# パスカルの定理

定理（パスカル）
円に内接する六角形 ABCDEF において AB と ED, BC と FE, CD と AF の延長の交点をそれぞれ G,H,I とする。このとき G,H,I は一直線上にある。

（証明）直線 AB と直線 EF の交点を L、直線 AB と直線 DC の交点を M、直線 CD と直線 FE の交点を N とする。⊿LNM に直線 BC, DE, FA が交わっているので、これにメネラウスの定理を用いる。

⊿LNM と直線 BC について

$$\frac{LB}{BM}\cdot\frac{MC}{CN}\cdot\frac{NH}{HL}=1$$

⊿LNM と直線 DE について

$$\frac{LG}{GM}\cdot\frac{MD}{DN}\cdot\frac{NE}{EL}=1$$

⊿LNM と直線 FA について

$$\frac{LA}{AM}\cdot\frac{MI}{IN}\cdot\frac{NF}{FL}=1$$

辺々を掛けて

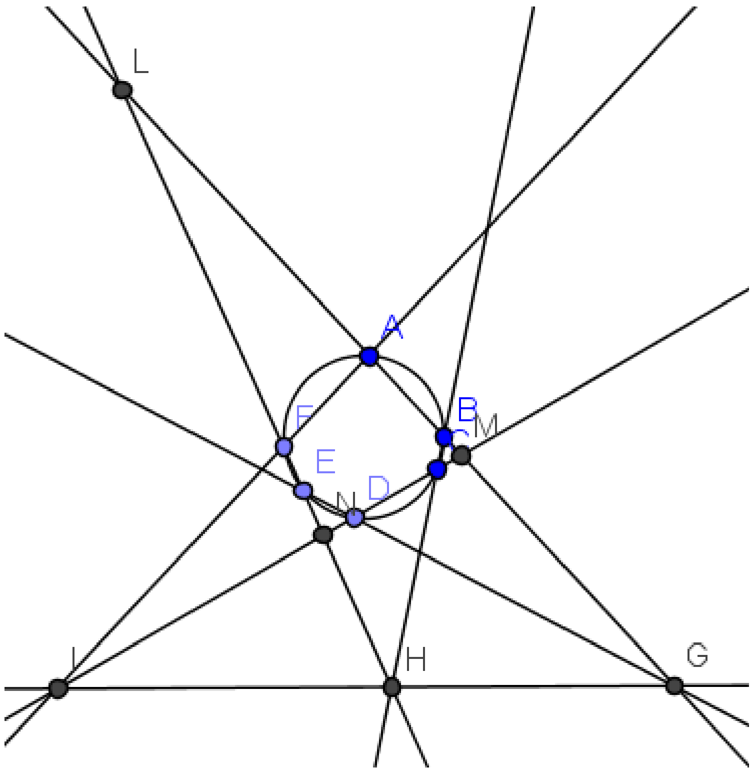
$$\frac{LB}{BM}\cdot\frac{MC}{CN}\cdot\frac{NH}{HL}\cdot\frac{LG}{GM}\cdot\frac{MD}{DN}\cdot\frac{NE}{EL}\cdot\frac{LA}{AM}\cdot\frac{MI}{IN}\cdot\frac{NF}{FL}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

ここで方べきの定理から

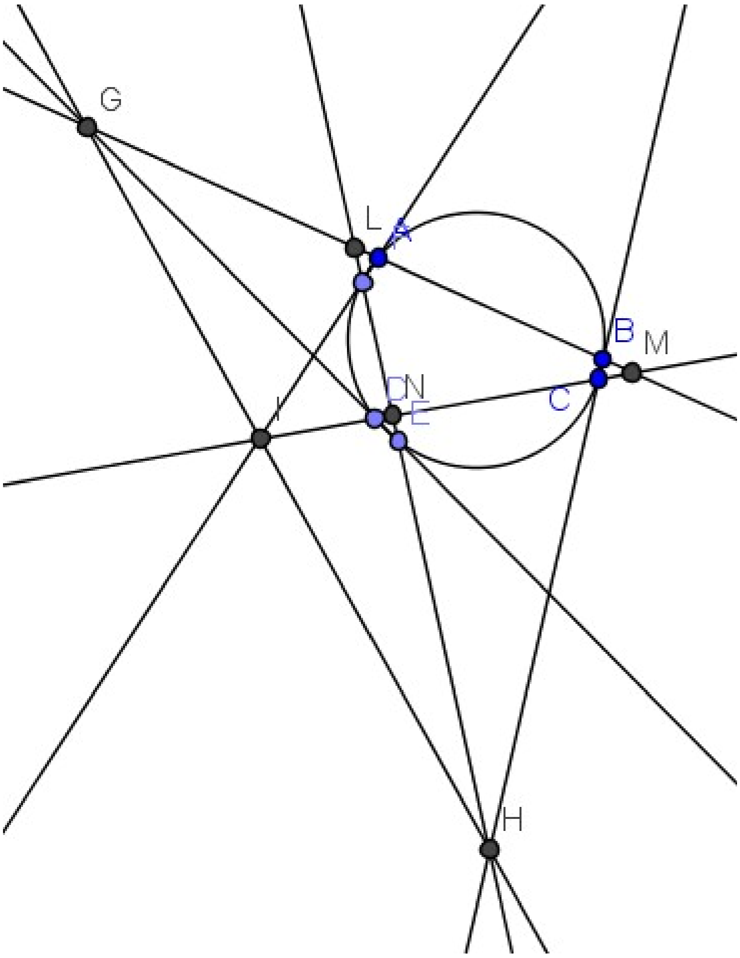
$LA\cdot LB=LE\cdot LF$　かつ　$MA\cdot MB=MC\cdot MD$　かつ　$NC\cdot ND=NE\cdot NF$　が成り立つ。

したがってこれを①に代入すると

$\frac{LG}{GM}\cdot\frac{MI}{IN}\cdot\frac{NH}{HL}=1$　となるので、メネラウスの定理の逆により、G,H,I は一直線上にある。（終）



ここで六角形を三角形につぶしていくことで、次の定理が導かれる。



定理
⊿ABCの各頂点を通り、その外接円に接線を引くと、これらの接線が対辺の延長と交わる3点は共点である。

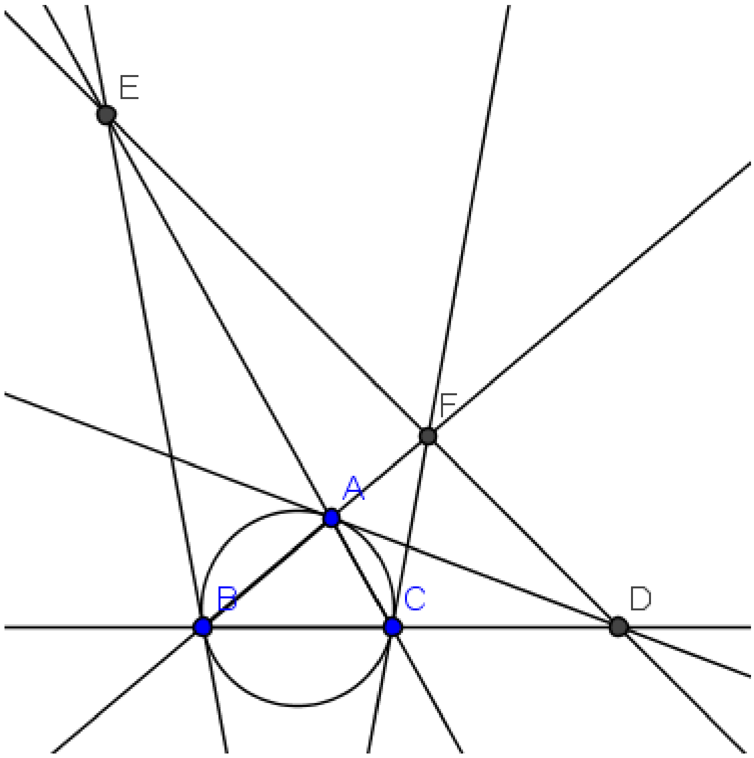
(証明) A,B,C における接線が対辺と交わる点を D,F E とする。

$\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{\triangle ABD}{\triangle ACD}$ であるが、⊿BAD ∽ ⊿ACD であるから $\dfrac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$

合わせて $\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}$ となる。・・・・・①

同様にして $\dfrac{EC}{EA}=\dfrac{BC^2}{AB^2}$ ・・・・・② , $\dfrac{FA}{FB}=\dfrac{AC^2}{BC^2}$ ・・・・・・③が成り立つ。

①②③より $\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}\cdot\dfrac{AF}{FB}=1$ であるから、D,E,F は一直線上にある。(終)




(参考文献)
[1] 複素数と幾何学　　梅沢敏夫・後藤達生