ナポレオンの三角形

今から200年前のヨーロッパの軍人、政治家として知られているが、「ナポレオンの三角形」という定理を見つけたという伝説が残っている。

「ナポレオンの三角形」には「ナポレオンの外三角形」と「ナポレオンの内三角形」の2種類がある。

【ナポレオンの外三角形】
任意の三角形ABCが与えられたときに、まずそれぞれの辺を1辺にもつ正三角形を、その3辺の外側に描く。次にその3つの正三角形の重心の位置A", B", C"を求め、それらを線分で結ぶと正三角形A"B"C"が得られる。これを「ナポレオンの外三角形」という。

同じ記号を使う。
【ナポレオンの内三角形】
任意の三角形ABCが与えられたときに、まずそれぞれの辺を1辺にもつ正三角形を、その3辺の内側に描く。次にその3つの正三角形の重心の位置A", B", C"を求め、それらを線分で結ぶと正三角形A"B"C"が得られる。これを「ナポレオンの外三角形」という。

しかも、驚くべきことに、
「ナポレオンの外三角形と ナポレオンの内三角形の2つの正三角形の面積の差は、元の三角形の面積に等しい。」ということが成り立っている。

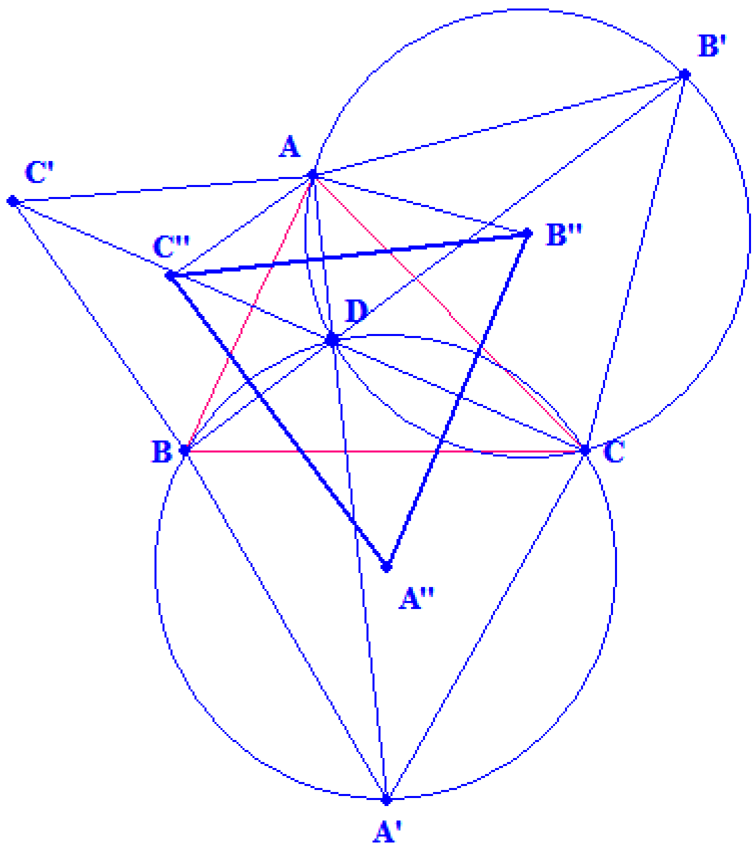
ここでは順にこのことを証明する。以下の証明でわかることであるが、証明はほぼ同様に進行する。

[ナポレオンの外三角形について】
図において、次のことが成り立つ。
(1)　$AA'=BB'=CC'$
(2)　これらの3直線は1点で交わる。
(3)　3つの正三角形の重心は正三角形をつくる。

（証明）
(1)　△AC'C≡△ABB' であるから、C'C=BB'。他も同様である。（終）

(2)　△AC'C と△ABB'は同じ向きに合同であるから、CC'とBB'は 60°の傾きをなす。
直線 BB'と CC'の交点を D とすれば、∠CDB'=60°=□ CAB'（正三角形）・・・①
よって、点 C,D,A,B'は同一円周上にある。したがって、∠ADB'=□ ACB'=60° ・・・②
また、∠BA'C=60°=∠CDB' 。ゆえに、点 A',B,D,C は同一円周上にある。
ゆえに、∠A'DC=□ A'BC=60° 。・・・③
①②③より、3点 A,D,A'は同一直線上にある。ゆえに、直線 AA', BB', CC'は点 D で交わる。（終）

(3)　△A'BC, △B'AC, △C'BA　の重心をそれぞれ A", B", C" とする。
△AB"C"□ △AB'C'　である。なぜなら、　$AB'':AB'=1:\sqrt{3}=AC'':AB$
かつ、∠B"AC" = ∠B'AB だから、2 辺の比とその間の角が等しいからである。
ゆえに、B"C"：B'B　$=1:\sqrt{3}$
同様に、C"A"：C'C = A"B"：A'A　$=1:\sqrt{3}$
したがって(1)より、A"B"=B"C"=C"A"である。
ゆえに、△A"B"C"は正三角形である。（終）

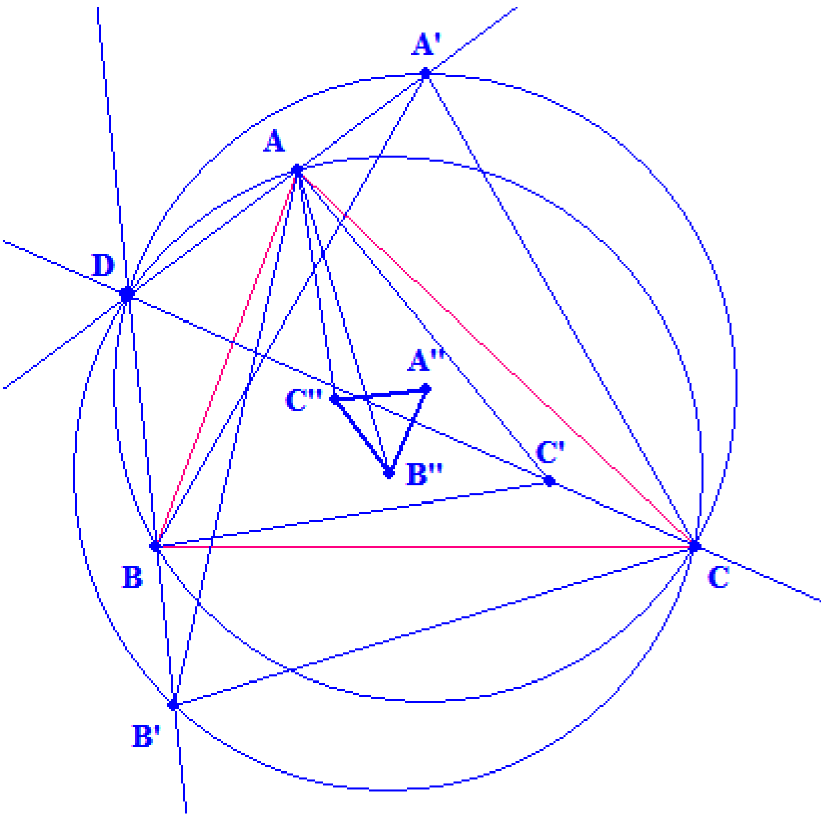


[ナポレオンの内三角形について】
図において、次のことが成り立つ。
(1)　$AA'=BB'=CC'$
(2)　これらの3直線は1点で交わる。
(3)　3つの正三角形の重心は正三角形をつくる。

（証明）
(1)　△AC'C≡△ABB'　 であるから、C'C=BB'。他も同様である。（終）

(2)　△AC'C　と△ABB'は同じ向きに合同であるから、CC'とBB'は 60°の傾きをなす。
直線 BB'とCC'の交点をDとすれば、∠CDB'=60°=□ CAB'（正三角形）・・・①
よって、点 C,D,A,B'は同一円周上にある。したがって、∠ADB'=180°－∠ACB'=120°　・・・②
また、∠BA'C=60°=∠CDB 。ゆえに、点 A',B,D,C は同一円周上にある。
ゆえに、∠A'DC=□ A'BC=60° 。・・・③
①②③より、3点 A,D,A'は同一直線上にある。ゆえに、直線 AA', BB', CC'は点 D で交わる。（終）

(3)　△A'BC, △B'AC, △C'BA　 の重心をそれぞれ A'', B'', C'' とする。
△AB''C''□ △AB'C'　である。なぜなら、　$AB'':AB'=1:\sqrt{3}=AC'':AB$
かつ、∠B''AC'' = ∠B'AB　だから 2 辺の比とその間の角が等しいからである。
ゆえに、B''C''：B'B　$=1:\sqrt{3}$
同様に、C''A''：C'C＝A''B''：A'A　$=1:\sqrt{3}$
したがって(1)より、A''B''=B''C''=C''A''である。ゆえに、△A''B''C''は正三角形である。（終）



【ナポレオンの外三角形と ナポレオンの内三角形の2つの正三角形の面積の差が、元の三角形の面積に等しいことの証明】

ナポレオンの外三角形の一辺の長さを計算し、面積を求める。
上の証明の図において、△AC"B"に着目して B"C"の長さを求めると、∠C"AB"=□ A+60°であるから、
余弦定理により

$$B''C''^2=\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2-2\frac{c}{\sqrt{3}}\frac{b}{\sqrt{3}}\cos(A+60°)$$
$$=\frac{c^2}{3}+\frac{b^2}{3}-\frac{2}{3}bc\cos(A+60°)$$
$$=\frac{b^2+c^2}{3}-\frac{2}{3}bc(\cos A\cos 60°-\sin A\sin 60°)$$
$$=\frac{b^2+c^2}{3}-\frac{1}{3}bc(\cos A-\sqrt{3}\sin A)$$

したがって、元の三角形の面積を T 、ナポレオンの外三角形の面積を S_1 とすると

$$S_1=\frac{1}{2}B''C''^2\sin 60°$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{b^2+c^2}{3}-\frac{1}{3}bc(\cos A-\sqrt{3}\sin A)\right\}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{b^2+c^2}{3}-\frac{1}{3}bc(\cos A-\sqrt{3}\sin A)\right\}$$

ここで、 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}}{2bc}$$
$$=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc}=\frac{4T}{2bc}=\frac{2T}{bc}$$ であるので、代入して

$$S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{b^2+c^2}{3}-\frac{1}{3}bc\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\sqrt{3}\cdot\frac{2T}{bc}\right)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{b^2+c^2}{3}-\frac{b^2+c^2-a^2}{6}+\frac{2T}{\sqrt{3}bc}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6}+\frac{2T}{\sqrt{3}bc}\right)=\frac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2)+\frac{T}{2}$$

次に、ナポレオンの内三角形の一辺の長さを計算し、面積を求める。
上の証明の図において、△AC"B"に着目して B"C"の長さを求めると、∠C"AB"=□ A－60°であるから、
ナポレオンの外三角形の面積を S_2 とすると同様にして、

$$S_2=\frac{\sqrt{3}}{24}(a^2+b^2+c^2)-\frac{T}{2}$$

したがって、 $S_1-S_2=\dfrac{T}{2}+\dfrac{T}{2}=T$ となるので、成り立つ。(終)

(別証)ナポレオンの外三角形が正三角形になることを、複素数を用いて証明する。

$A(a), B(b), C(c), A''(p), B''(q), C''(r)$ とすると、

$p=\frac{b+c}{2}+\frac{b-c}{2\sqrt{3}}i,\quad q=\frac{c+a}{2}+\frac{c-a}{2\sqrt{3}}i,\quad r=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2\sqrt{3}}i$ となる。なぜなら

$$p-b=\left(\frac{b+c}{2}-b\right)\times\frac{2}{\sqrt{3}}\{\cos(-30°)+i\sin(-30°)\}$$

$$=\frac{c-b}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{c-b}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{c-b}{2}-\frac{c-b}{2\sqrt{3}}i$$ 他も同様(サイクリック)。

よって、 $p-q=\frac{b+c}{2}-\frac{c+a}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}(b-c-c+a)i=\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}(a+b-2c)i$

ゆえに、 $|p-q|^2=\left|\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}(a+b-2c)i\right|^2$

$$=\left\{\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}(a+b-2c)i\right\}\left\{\overline{\frac{b-a}{2}+\frac{i}{2\sqrt{3}}(a+b-2c)}\right\}$$

$$=\left\{\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}(a+b-2c)i\right\}\left\{\frac{\bar{b}-\bar{a}}{2}-\frac{i}{2\sqrt{3}}(\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c})\right\}$$

$$=\frac{b-a}{2}\cdot\frac{\bar{b}-\bar{a}}{2}+\frac{1}{12}(a+b-2c)(\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c})+\frac{i}{4\sqrt{3}}(a+b-2c)(\bar{b}-\bar{a})-\frac{i}{4\sqrt{3}}(b-a)(\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c})$$

$$=\frac{1}{4}\left(|b|^2-b\bar{a}-a\bar{b}+|a|^2\right)+\frac{1}{12}\left(|a|^2+a\bar{b}-2a\bar{c}+\bar{a}b+|b|^2-2b\bar{c}-2\bar{a}c-2\bar{b}c+4|c|^2\right)$$

$$+\frac{i}{4\sqrt{3}}(a\bar{b}-|a|^2+|b|^2-\bar{a}b-2\bar{b}c+2\bar{a}c)-\frac{i}{4\sqrt{3}}(\bar{a}b+|b|^2-2b\bar{c}-|a|^2-a\bar{b}+2a\bar{c})$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)\left(|a|^2+|b|^2\right)+\frac{4}{12}|c|^2+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)(\bar{a}b+a\bar{b})-\frac{1}{6}(\bar{b}c+b\bar{c})-\frac{1}{6}(c\bar{a}+\bar{c}a)$$

$$+\frac{i}{4\sqrt{3}}(a\bar{b}-\bar{a}b-2\bar{b}c+2c\bar{a}-\bar{a}b+2b\bar{c}+a\bar{b}-2\bar{c}a)$$

$$=\frac{1}{3}(|a|^2+|b|^2+|c|^2)-\frac{1}{6}(\bar{a}b+a\bar{b}+\bar{b}c+b\bar{c}+\bar{c}a+c\bar{a})+\frac{i}{4\sqrt{3}}(2a\bar{b}-2\bar{a}b-2\bar{b}c+2b\bar{c}+2c\bar{a}-2\bar{c}a)$$

$$=\frac{1}{3}(|a|^2+|b|^2+|c|^2)-\frac{1}{6}(\bar{a}b+a\bar{b}+\bar{b}c+b\bar{c}+\bar{c}a+c\bar{a})-\frac{i}{2\sqrt{3}}(\bar{a}b-a\bar{b}+\bar{b}c-b\bar{c}+\bar{c}a-c\bar{a})$$

$$=\frac{1}{3}(|a|^2+|b|^2+|c|^2)-\frac{1}{6}\left\{(\bar{a}b+\overline{\bar{a}b})+(\bar{b}c+\overline{\bar{b}c})+(\bar{c}a+\overline{\bar{c}a})\right\}-\frac{i}{2\sqrt{3}}\left\{(\bar{a}b-\overline{\bar{a}b})+(\bar{b}c-\overline{\bar{b}c})+(\bar{c}a-\overline{\bar{c}a})\right\}$$

$$=\frac{1}{3}(|a|^2+|b|^2+|c|^2)-\frac{1}{3}\mathfrak{R}(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a)-\frac{2}{2\sqrt{3}}\mathfrak{R}\{-i(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a)\}$$

$$=\frac{1}{3}(|a|^2+|b|^2+|c|^2)-\frac{1}{3}\mathfrak{R}(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a)-\frac{\sqrt{3}}{3}\mathfrak{R}\{-i(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a)\}$$

$$=\frac{1}{3}(|a|^2+|b|^2+|c|^2)-\frac{1}{3}\mathfrak{R}\left\{(1+\sqrt{3}i)(\bar{a}b+\bar{b}c+\bar{c}a)\right\}=|q-r|^2=|r-p|^2$$

ゆえに、△A"B"C"は正三角形である。
ナポレオンの内三角形が正三角形になることについても、上の計算式において i を $-i$ に変えるだけであるので、同様にして正三角形である。(終)