrac{4c^2ab}{(c+a-b)(c-a+b)}$

$= \quad 4abc\dfrac{a(-a+b+c)+b(a-b+c)+c(a+b-c)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

$= \quad 4abc\dfrac{-a^2-b^2-c^2+2ab+2bc+2ca}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

$= \quad -4abc\dfrac{a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

$= \quad -4abc\dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-a^2-b^2-c^2}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

$= \quad 4abc\dfrac{a^2+b^2+c^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

$= \quad 4abc\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)+(b+c-a)(b-c+a)+(c+a-b)(c-a+b)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

$= \quad 4abc\dfrac{(2s-2c)(2s-2b)+(2s-2a)(2s-2c)+(2s-2b)(2s-2a)}{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}$

$= \quad 2abc\dfrac{(s-c)(s-b)+(s-a)(s-c)+(s-b)(s-a)}{(s-a)(s-b)(s-c)}$

さらに、　$x^2=\dfrac{4a^2bc}{(a+b-c)(a-b+c)}=\dfrac{a^2bc}{(s-c)(s-b)}$　,　$y^2=\dfrac{ab^2c}{(s-a)(s-c)}$　,　$z^2=\dfrac{abc^2}{(s-b)(s-a)}$

よって　$\dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{a(s-a)}{2\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}}$

$\dfrac{y^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{b(s-b)}{2\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}}$

$\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{c(s-c)}{2\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}}$　以上より、

$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}}\left\{a(s-a)\overrightarrow{OI_a}+b(s-b)\overrightarrow{OI_b}+c(s-c)\overrightarrow{OI_c}\right\}$

ここで　$\overrightarrow{OI_a}=\dfrac{1}{-a+b+c}\left(-a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{1}{2(s-a)}\left(-a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}\right)$　であるから

$a(s-a)\overrightarrow{OI_a}=\dfrac{1}{2}a\left(-a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}\right)$

同様にして

$b(s-b)\overrightarrow{OI_b}=\dfrac{1}{2}b(a\overrightarrow{OA}-b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC})$, $c(s-c)\overrightarrow{OI_c}=\dfrac{1}{2}c(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}-c\overrightarrow{OC})$

となる。

よって、 $a(s-a)\overrightarrow{OI_a}+b(s-b)\overrightarrow{OI_b}+c(s-c)\overrightarrow{OI_c}$

$=\dfrac{1}{2}\{a(-a+b+c)\overrightarrow{OA}+b(a-b+c)\overrightarrow{OB}+c(a+b-c)\overrightarrow{OC}\}$

$=\dfrac{1}{2}\{a(2s-2a)\overrightarrow{OA}+b(2s-2b)\overrightarrow{OB}+c(2s-2c)\overrightarrow{OC}\}$

$=a(s-a)\overrightarrow{OA}+b(s-b)\overrightarrow{OB}+c(s-c)\overrightarrow{OC}$

となる。したがって

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}}\{a(s-a)\overrightarrow{OA}+b(s-b)\overrightarrow{OB}+c(s-c)\overrightarrow{OC}\} \quad ①$$

ここで $2\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}=a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)$ ・・・②が成り立つことは簡単な計算で示すことができる。(略)

したがって、①の表し方は重心座標による表し方になっている。

これより重心座標は $(a(s-a),b(s-b),c(s-c))$ である。

別の表し方をすれば、 $(a(-a+b+c),b(a-b+c),c(a+b-c))$ である。

【寄り道】

②の $2\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}=a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)$ の関係より、重心座標が $(2(s-b)(s-c),2(s-c)(s-a),2(s-a)(s-b))$ である点は何か気になるところであるが、これは $((s-b)(s-c),(s-c)(s-a),(s-a)(s-b))$ という重心座標をもつ点であるので、ジェルゴンヌ点である。

【定理1】ジェルゴンヌ点 Ge、重心 G、ミッテンプンクト M は同一直線上にあり、 $GeG:GM=2:1$ である。

(証明)ジェルゴンヌ点 Ge の重心座標は 2 倍して表すと、

$(2(s-a)(s-b),2(s-b)(s-c),2(s-c)(s-a))$ なので

$$\overrightarrow{OGe}=\frac{1}{2\{(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)\}}\times$$
$$\{2(s-b)(s-c)\overrightarrow{OA}+2(s-a)(s-c)\overrightarrow{OB}+2(s-a)(s-b)\overrightarrow{OC}\}$$
$$=\frac{1}{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)}\{2(s-b)(s-c)\overrightarrow{OA}+2(s-a)(s-c)\overrightarrow{OB}+2(s-a)(s-b)\overrightarrow{OC}\}$$

重心 G の重心座標は $(1,1,1)$ なので、 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

ミッテンプンクト M の重心座標は先ほどの計算より

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)}\{a(s-a)\overrightarrow{OA}+b(s-b)\overrightarrow{OB}+c(s-c)\overrightarrow{OC}\}$$

である。

よって、 $\overrightarrow{GeM}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数は $\dfrac{a(s-a)-2(s-b)(s-c)}{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)}$ であるが

(分子)= $a(s-a)-2(s-b)(s-c)=\dfrac{1}{2}\{-2a^2+a(b+c)+(b-c)^2\}$ であるから

($\overrightarrow{GeM}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数)= $\dfrac{a(s-a)-2(s-b)(s-c)}{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)}=\dfrac{-2a^2+a(b+c)+(b-c)^2}{2\{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)\}}$

となる。

一方、 $\overrightarrow{GM}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数は

$$\frac{a(s-a)}{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)}-\frac{1}{3}=\frac{3a(s-a)-a(s-a)-b(s-b)-c(s-c)}{3\{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)\}}$$

ここで（分子）＝ $2a(s-a)-b(s-b)-c(s-c)=\frac{1}{2}\{-2a^2+a(b+c)+(b-c)^2\}$

となるので、結局

（ $\overrightarrow{GM}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数）＝ $\dfrac{a(s-a)}{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{-2a^2+a(b+c)+(b-c)^2}{6\{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)\}}$

となる。

ゆえに、（ $\overrightarrow{GeM}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数）=3（ $\overrightarrow{GM}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数）となる。
$\overrightarrow{OB}$ ， $\overrightarrow{OC}$ の係数についても同様である。

以上により、 $\overrightarrow{GeM}=3\overrightarrow{GM}$ となることが示されたので、ジェルゴンヌ点 Ge、重心 G、ミッテンプンクト M は同一直線上にあり、 $GeG:GM=2:1$ である。（終）

証明の途中で
$a(s-a)-2(s-b)(s-c)=2a(s-a)-b(s-b)-c(s-c)$
すなわち $a(s-a)-b(s-b)-c(s-c)=-2(s-b)(s-c)$
が成り立つことも示された。

【定理2】ルモアーヌ点 K、内心 I、ミッテンプンクト M は同一直線上にある。

（証明）ルモアーヌ点 K の重心座標は (a^2,b^2,c^2) であるから

$$\overrightarrow{OK}=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{OA}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{OB}+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}\overrightarrow{OC}$$ である。

また、内心 I の重心座標は (a,b,c) であるから

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$$ である。

$\overrightarrow{KI}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数を計算すると

$$\frac{a}{a+b+c}-\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a\{b^2+c^2-a(b+c)\}}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$$ となる。

また $\overrightarrow{IM}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数は

$$\frac{a(s-a)}{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)}-\frac{a}{a+b+c}=\frac{a}{(a+b+c)T}\{(s-a)(a+b+c)-T\}$$

ただし $T=a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)$ とおいた。

ここで（分子）＝ $(s-a)(a+b+c)-T=(s-a)(a+b+c)-a(s-a)-b(s-b)-c(s-c)$
＝ $b(s-a)+c(s-a)-b(s-b)-c(s-c)=b(-a+b)+c(-a+c)=b^2+c^2-a(b+c)$
であるから

（ $\overrightarrow{IM}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数）＝ $\dfrac{a\{b^2+c^2-a(b+c)\}}{(a+b+c)\{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)\}}$ となる。

したがって $\overrightarrow{KI}=\dfrac{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)}{(a^2+b^2+c^2)}\overrightarrow{IM}$ となるので、ルモアーヌ点 K、内心 I、ミッテンプンクト M は同一直線上にある。（終）

【定理3】垂心 H、スピーカー点 Sp、ミッテンプンクト M は同一直線上にある。

(証明)

垂心 H の重心座標は $\left(\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2},\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2},\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}\right)$ である。これは分母を払うと

$\left((c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2),(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2),(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)\right)$ と表せる。

よって

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}\times$$

$$\left((c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{OA}+(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{OB}+(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)\overrightarrow{OC}\right)$$ である。

簡単のため

$V=(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$ とおく。

$\overrightarrow{MH}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数は

$$\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{V}-\frac{a(s-a)}{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)}$$

この計算はかなり大変なので Maxima で計算した。

その結果、$\overrightarrow{MH}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数は因数分解すると

$$\frac{(c^3-b\,c^2-b^2\,c+a^2\,c+b^3+a^2\,b-2\,a^3)(c^3-b\,c^2-a\,c^2-b^2\,c-2\,a\,b\,c-a^2\,c+b^3-a\,b^2-a^2\,b+a^3)}{(c-b-a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)(c^2-2\,b\,c-2\,a\,c+b^2-2\,a\,b+a^2)}$$

となる。

一方、$\overrightarrow{MSp}$ の $\overrightarrow{OA}$ の係数は

$$\frac{b+c}{2(a+b+c)}-\frac{a(s-a)}{a(s-a)+b(s-b)+c(s-c)}$$ である。

Maxima による計算の結果、$\overrightarrow{MSp}$ $\overrightarrow{OA}$ の係数は因数分解すると

$$\frac{c^3-b\,c^2-b^2\,c+a^2\,c+b^3+a^2\,b-2\,a^3}{2(c+b+a)(c^2-2\,b\,c-2\,a\,c+b^2-2\,a\,b+a^2)}$$

となる。

以上の結果から、$\overrightarrow{MH}=k\,\overrightarrow{MSp}$ なる実数 k が存在するので、H,Sp,M は同一直線上にあることがわかる。

$\overrightarrow{MH}=k\,\overrightarrow{MSp}$ と表すとき、k は

$$\frac{2(c^3-b\,c^2-a\,c^2-b^2\,c-2\,a\,b\,c-a^2\,c+b^3-a\,b^2-a^2\,b+a^3)}{(c-b-a)(c-b+a)(c+b-a)}$$

であることがわかる。(終)