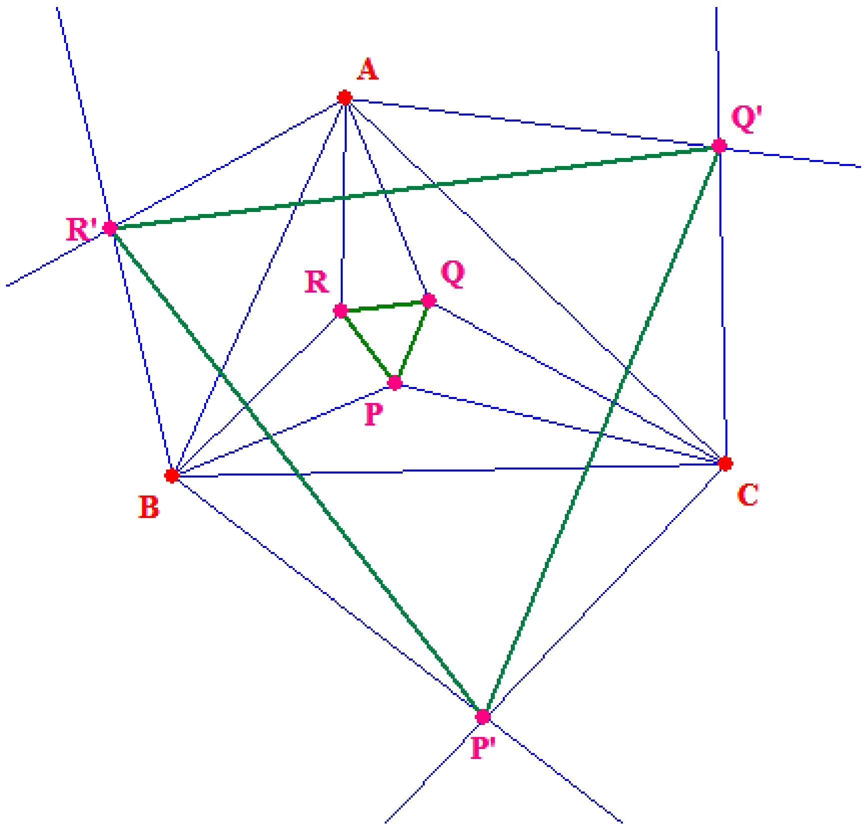
モーリー(モーレー)の定理(1889年)

(1) 三角形の3つの内角の3等分線のうち、辺に近いものの交点は正三角形の頂点になる。
(これをモーリーの三角形という。)
(2) 同様に、三角形の3つの外角の3等分線のうち、辺に近いものの交点は正三角形の頂点になる。



【(1)の証明】 ∠A, ∠B, ∠C の大きさをそれぞれ、3α, 3β, 3γ とおく。
△ABR に着目して AR の長さを求める。AR=t とおく。
まず、 $3\alpha+3\beta+3\gamma=180°$ であるから、 $\alpha+\beta+\gamma=60°$ となる。
∠ARB= $180°-(\alpha+\beta)=180°-(60°+\gamma)=120°+\gamma$ ･･･①
ゆえに、△ABR における正弦定理より、 $\dfrac{t}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin(120°+\gamma)}$

ゆえに、 $t=\dfrac{\sin\beta}{\sin(120°+\gamma)}\cdot c$ ･･･②

ここで△ABC の外接円の半径を R とすると、この三角形における正弦定理より、 $\dfrac{c}{\sin 3\gamma}=2R$

ゆえに、 $c=2R\sin 3\gamma$ ･･･③
②を①に代入して、

$$t=\frac{\sin\beta}{\sin(120°+\gamma)}\cdot c=\frac{\sin\beta}{\sin(120°+\gamma)}\cdot 2R\sin 3\gamma=2R\cdot\frac{\sin\beta\sin 3\gamma}{\sin(120°+\gamma)} \quad \cdots④$$

ここで、3倍角の公式を次のように変形する。

$\sin 3\gamma=3\sin\gamma-4\sin^3\gamma=\sin\gamma(3-4\sin^2\gamma)=\sin\gamma\{3-4(1-\cos^2\gamma)\}$
$=\ \sin\gamma(4\cos^2\gamma-1)=\sin\gamma(3\cos^2\gamma-\sin^2\gamma)$
$=\ \sin\gamma(\sqrt{3}\cos\gamma+\sin\gamma)(\sqrt{3}\cos\gamma-\sin\gamma)$
$=\ \sin\gamma\cdot 2\sin(\gamma+60°)\cdot 2\sin(\gamma+120°)$
$=\ 4\sin\gamma\sin(\gamma+60°)\sin(\gamma+120°)$ ･･･⑤ となる。

これを④に代入して

$$AR=t=2R\cdot\frac{\sin\beta\sin3\gamma}{\sin(120°+\gamma)}=2R\cdot\frac{\sin\beta\cdot4\sin\gamma\sin(\gamma+60°)\sin(\gamma+120°)}{\sin(120°+\gamma)}$$

$=\ 8R\sin\beta\sin\gamma\sin(\gamma+60°)$ ・・・⑥

同様にして、AQ=s を求めると、β⇔γ として

$AQ=s=8R\sin\gamma\sin\beta\sin(\beta+60°)$ ・・・⑦となる。

以上の準備の下、今度は△ARQ に注目して RQ の長さを求める。
⑥÷⑦ とすると、

$$\frac{AQ}{AR}=\frac{s}{t}=\frac{8R\sin\gamma\sin\beta\sin(\beta+60°)}{8R\sin\beta\sin\gamma\sin(\gamma+60°)}=\frac{\sin(\beta+60°)}{\sin(\gamma+60°)}$$

ここで、正弦定理の逆（後で示す）を用いる。
$(\beta+60°)+(\gamma+60°)=\beta+\gamma+120°=180°-\alpha=180°-\angle RAQ$ となっているから、後に示す定理の条件を満たす。したがって、∠ARQ=β+60°, ∠AQR=γ+60° ・・・⑧である。

よって、△ARQ に正弦定理を適用して、 $\frac{QR}{\sin\alpha}=\frac{AR}{\sin(\gamma+60°)}$ これより、

$$QR=\frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma+60°)}\cdot AR=\frac{\sin\alpha}{\sin(\gamma+60°)}\cdot8R\sin\beta\sin\gamma\sin(\gamma+60°)=8R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

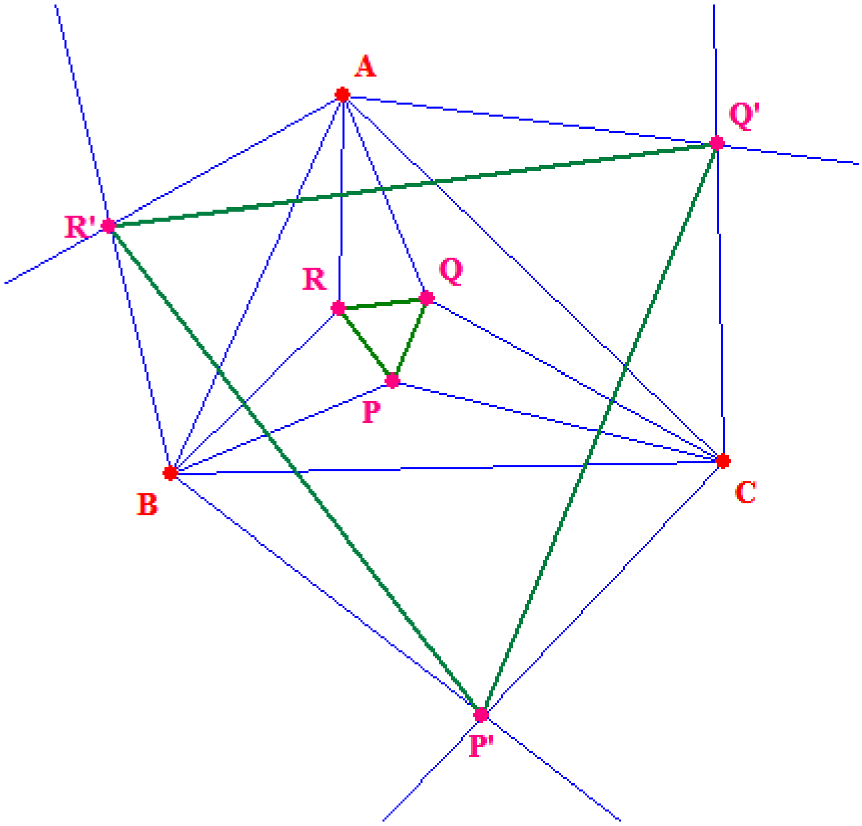
この式は α，β，γ に関する対称式であるから、PQ=QR=QP が成り立つ。
すなわち△PQR は正三角形である。（終）

（定理）正弦定理の逆について
△ABC において、 $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ （ただし、 $\beta\geq0,\ \gamma\geq0,\ \beta+\gamma=180°-\angle A$ ）が成り立てば、∠B=β, ∠C=γ である。
（証明）辺 AB,AC 上にそれぞれ B',C'をとり、∠AB'C'=β となるようにする。
このとき、△AB'C'の内角の和より、∠A+β+∠AC'B'=180°
よって、β+∠AC'B'=180° －∠A
この式と仮定の β+γ=180°－∠A より、∠AC'B'=γ となる。

△AB'C'に正弦定理を用いて、 $\frac{AC'}{AB'}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ これと仮定から、 $\frac{b}{c}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

よって、 $\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC}{AB}$ 。∠A は共通なので、△ABC∽△AB'C' となる。
ゆえに、∠B=∠AB'C'=β, ∠C= ∠AC'B'=γ である。（終）

【(2)の証明】



記号は同じものを用いる。

△ABR'に着目して AR'の長さを求める。AR'=t' とおく。

∠BAR'= $\dfrac{180°-3\alpha}{3}=60°-\alpha$ である。・・・⑨同様に、∠ABR'= $60°-\beta$ である。

したがって、△ABR'の内角の和より、∠AR'B= $180°-(60°-\alpha)-(60°-\beta)=60°+\alpha+\beta$ ・・・⑩

となるので、正弦定理より、

$$\frac{c}{\sin(60°+\alpha+\beta)}=\frac{t'}{\sin(60°-\beta)}$$

$$t'=\frac{\sin(60°-\beta)}{\sin(60°+\alpha+\beta)}\cdot c$$ ここで③を代入して

$$t'=\frac{\sin(60°-\beta)}{\sin(60°+\alpha+\beta)}\cdot 2R\sin 3\gamma=2R\frac{\sin(60°-\beta)\sin 3\gamma}{\sin(60°+\alpha+\beta)}$$

ここで、分母は

$$\sin(60°+\alpha+\beta)=\sin\{60°+(60°-\gamma)\}=\sin(120°-\gamma)=\sin\{180°-(60°+\gamma)\}=\sin(60°+\gamma)$$

となるから、

$$t'=2R\cdot\frac{\sin(60°-\beta)\sin 3\gamma}{\sin(60°+\gamma)}$$ となる。

ここで、内角の場合で示した⑤を用いると

$$AR'=t'=2R\cdot\frac{\sin(60°-\beta)\sin 3\gamma}{\sin(60°+\gamma)}$$

$$=\ 2R\cdot\frac{\sin(60°-\beta)\cdot 4\sin\gamma\sin(\gamma+60°)\sin(\gamma+120°)}{\sin(60°+\gamma)}$$

$$=\ 8R\sin(60°-\beta)\sin\gamma\sin(\gamma+120°)$$

$$=\ 8R\sin(60°-\beta)\sin\gamma\sin\{180°-(60°-\gamma)\}$$

$$=\ 8R\sin(60°-\beta)\sin\gamma\sin(60°-\gamma)$$ ・・・⑪

同様にして、AQ'=s'を求めると、β⇔γ として

$AQ'=s'=8R\sin(60°-\gamma)\sin\beta\sin(60°-\beta)$ ・・・⑫となる。

以上の準備の下、今度は△AR'Q'に注目してR'Q'の長さを求める。
∠R'AQ'=(60°-α)+(60°-α)+3α=120°+α である。

⑪÷⑫ とすると、

$$\frac{AQ'}{AR'}=\frac{s'}{t'}=\frac{8R\sin(60°-\gamma)\sin\beta\sin(60°-\beta)}{8R\sin(60°-\beta)\sin\gamma\sin(60°-\gamma)}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$ すなわち $$\frac{AQ'}{\sin\beta}=\frac{AR'}{\sin\gamma}$$ ・・・⑬

ゆえに、正弦定理の逆より、∠AR'Q'=β, ∠AQ'R'=γ である。

したがって、△AR'Q'に正弦定理を適用して、 $\dfrac{Q'R'}{\sin(120°+\alpha)}=\dfrac{AR'}{\sin\gamma}$

ゆえに、

$$\begin{aligned}
Q'R' &= \frac{\sin(120°+\alpha)}{\sin\gamma}\cdot AR' \\
&= \frac{\sin(120°+\alpha)}{\sin\gamma}\cdot 8R\sin(60°-\beta)\sin\gamma\sin(60°-\gamma) \\
&= 8R\sin(60°-\beta)\sin(60°-\gamma)\sin(120°+\alpha) \\
&= 8R\sin(60°-\beta)\sin(60°-\gamma)\sin(120°+\alpha) \\
&= 8R\sin(60°-\beta)\sin(60°-\gamma)\sin(60°-\alpha) \\
&= 8R\sin(60°-\alpha)\sin(60°-\beta)\sin(60°-\gamma)
\end{aligned}$$

この式は α, β, γ に関する対称式であるから、P'Q'=Q'R'=Q'P'が成り立つ。
すなわち△P'Q'R'は正三角形である。(終)

別の証明として、3つの角が等しく60°になるという方法でも証明できる。以下でそれを示す。

【(1)の別証明】

①より、∠ARB= $120°-\gamma$ ⑧より、∠ARQ= $\beta+60°$

同様に、∠BRP= $\alpha+60°$ であるから

∠PRQ= $360°-\angle ARB-\angle ARQ-\angle BRP=360°-(120°+\gamma)-(\beta+60°)-(\alpha+60°)$

= $120°-(\alpha+\beta+\gamma)=60°$

同様にして、∠RQP=∠QPR=60° であるから、△PQR は正三角形である。(終)

【(2)の別証明】

△AR'Q'∽△PBC であることを示し、これを利用する。

まず、⑨と同様にして、∠R'AB=∠CAQ'= $60°-\alpha$ であることがわかる。(対称性)

したがって、∠R'AQ'=∠R'AB+∠BAC+∠CAQ'= $(60°-\alpha)+3\alpha+(60°-\alpha)=120°+\alpha$

一方、∠BPC= $180°-(\beta+\gamma)=180°-(60°+\alpha)=120°+\alpha$

したがって、∠R'AQ'=∠BPC である。

また△PBC において正弦定理より、 $\dfrac{BP}{\sin\gamma}=\dfrac{CP}{\sin\beta}$ ゆえに、 $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

一方、⑬より、 $\dfrac{AR'}{AQ'}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ である。よって、 $\dfrac{AR'}{AQ'}=\dfrac{PB}{PC}$ したがって、△AR'Q'∽△PBC である。

よって、∠AR'Q'=β。同様にして∠BR'P=α である。

ゆえに、⑩と合わせて、

∠P'R'Q'=∠AR'B −∠AR'Q'−∠BR'P'= $(60°+\alpha+\beta)-\beta-\alpha=60°$

同様にして、∠R'Q'P'=∠Q'P'R'=60° であることがわかるので、△P'Q'R'は正三角形である。(終)

(参考文献) 数学ひとり旅 石谷 茂