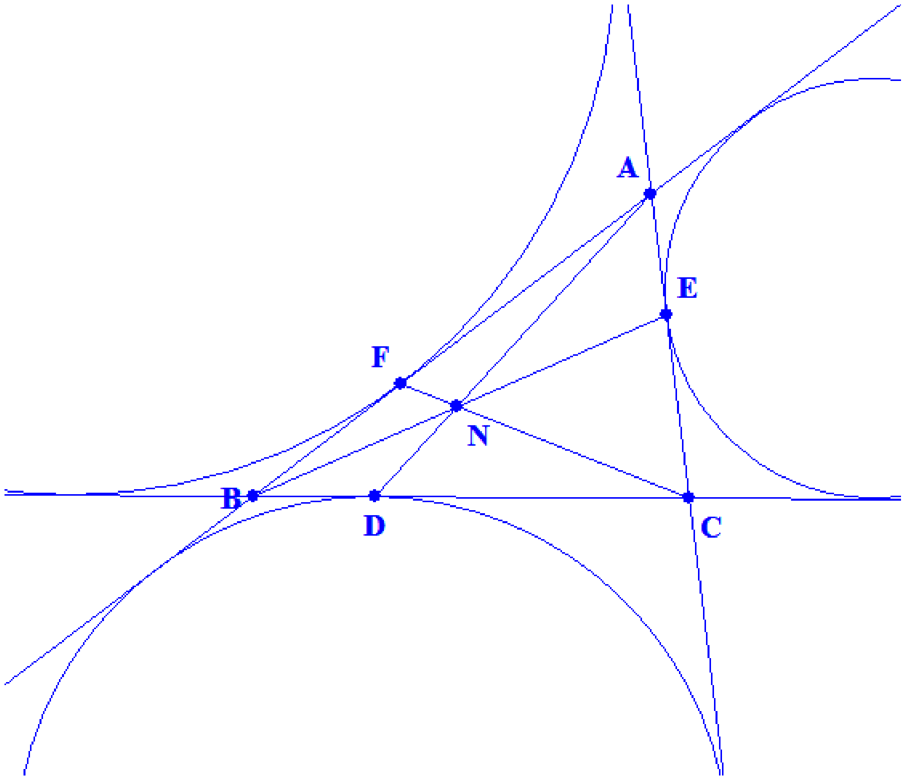
ナーゲル点

（定義）⊿ABC の 3 つの傍接円と BC,CA,AB との接点を D,E,F とすると、AD,BE,CF は 1 点で交わる。
この点をナーゲル点という。



（証明）
BD=AE= $s-c$,CD=AF= $s-b$,CE=BF= $s-a$
よって、 $\dfrac{AF}{FB}\dfrac{BD}{DC}\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{s-b}{s-a}\dfrac{s-c}{s-b}\dfrac{s-a}{s-c}=1$ であるから、チェバの定理の逆により、AD,BE,CF は 1 点で交わる。（終）

・ナーゲル点の性質について

【定理 1】内心、重心、ナーゲル点は同一直線上にあり、 $IG:GN=1:2$ である。
（証明）ベクトルで証明する。基本的に計算だけである。
A を始点とする位置ベクトルを考える。

$BD:DC=(s-c):(s-b)$ であるから、

$$\overrightarrow{AD}=\frac{(s-b)\overrightarrow{AB}+(s-c)\overrightarrow{AC}}{(s-c)+(s-b)}=\frac{(a-b+c)\overrightarrow{AB}+(a+b-c)\overrightarrow{AC}}{2a}$$ とおける。

ゆえに、 $\overrightarrow{AN}=\dfrac{k}{2a}\left\{(a-b+c)\overrightarrow{AB}+(a+b-c)\overrightarrow{AC}\right\}$

一方、N は BE 上にあるので、

$$\overrightarrow{AN}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AE}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\frac{AE}{b}\overrightarrow{AC}=(1-t)\overrightarrow{AB}+\frac{t(a+b-c)}{2b}\overrightarrow{AC}$$

係数を比較して

$$\frac{k(a-b+c)}{2a}=1-t \quad かつ \quad \frac{k(a+b-c)}{2a}=\frac{t(a+b-c)}{2b}$$

これを解くと、 $k=\dfrac{2a}{a+b+c}$ を得る。

したがって、 $\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{a+b+c}\left\{(a-b+c)\overrightarrow{AB}+(a+b-c)\overrightarrow{AC}\right\}=\dfrac{1}{s}\left\{(s-b)\overrightarrow{AB}+(s-c)\overrightarrow{AC}\right\}$ ・・・①

他方、内心の重心座標は (a,b,c) であるから

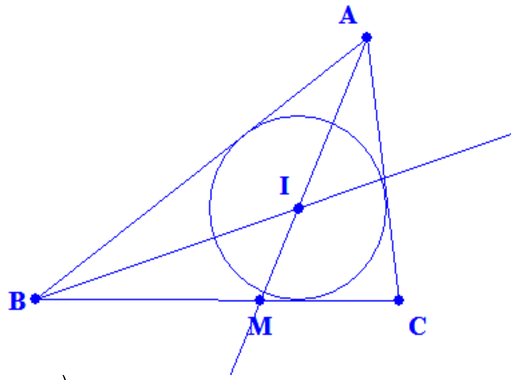
$$\overrightarrow{OI}=\frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{OA}+\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{OB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{OC}$$

O を A として考えれば

$$\overrightarrow{AI}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AB}$$

となる。

また、重心に関しては $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ である。



以上より、

$$\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)-\left(\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\frac{1}{3(a+b+c)}\left\{(a-2b+c)\overrightarrow{AB}+(a+b-2c)\overrightarrow{AC}\right\}$$

$$\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AG}=\frac{1}{a+b+c}\left\{(a-b+c)\overrightarrow{AB}+(a+b-c)\overrightarrow{AC}\right\}-\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{2}{3(a+b+c)}\left\{(a-2b+c)\overrightarrow{AB}+(a+b-2c)\overrightarrow{AC}\right\}$$

以上により、 $\overrightarrow{GN}=2\overrightarrow{IG}$ となるので、I,G,N は同一直線上にあり、 $IG:GN=1:2$ である。(終)

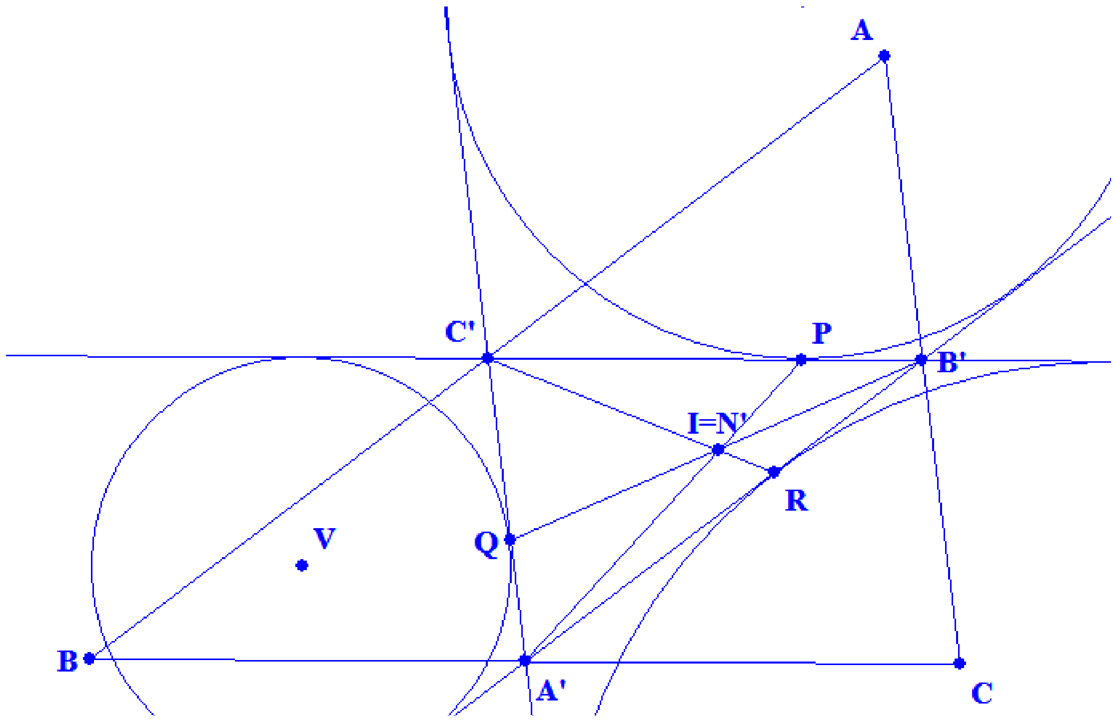
①を利用して、ナーゲル点の重心座標を計算すると、次のようになる。

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{s}\left\{(s-b)\overrightarrow{AB}+(s-c)\overrightarrow{AC}\right\} \quad \text{より} \quad \overrightarrow{ON}-\vec{a}=\frac{s-b}{s}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{s-c}{s}(\vec{c}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{-a+b+c}{a+b+c}\vec{a}+\frac{a-b+c}{a+b+c}\vec{b}+\frac{a+b-c}{a+b+c}\vec{c}=\frac{2(s-a)}{s}\vec{a}+\frac{2(s-b)}{s}\vec{b}+\frac{2(s-c)}{s}\vec{c}$$

よって、重心座標は $(-a+b+c,a-b+c,a+b-c)=(s-a,s-b,s-c)$ である。

【定理2】⊿ABC の内心は中点三角形のナーゲル点である。



（証明）ベクトルを用いて示す。
A を位置ベクトルの基準とする。

$\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ であるからナーゲル点の重心座標の計算より、

$$\overrightarrow{AN}=\frac{-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}}{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{c}{2}}{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}-\frac{c}{2}}{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{-a+b+c}{2(a+b+c)}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{a-b+c}{2(a+b+c)}\overrightarrow{AC}+\frac{a+b-c}{2(a+b+c)}\overrightarrow{AB}$$

よって、

$$\overrightarrow{ON}=\vec{a}+\frac{-a+b+c}{2(a+b+c)}\{(\vec{b}-\vec{a})-(\vec{c}-\vec{a})\}+\frac{a-b+c}{2(a+b+c)}(\vec{c}-\vec{a})+\frac{a+b-c}{2(a+b+c)}(\vec{b}-\vec{a})$$

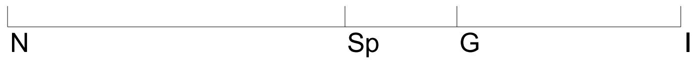
$$=\frac{a}{a+b+c}\vec{a}+\frac{b}{a+b+c}\vec{b}+\frac{c}{a+b+c}\vec{c}$$

他方、内心の位置ベクトルは既に上で計算してあり、

$\overrightarrow{AI}=\frac{b+c}{a+b+c}\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AB}$ であったが、これを変形すると

$\overrightarrow{OI}=\vec{a}+\frac{b}{a+b+c}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{c}{a+b+c}(\vec{c}-\vec{a})=\frac{a}{a+b+c}\vec{a}+\frac{b}{a+b+c}\vec{b}+\frac{c}{a+b+c}\vec{c}$ となるので、両者は一致する。ゆえに示された。（終）

(別証)シュピカー中心のところで示した　$SpG:GI=1:2$　・・・①を用いる。



中点三角形 A'B'C'の内心、重心、ナーゲル点をそれぞれ I',G',N'とする。
中点三角形 A'B'C'の内心はシュピカー中心であることは定義である。よって、　$\overrightarrow{OI'}=\overrightarrow{OSp}$　・・・②
またよく知られているように、⊿ABC の重心 G と⊿A'B'C'の重心 G'は一致するので、　$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG'}$　・・・③

①②③より、　$I'G':G'I=1:2$　かつ、I',G',I は一直線上にある。・・・④

一方、【定理 1】を⊿A'B'C'に適用すれば、
内心 I'、重心 G'、ナーゲル点 N'は同一直線上にあり、　$I'G':G'N'=1:2$　である。・・・⑤

④⑤より、I と N'は一致する。(終)

【定理3】ジェルゴンヌ点とナーゲル点は等距離共役点である。
(証明はジェルゴンヌ点を参照。)