内心がオイラー線上にある三角形

内心がオイラー線上にある三角形は二等辺三角形に限るということはすでに知られており、例えば数研通信78号松田康雄の記事にある。また他にもSSH数学図形ゼミの「三角形のオイラー線・9 点円およびその周辺の話題」（証明なし）にもある。

ここでは計算量は多いが、ベクトルを使って証明する。ただし計算は Maxima を利用した。

（証明）
⊿ABC の外心を O、内心を I、重心を G とする。位置ベクトルの基準を P とする。
重心座標を利用すると、 $\overrightarrow{PI}=\dfrac{a\,\overrightarrow{PA}+b\,\overrightarrow{PB}+c\,\overrightarrow{PC}}{a+b+c}$ ， $\overrightarrow{PG}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}$

$\overrightarrow{PO}=\dfrac{1}{16}S^2\left\{a^2(-a^2+b^2+c^2)\overrightarrow{PA}+b^2(a^2-b^2+c^2)\overrightarrow{PB}+c^2(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{PC}\right\}$ である。

一次独立な 2 つのベクトルで表すため、特に P を A として考えると
$\overrightarrow{AI}=\dfrac{b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$ ， $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$ ， $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{16}S^2\left\{b^2(a^2-b^2+c^2)\overrightarrow{AB}+c^2(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{AC}\right\}$
となる。

O,G,I が一直線上にあるとすると、 $3k\,\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OI}$ が成り立つから、位置ベクトルの基準を A に変えると
$\Leftrightarrow\ 3k(\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AO})=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AO}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AI}+(3k-1)\overrightarrow{AO}-3k\,\overrightarrow{AG}=\vec{0}$

これに上の式を代入すると
$\dfrac{b\,\overrightarrow{AB}+c\,\overrightarrow{AC}}{a+b+c}+\dfrac{3k-1}{16S^2}\left\{b^2(a^2-b^2+c^2)\overrightarrow{AB}+c^2(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{AC}\right\}-k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$
となる。
$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の係数は 0 であるから

$\dfrac{b}{a+b+c}+\dfrac{(3k-1)b^2(c^2+a^2-b^2)}{16S^2}-k=0$ ・・・・・①

かつ $\dfrac{c}{a+b+c}+\dfrac{(3k-1)c^2(a^2+b^2-c^2)}{16S^2}-k=0$ ・・・・・②が成り立つ。これを Maxima で解く。

まず①と②を k について解く。
それを等しいとおいた式を因数分解する。すると結果は
$$\frac{(b-a)(c-a)(c-b)(c-b-a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)^2}{(c^4+b^2c^2-2a^2c^2-2b^4+a^2b^2+a^4)(2c^4-b^2c^2-a^2c^2-b^4+2a^2b^2-a^4)}=0$$
となる。これより、 $a=b,b=c,a=c$ を得るので、求める三角形は二等辺三角形である。（終）

```
(%i1) A1:b/(a+b+c);
(%o1) b/(c+b+a)

(%i2) A2:c/(a+b+c);
(%o2) c/(c+b+a)

(%i3) s:(a+b+c)/2;
(%o3) (c+b+a)/2
```

(%i4) S:sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c));

(%o4) $$\frac{\sqrt{(c+b+a)\left(\frac{c+b+a}{2}-a\right)\left(\frac{c+b+a}{2}-b\right)\left(\frac{c+b+a}{2}-c\right)}}{\sqrt{2}}$$

(%i5) solve(A1+(3*k-1)*b^2*(c^2+a^2-b^2)/(16*S^2)-k,k);

(%o5) $$[k=\frac{b\,c^3-a\,b\,c^2+(-b^3+2\,a\,b^2-a^2\,b)\,c-a\,b^3+a^3\,b}{c^4+(b^2-2\,a^2)\,c^2-2\,b^4+a^2\,b^2+a^4}]$$

(%i6) solve(A2+(3*k-1)*c^2*(a^2+b^2-c^2)/(16*S^2)-k,k);

(%o6) $$[k=\frac{(b+a)\,c^3-2\,a\,b\,c^2+(-b^3+a\,b^2+a^2\,b-a^3)\,c}{2\,c^4+(-b^2-a^2)\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}]$$

(%i7) B1:b*c^3-a*b*c^2+(-b^3+2*a*b^2-a^2*b)*c-a*b^3+a^3*b;

(%o7) $b\,c^3-a\,b\,c^2+(-b^3+2\,a\,b^2-a^2\,b)\,c-a\,b^3+a^3\,b$

(%i8) C1:c^4+(b^2-2*a^2)*c^2-2*b^4+a^2*b^2+a^4;

(%o8) $c^4+(b^2-2\,a^2)\,c^2-2\,b^4+a^2\,b^2+a^4$

(%i9) B2:(a+b)*c^3-2*a*b*c^2+(-b^3+a*b^2+a^2*b-a^3)*c;

(%o9) $(b+a)\,c^3-2\,a\,b\,c^2+(-b^3+a\,b^2+a^2\,b-a^3)\,c$

(%i10) C2:2*c^4+(-b^2-a^2)*c^2-b^4+2*a^2*b^2-a^4;

(%o10) $2\,c^4+(-b^2-a^2)\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4$

(%i11) B1/C1-B2/C2;

(%o11) $$\frac{b\,c^3-a\,b\,c^2+(-b^3+2\,a\,b^2-a^2\,b)\,c-a\,b^3+a^3\,b}{c^4+(b^2-2\,a^2)\,c^2-2\,b^4+a^2\,b^2+a^4}-\frac{(b+a)\,c^3-2\,a\,b\,c^2+(-b^3+a\,b^2+a^2\,b-a^3)\,c}{2\,c^4+(-b^2-a^2)\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}$$

(%i12) factor(%);

(%o12) $$\frac{(b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,(c-b-a)\,(c-b+a)\,(c+b-a)\,(c+b+a)^2}{(c^4+b^2\,c^2-2\,a^2\,c^2-2\,b^4+a^2\,b^2+a^4)\,(2\,c^4-b^2\,c^2-a^2\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4)}$$