ニュートン線

定理

四角形ABCDの対辺AB, CDの延長の交点をE、AD, BCの延長の交点をFとすれば、線分AC,BD,EFの中点は共線である。（この直線をニュートン線という）

（証明）

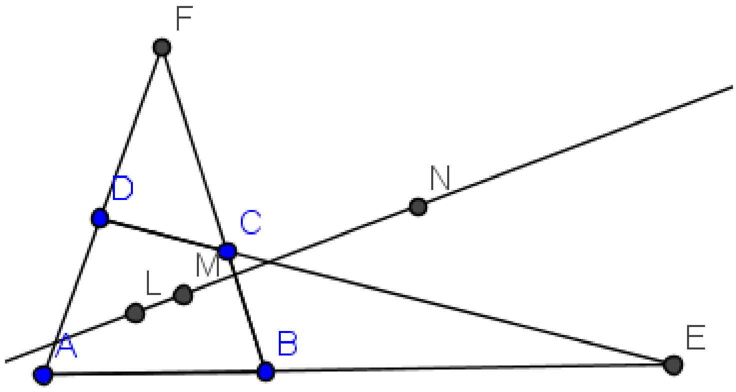
ベクトルで証明する。

Aを基準とする位置ベクトルを考える。

$B(\vec{b}), D(\vec{d}), C(p\vec{b}+q\vec{d})$

とする。

$L\left(\frac{1}{2}\vec{c}\right)$ ， $M\left(\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}\right)$



Fの位置ベクトルを求める。

$\overrightarrow{AF}=t\vec{d}=\vec{b}+s\overrightarrow{BC}$ 　より

$(1-s+sp)\vec{b}+(sq-t)\vec{d}=\vec{0}$

これより　$1-s+sp=0$　かつ　$sq-t=0$

これを解くと　$s=\frac{1}{1-p}, t=\frac{q}{1-p}$　ゆえに　$\overrightarrow{AF}=\frac{q}{1-p}\vec{d}$　同様にして　$\overrightarrow{AE}=\frac{p}{1-q}\vec{b}$　となる。

よって　$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{1-q}\vec{b}+\frac{q}{1-p}\vec{d}\right)=\frac{p(1-p)\vec{b}+q(1-q)\vec{d}}{2(1-p)(1-q)}$

これから　$\overrightarrow{LN}=\frac{p(1-p)\vec{b}+q(1-q)\vec{d}}{2(1-p)(1-q)}-\frac{1}{2}(p\vec{b}+q\vec{d})=\frac{pq}{2(1-p)(1-q)}\{(1-p)\vec{b}+(1-q)\vec{d}\}$

一方、　$\overrightarrow{LM}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\frac{1}{2}(p\vec{b}+q\vec{d})=\frac{1}{2}\{(1-p)\vec{b}+(1-q)\vec{d}\}$

したがって　$\overrightarrow{LN}=\frac{pq}{(1-p)(1-q)}\overrightarrow{LM}$　となるので、L,M,Nは同一直線上にある。（終）

（参考文献）

複素数と幾何学　梅沢敏夫・後藤達生