無限級数の和について（歴史と注意すべきところ）

例えば、 $(-1)^{k-1}$ 　$(k=1,2,3,\cdots)$ を考える。 $A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}$ であるので、

A_n は、n が奇数のとき 1、n が偶数のとき 0 となる。

ゆえに、 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k=\lim_{n\to\infty} A_n$ は値をもたない。（第 n 部分和が収束しないから）

これについては17、18世紀頃に論争があった。

（考え方1） $\sum_{k=1}^{\infty} a_k=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0$

（考え方2） $\sum_{k=1}^{\infty} a_k=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+0+0+0+\cdots=1$

（考え方3） $S=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ とおく。下のように計算して

$$\begin{array}{rl} & S=1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots \\ + & S=\quad 1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots \\ \hline & 2S=1 \end{array}$$

ゆえに、 $S=\frac{1}{2}$

現在ではどの考え方も間違いであると考えるが、どこが間違っているか？

<u>間違いの箇所</u>

（考え方1）は、 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1}+a_{2k+1})$ の和を計算している。

（考え方2）は、 $c_1=1,\ c_k=c_{2k-2}+c_{2k-1}$ とおいてときの、 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ の和を計算している。

（考え方3）は、 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が和 S をもつと仮定して得られた結果になっている。