$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos n\theta \qquad \sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta$ の値について

（ド・モアブルの定理の応用）

（公式）

(1) $$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos n\theta=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

(2) $$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

（証明）

次の和Ｓを考える。

$$S=e^{i\theta}+e^{i2\theta}+e^{i3\theta}+\cdots+e^{in\theta}$$

等比数列の和の公式より、

$$S=\frac{e^{i\theta}\left(1-e^{in\theta}\right)}{1-e^{i\theta}}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\{1-(\cos n\theta+i\sin n\theta)\}}{1-(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\{(1-\cos n\theta)-i\sin n\theta\}}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}$$

$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\{(1-\cos n\theta)-i\sin n\theta\}\{(1-\cos\theta)+i\sin\theta\}}{\{(1-\cos\theta)-i\sin\theta\}\{(1-\cos\theta)+i\sin\theta\}}$$

ここで、分母は　$(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=2-2\cos\theta$

分子は　$(\cos\theta+i\sin\theta)\{(1-\cos\theta)+i\sin\theta\}\{(1-\cos n\theta)-i\sin n\theta\}$

$=\{(\cos\theta-1)+i\sin\theta\}\{(1-\cos n\theta)-i\sin n\theta\}$　なので

分子の実部は、加法定理を用いて

$$(\cos\theta-1)(1-\cos n\theta)+\sin\theta\sin n\theta \;=\; (\cos\theta-1+\cos n\theta)-\cos(n+1)\theta$$

また、分子の虚部は

$$(\cos\theta-1)\sin n\theta+\sin\theta(1-\cos n\theta) \;=\; \sin n\theta+\sin\theta-\sin(n+1)\theta$$ となる。

したがって、

$$\Re(S)=\frac{(\cos\theta-1+\cos n\theta)-\cos(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$=-\frac{1-\cos\theta+\cos(n+1)\theta-\cos n\theta}{2(1-\cos\theta)}=-\frac{(1-\cos\theta)-2\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2(1-\cos\theta)}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{(1-\cos\theta)}=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

となるので、

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos n\theta=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$ となる。(ラグランジュの恒等式)

これをさらに次のように変形することもできる。

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos n\theta=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$ となる。

同様にして、虚部を考えれば

$$\Im(S)=\frac{\sin n\theta+\sin\theta-\sin(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin\theta+\sin n\theta-\sin(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta-2\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2(1-\cos\theta)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-2\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

となる。(証明終)

(別証)

上の変形以外に、ド・モアブルの定理をフルに使った次の変形もある。

$$S=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\{(1-\cos n\theta)-i\sin n\theta\}}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}$$ において

$$(1-\cos\theta)-i\sin\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}-i\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=-2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(1-\cos n\theta)-i\sin n\theta=-2i\sin\frac{n\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$ であるから

$$S=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\{(1-\cos n\theta)-i\sin n\theta\}}{(1-\cos\theta)-i\sin\theta}$$

$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)\left\{-2i\sin\frac{n\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)\right\}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot\left\{\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right\}\cdot\left\{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\left\{\cos\left(\theta + \frac{n\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{n\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right\}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\left\{\cos\frac{(n+1)\theta}{2} + i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\right\}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{e^{\frac{i\cdot(n+1)\theta}{2}}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

この実部は

$$\Re(S) = \frac{\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

虚部は

$$\Im(S) = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$ となる。