三角関数の恒等式と三角形の面積公式との関係

以下、A,B,C は⊿ABC の内角を表すとする。よって　$A+B+C=\pi$　。また　$a=BC\,,b=CA\,,c=AB$　とする。

扱う恒等式は以下である。

① $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

② $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$

③ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

④ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

これらを三角形の面積と関連づけて説明する。

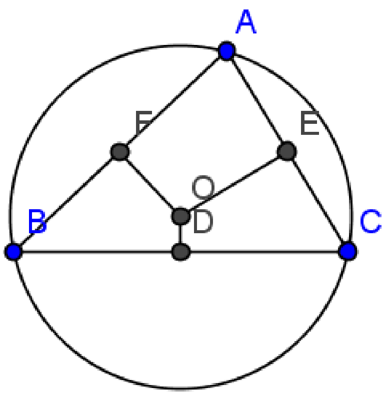
① $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$　について

これは簡単で、よく知られている三角形の面積公式　$S=\frac{R^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$　と

$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$　を連立すれば、　$\frac{R^2}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=2R^2\sin A\sin B\sin C$

この両辺を　$\frac{R^2}{2}$　で割ることで①を得る。（終）

② $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$　について



⊿ABC の外心 O が三角形の周上または内部にある場合を考え、
図のように O から BC, CA, AB に垂線 OD,OE,OF を下ろし、
その垂線の長さをそれぞれ　h_a, h_b, h_c　とすれば三角形の面積 S は

$S=\frac{1}{2}(a h_a+b h_b+c h_c)$　と表されるが、∠BOD=∠A　より、

⊿OBD に着目して　$h_a=R\cos A$　であり、同様に　$h_b=R\cos B$

$h_c=R\cos C$　となるから代入すると

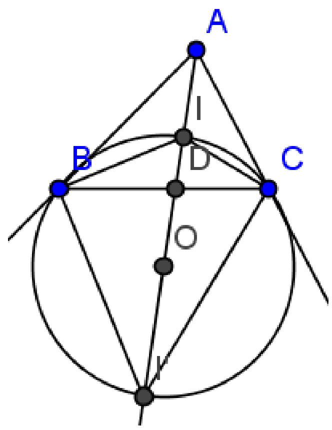
$S=\frac{1}{2}R(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$　となる。

これと　$S=2R^2\sin A\sin B\sin C$　より

$\frac{1}{2}R(a\cos A+b\cos B+c\cos C)=2R^2\sin A\sin B\sin C$

これを整理して②を得る。O が三角形の外部にある場合は垂線の長さをその向きに応じて正負の長さをもつものとし、また面積もそれに応じて符号付き面積を考えることで同じように説明することができる。（終）

③ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$　について



図において⊿ABC の内心を I、傍心を I'とする。

③は三角形の面積公式　$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{abc}{4R}$　・・・（ア）

と関係があると考えられる。（ただし R は⊿ABC の外接円の半径）

(ア)の左辺を次のように変形する。

(アの左辺)= $\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=\dfrac{1}{2}r(2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C)=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$

一方、右辺は図の⊿IBC とその外接円(半径は R_a とする)に着目して

正弦定理より $a=BC=2R_a\sin\left(\pi-\dfrac{B}{2}-\dfrac{C}{2}\right)=2R_a\cos\dfrac{A}{2}$ である。

同様にして⊿ICA, □ IAC の外接円の半径をそれぞれ R_b, R_c と定めれば

$b=2R_b\cos\dfrac{B}{2}$, $c=2R_c\cos\dfrac{C}{2}$ となるので、これらを(ア)の右辺に代入して

(アの右辺)= $\dfrac{abc}{4R}=\dfrac{1}{4R}2R_a\cos\dfrac{A}{2}\cdot 2R_b\cos\dfrac{B}{2}\cdot 2R_c\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{2R_aR_bR_c}{R}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ となる。

以上より、等式(ア)は $Rr(\sin A+\sin B+\sin C)=\dfrac{2R_aR_bR_c}{R}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ ・・・(イ)となる。

ここで⊿IBC の外接円は線分 AD を AB : BD に分けるアポロニウスの円であることに着目すれば、さらに次のように計算できる。

アポロニウスの円の半径の公式より、 $R_a=\dfrac{AB\cdot BD\cdot DA}{\left|AB^2-BD^2\right|}$ である。

これに $AB=c$, $BD=\dfrac{ac}{b+c}$ と、角の二等分線の公式より得られる

$DA=\sqrt{AB\cdot AC-BD\cdot CD}=\sqrt{bc-\dfrac{ac}{b+c}\cdot\dfrac{ab}{b+c}}=\dfrac{\sqrt{bc}\sqrt{a+b+c}\sqrt{b+c-a}}{b+c}$ を代入して計算すると

$R_a=\dfrac{a\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}=\dfrac{a\sqrt{bc}}{2\sqrt{s(s-a)}}$ を得る。(ただし $s=\dfrac{a+b+c}{2}$)

同様に $R_b=\dfrac{\sqrt{a}b\sqrt{c}}{2\sqrt{s(s-b)}}, R_c=\dfrac{\sqrt{ab}c}{2\sqrt{s(s-c)}}$ を得るので、これらを(イ)に代入すると

(イの右辺)=

$\dfrac{2R_aR_bR_c}{R}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{2}{R}\cdot\dfrac{a\sqrt{bc}}{2\sqrt{s(s-a)}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}b\sqrt{c}}{2\sqrt{s(s-b)}}\cdot\dfrac{\sqrt{ab}c}{2\sqrt{s(s-c)}}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$=\dfrac{a^2b^2c^2}{4Rs\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{a^2b^2c^2}{4RSs}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

さらに $S=\dfrac{abc}{4R}$, $r=\dfrac{S}{s}$ を使うと

(イの右辺)= $\dfrac{abc}{s}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=4Rr\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ となるので、(イ)は

$Rr(\sin A+\sin B+\sin C)=4Rr\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ となる。この両辺を Rr で割れば③を得る。

(副産物として $R_aR_bR_c=2R^2r$ も得られた。)(終)

④ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ について

⊿ABC の面積 S を S=□ ABH+□ BCH+□ ACH

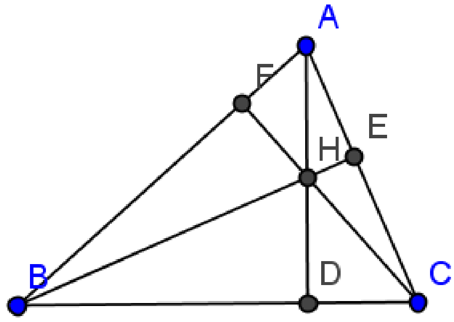
と分解して求める。

垂心を H とする。

⊿BDH□ □ BEC より、 $DH=\dfrac{c\cos B\cos C}{\sin C}=\dfrac{c\cos B}{\tan C}$

であるから、

⊿BCH= $\dfrac{1}{2}aDH=\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{c\cos B}{\tan C}=\dfrac{1}{2}ca\cdot\dfrac{\cos B}{\tan C}$



同様にして⊿CAH= $\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\cos C}{\tan A}$ ，

⊿ABH= $\frac{1}{2}bc\cdot\frac{\cos A}{\tan B}$ となるので

$$\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\cos C}{\tan A}+\frac{1}{2}bc\cdot\frac{\cos A}{\tan B}+\frac{1}{2}ca\cdot\frac{\cos B}{\tan C}=S$$

ここで、 $\frac{1}{2}ab\sin C=S$ より $\frac{1}{2}ab=\frac{S}{\sin C}$ 同様に $\frac{1}{2}bc=\frac{S}{\sin A}$ ， $\frac{1}{2}ca=\frac{S}{\sin B}$ であるから

代入して

$\frac{S}{\tan C\tan A}+\frac{S}{\tan A\tan B}+\frac{S}{\tan B\tan C}=S$ この両辺に $\frac{\tan A\tan B\tan C}{S}$ を掛けて

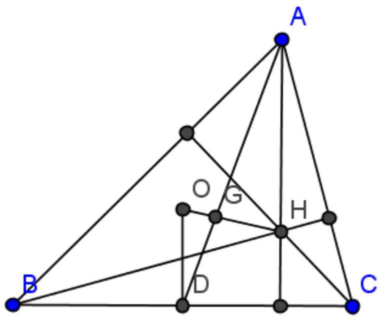
$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ を得る。(終)

(別法)

BC の中点を D、外心を O、重心を G、垂心を H とする。

$OG:GH=1:2$ という事実の証明でよく知られていることであるが、 $AH=2\,OD$ である。したがって②の証明中の記号を使えば、 $AH=2\,h_a$ となる。同様に

$BH=2\,h_b, CH=2\,h_c$ である。



したがって、

S=□ ABH+□ BCH+□ ACH

$$=\frac{1}{2}c\cdot 2\,h_a\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+\frac{1}{2}a\cdot 2\,h_b\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)+\frac{1}{2}b\cdot 2\,h_c\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$$

$= \; c\,h_a\cos B+a\,h_b\cos C+b\,h_c\cos A$

$h_a=R\cos A$ ， $h_b=R\cos B$ ， $h_c=R\cos C$ を代入すると

$S=R(c\cos A\cos B+a\cos B\cos C\,b\cos C\cos A)$

これと三角形の公式 $S=\frac{abc}{4R}$ と連立すると

$R(c\cos A\cos B+a\cos B\cos C\,b\cos C\cos A)=\frac{abc}{4R}$ を得る。

両辺を R で割って、 $c\cos A\cos B+a\cos B\cos C\,b\cos C\cos A=\frac{abc}{4R^2}$

さらに両辺を積 abc で割れば、

$$\frac{\cos A\cos B}{ab}+\frac{\cos B\cos C}{bc}+\frac{\cos C\cos A}{ca}=\frac{1}{4R^2}$$

ここで正弦定理 $a=2R\sin A$ などから

$$\frac{\cos A\cos B}{4R^2\sin A\sin B}+\frac{\cos B\cos C}{4R^2\sin B\sin C}+\frac{\cos C\cos A}{4R^2\sin C\sin A}=\frac{1}{4R^2}$$

両辺に $4R^2$ を掛けて

$$\frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}+\frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C}+\frac{\cos C\cos A}{\sin C\sin A}=1$$

よって $\frac{1}{\tan A\tan B}+\frac{1}{\tan B\tan C}+\frac{1}{\tan C\tan A}=1$

両辺に $\tan A\tan B\tan C$ を掛けて、 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ を得る。(終)