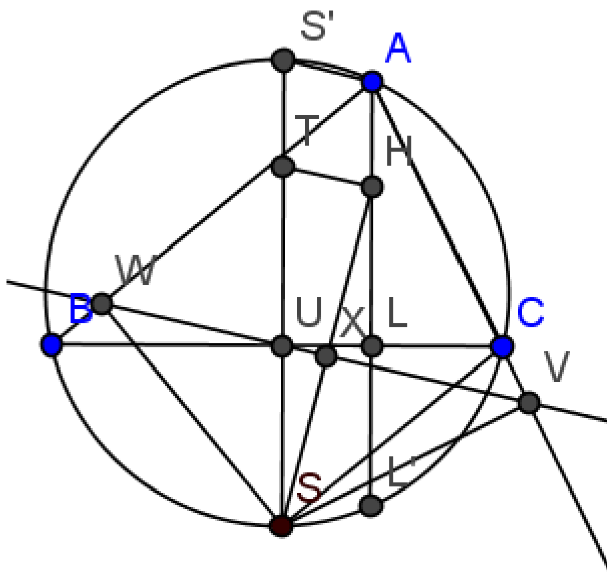
シムソン線と9点円の関係

定理1
⊿ABC の垂心を H とし、外接円周上の点を S とすると、線分 HS の中点 X は
(1) 点 S に関するシムソン線上にある。
(2) 9点円上にある。

（証明）A から BC へ下ろした垂線の足を L、AL の延長と外接円との交点を L'とする。
9点円と外接円は H を相似の中心とし、相似比は $1:2$ である。・・・・・（☆ 9点円を参照）
よって、 $HL=LL'$ である。・・・・・①
また、S から BC, CA へ下ろした垂線の足を U, V とし、SU の延長と外接円との交点を S'とすると
$\angle SUV=\angle SCV$ ・・・・・②
また4点 S, C, A, S'は同一円周上にあるので、 $\angle SCV=\angle SS'A$ ・・・・・③
よって②③より $\angle SUV=\angle SS'A$ したがって同位角が等しいので $UV\|S'A$ である・・・・・④

H を通り、S'A に平行な直線と SS'との交点を T とすると、 $S'A\|TH$
また $SS'\|AL'$ であったから四角形 AS'TH は平行四辺形である。・・・・・⑤
また四角形 AS'SL は等脚台形である。・・・・・⑥
⑤⑥より四角形 HTSL'は等脚台形である。
①より L は HL'の中点なので、U は TS の中点である。

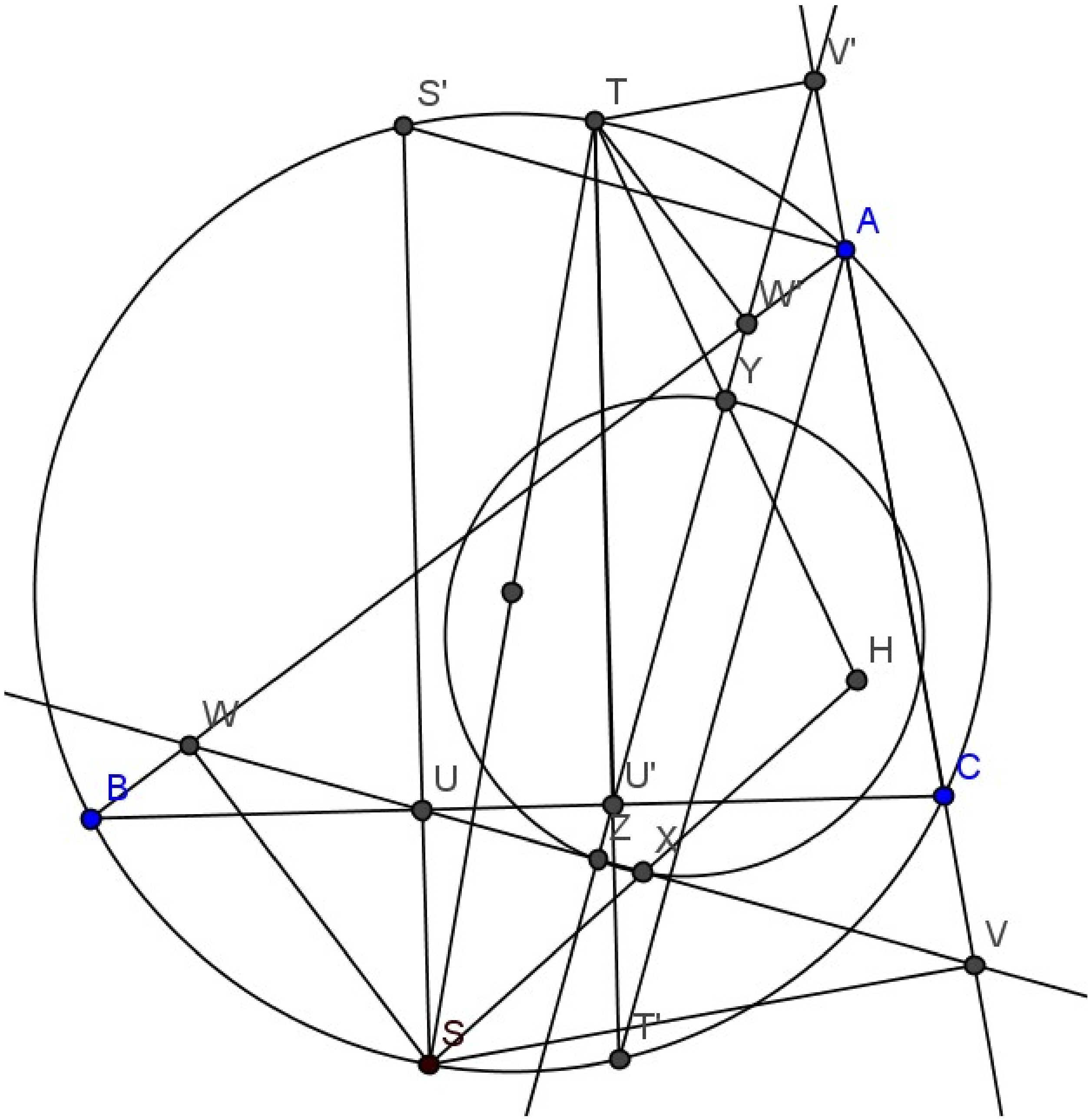
U から S'A に平行、すなわち TH に平行な戦と SH との交点を X とすると、X は SH の中点である（☆）が、
これは明らかにシムソン線上にある。よって(1)が示された。
また X は SH の中点であるから9点円上にもある。よって(2)が示された。（終）



定理2
⊿ABC の外接円の直径を ST とする。このとき
（1）S に関するシムソン線と T に関するシムソン線は直交する。よって、線分 HS の中点 X、線分 HT の中点 Y とすると、XY は 9 点円の直径となる。
（2）S に関するシムソン線と T に関するシムソン線の交点も 9 点円上にある。

（証明）S,T から BC へ下ろした垂線と外接円との交点をそれぞれ S',T'とする。定理1証明中の④により、
直線　$UVW \| AS'$　・・・・・⑦, 直線　$U'V'W' \| AT'$　・・・・・⑧ここで四角形 SS'TT'が長方形となる（平行四辺形かつ　$\angle SS'T = 90°$　より）ので　$\angle TT'S = 90°$　すなわち S'T'も外接円の直径となる。したかって
$\angle S'AT' = 90°$　（直径の円周角）・・・・・⑨
したがって⑦⑧⑨より　$UVW \perp U'V'W'$　である。

よって、2 つのシムソン線の交点を Z、線分 HS の中点を X、線分 HT の中点を Y とすると、
$\angle XZY = 90°$　となることがわかるので、Z は 9 点円上にあり、XY は9点円の直径となる。（終）



（参考文献）
数学の部屋　その十八　九点円の話　 http://www.highflyer2.com/math/nine