さくらん順列（完全順列）になる確率

ｎ枚のカードを並べ替えるとき、ｎ枚が元の位置にない並べ方を「ｎ枚のさくらん順列（完全順列)」という。ただし$n \geq 2$とする。

ｎ枚のさくらん順列の総数をD_nとすると、次の漸化式が成り立つ。 $D_n = (n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$　　（$n \geq 2$）

（証）ｎ枚のカードに番号を 1, 2, ・・・, n とつけ、それらを並べ替えた先の場所にも番号を 1, 2, ・・・, n とつける。

$f(1)=a$　（ただし a≠1）とする。

$a=2$のときを考える。次の２つの場合がある。

（１）$f(2)=1$　　（２）$f(2) \neq 1$

（１）のときは 3, 4, ・・・, n のさくらん順列の総数だけあるので、D_{n-2}通りある。

（２）のときは 2, 3, 4, ・・・, n はすべて自分の番号以外のところへ移るので

D_{n-1}通りある。

よって合わせて、$D_{n-1}+D_{n-2}$通りである。

$a=3,4,\cdots,n$の場合も考えて全部で$D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$である。（終）

この漸化式を解く。両辺を$n!$で割って

$$\frac{D_n}{n!}=\frac{n-1}{n!}(D_{n-2}+D_{n-1})$$

$$=\frac{n-1}{n!}D_{n-2}+\frac{n-1}{n!}D_{n-1}$$

$$=\frac{n-1}{n(n-1)\cdot(n-2)!}D_{n-2}+\frac{n-1}{n\cdot(n-1)!}D_{n-1}$$

ここで$a_n=\dfrac{D_n}{n!}$　とおくと

$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)a_{n-1}$$

$$=\frac{1}{n}a_{n-2}+a_{n-1}-\frac{1}{n}a_{n-1}$$

したがって、$a_n-a_{n-1}=\dfrac{1}{n}a_{n-2}-\dfrac{1}{n}a_{n-1}=-\dfrac{1}{n}(a_{n-1}-a_{n-2})$

ここで$a_n-a_{n-1}=b_{n-1}$（$n \geq 2$）とおくと

$$b_{n-1} = -\frac{1}{n} b_{n-2}$$
$$= \left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right) b_{n-3}$$
$$= \left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{3}\right) b_1$$

ここで$b_1 = a_2 - a_1 = \frac{D_2}{2!} - \frac{D_1}{1!} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

ゆえに$b_{n-1} = \left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n-1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{1}\right) = (-1)^n \frac{1}{n!}$

よって$n \geq 2$のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!} = a_1 + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

ここで$a_1 = 0$なので、$a_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$

したがって、$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$　である。これは$n=1$のときも成り立つ。

次に n 文字の順列を 1 つ無作為に作ったとき、それがさくらん順列になる確率を考える。
これは上から用意に計算できて

$p_n = \frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$　となる。

枚数 n を無限大にすれば、これは$e^{-1} = \frac{1}{e}$となる。

すなわち、枚数が非常に多い場合はさくらん順列になる確率は$\frac{1}{e}$であるということで、このようなところに自然対数の底が現れるのは非常に興味深い。
n が小さいときの確率を表にしておく。

n				1
1	-1	1	-1.0000000000	0.00000
2	1	2	0.5000000000	0.50000
3	-1	6	-0.1666666667	0.33333
4	1	24	0.0416666667	0.37500
5	-1	120	-0.0083333333	0.36667
6	1	720	0.0013888889	0.36806
7	-1	5040	-0.0001984127	0.36786
8	1	40320	0.0000248016	0.36788
9	-1	362880	-0.0000027557	0.36788

エクセルの実験シートも作成した。この表の値と比較することができる。

参考文献

[1] 数学ひとり旅　　石谷　茂