

## シムソン線

定理

$\triangle ABC$  の外接円の円周上の点  $P$  から直線  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  に下ろした垂線の足をそれぞれ  $D$ ,  $E$ ,  $F$  とすれば、これらは同一直線上にある。この直線をシムソン線という。

$\angle PBC = \alpha$ ,  $\angle PCB = \beta$ ,  $\angle ABC = \gamma$  とする。

$BC \perp PD$  より、 $BD = PB \cos \alpha$ ,  $DC = PC \cos \beta$

$CA \perp PE$  より、 $CE = PC \cos(\alpha + \gamma)$  (なぜなら  $\angle ABP = \angle PCE = \alpha + \gamma$ ),  $EA = PA \cos \alpha$

$PF \perp AB$  より、 $AF = PA \cos \beta$ ,  $FB = PB \cos(\alpha + \gamma)$  (なぜなら  $\angle ABP = \alpha + \gamma$ )

以上より

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{PB \cos \alpha}{PC \cos \beta} \cdot \frac{PC \cos(\alpha + \gamma)}{PA \cos \alpha} \cdot \frac{PA \cos \beta}{PB \cos(\alpha + \gamma)} = 1$$

よって  $\triangle ABC$  に対するメネラウスの定理の逆より、 $D, E, F$  は一直線上にある。(終)

