モンティー・ホール問題（モンティー・ホールのジレンマ）

モンティー・ホール問題は、アメリカのテレビショー「駆け引きしましょう」（Let's make a deal）で司会を務めるモンティー・ホールにちなんで名づけられた確率の問題である。

【問題】
「プレイヤーの前に 3 つのドアがあって、1 つのドアの後ろには景品の新車が、2 つのドアの後ろには、はずれを意味するヤギがいる。プレイヤーは新車のドアを当てると新車がもらえる。プレイヤーが 1 つのドアを選択した後、モンティが残りのドアのうちヤギがいるドアを開けてヤギを見せる。
ここでプレイヤーは、最初に選んだドアを、残っている開けられていないドアに変更してもよいと言われる。プレイヤーはドアを変更すべきだろうか？」

（注意）
この「扉を変更すべきか」の意味は、司会者が扉を開けた後に、開けられずに残った 2 つの扉を比較して、変更すべきかどうかということである。司会者が扉を開ける前と開けた後の当たる確率を比較しているわけではない。
実際、間違えた考えをして、最初に選んだ扉が当たる確率が $\frac{1}{2}$ となると考え、（したがってはずれる確率も $\frac{1}{2}$ ）司会者が扉を開ける前の段階における当たる確率が $\frac{1}{3}$ であることから、これより大きい確率であるとかいうことを議論しているのではない。

この確率を間違えた考えの場合に、変更すべきかどうかを考えるならば次のようになる。
「開ける扉を変えても変えなくても確率は変わらないのでドアを変更してもしなくても同じである。」
実際はこのような確率ではないので、変更した方が有利となるが。

（解答1）3 枚の扉に1、2、3と名前をつける。
1の扉に景品が入っているとして、一般性を失わない。

（ア）プレイヤーが扉1を開けようとするとき
このことが起こる確率は $\frac{1}{3}$ である。このとき司会者は扉2か扉3のどちらかを等確率で選び、開けてくれる。
したがって、扉2が開けられる確率も、扉3が開けられる確率も $\frac{1}{2}$ である。
この場合、開ける扉を変更したら、景品は当たらないので

景品が当たる確率は $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0\right)=0$ である。

開ける扉を変更しない場合、景品は当たるので、景品が当たる確率は $\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$ である。

（イ）プレイヤーが扉2を開けようとするとき
このことが起こる確率は $\frac{1}{3}$ である。このとき司会者は扉3を必ず開ける。
この場合、開ける扉を変更したら、景品が当たるので
景品が当たる確率は $\frac{1}{3}\cdot\left(1\cdot 1\right)=\frac{1}{3}$ である。
開ける扉を変更しない場合、景品は当たらないので、景品が当たる確率は 0 である。

(イ)プレイヤーが扉3を開けようとするとき

(ウ)の場合と同じなので、景品が当たる確率は $\frac{1}{3}\cdot(1\cdot 1)=\frac{1}{3}$ である。

開ける扉を変更しない場合、景品は当たらないので、景品が当たる確率は0である。

したがって、開ける扉を変更するときに景品が当たる確率は $0+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

開ける扉を変更しない場合に景品が当たる確率は $\frac{1}{3}+0+0=\frac{1}{3}$

となる。ゆえに開ける扉を変更すべきである。

(解答2)プレーヤーが開ける扉を1、その他の扉を2、3とする。
扉1に景品が入っているという事象をA
扉2に景品が入っているという事象をB
扉3に景品が入っているという事象をC
司会者が扉2を開ける事象をB'
司会者が扉3を開ける事象をC' とする。
扉を変更するときに景品が当たる確率は $P(B')P_{B'}(C)+P(C')P_{C'}(B)$ である。

ここで $P(B')=P(C')=\frac{1}{2}$ である。(仮定より)

また $P_{B'}(C)=\frac{P(B'\cap C)}{P(B')}$ であるが、 $P(B'\cap C)=P(C)P_C(B')=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$

ゆえに $P_{B'}(C)=\frac{P(B'\cap C)}{P(B')}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

同様にして $P_{C'}(B)=\frac{2}{3}$

ゆえに扉を変更するときに景品が当たる確率は

$$P(B')P_{B'}(C)+P(C')P_{C'}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

一方、扉を変更しないときに当たる確率は、司会者がまったく扉を開けないことと考えて、 $\frac{1}{3}$ と考えてもいいし、

あるいは $P(B')P_{B'}(A)+P(C')P_{C'}(A)$ と考えて

$P(B'\cap A)=P(B')P_{B'}(A)$ 　$P(C'\cap A)=P(C')P_{C'}(A)$ であるので、

$$P(B')P_{B'}(A)+P(C')P_{C'}(A)=P(B'\cap A)+P(C'\cap A)=P(A)P_A(B')+P(A)P_A(C')$$

$=P(A)P(B')+P(A)P(C')=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$ である。ゆえに開ける扉を変更すべきである。

この問題の難しいところは、(1)残った2つの扉ということから当たる確率は $\frac{1}{2}$ であると考えてしまったり、

(2)3つの扉をあけていることは変わりないのだから当たる確率は $\frac{1}{3}$ で変わりない と考えてしまうところにある。