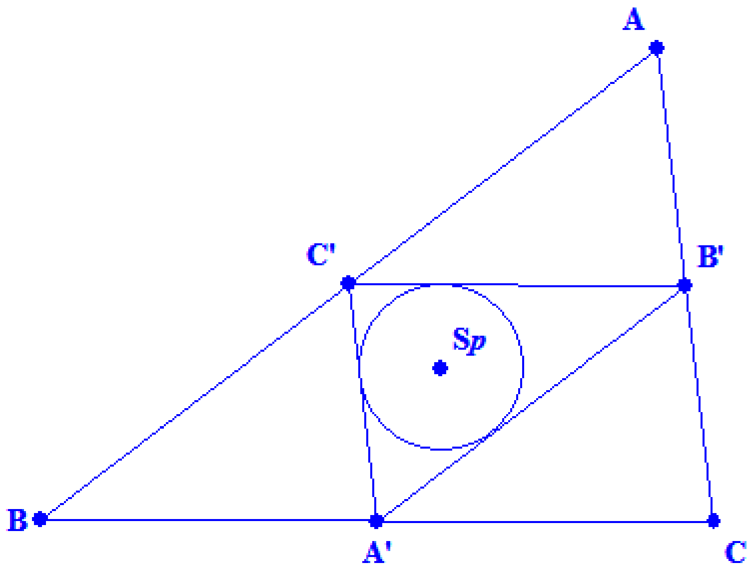
スピーカー点

⊿ABC の中点三角形の内接円をスピーカー(Spieker)円といい、スピーカー円の中心をスピーカー点という。
したがって、スピーカー点は中点三角形の内心である。



以下で、スピーカー点 Sp の重心座標を求める。そのため、内心の重心座標を利用する。

⊿ABC の内心を I とすると、 $\vec{OI}=\frac{a}{a+b+c}\vec{a}+\frac{b}{a+b+c}\vec{b}+\frac{c}{a+b+c}\vec{c}$ …①である。

中点三角形を⊿A'B'C'とすると、 $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, $\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

ゆえに、①において O を A、A を A',B を B',C を C'として適用すれば

$$\overrightarrow{ASp}=\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{a+b+c}\left\{\frac{a+c}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{a+b}{2}\overrightarrow{AC}\right\}$$

これより

$$\overrightarrow{OSp}=\vec{a}+\frac{a+c}{2(a+b+c)}\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+\frac{a+b}{2(a+b+c)}\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=\frac{b+c}{2(a+b+c)}\vec{a}+\frac{c+a}{2(a+b+c)}\vec{b}+\frac{a+b}{2(a+b+c)}\vec{c}$$

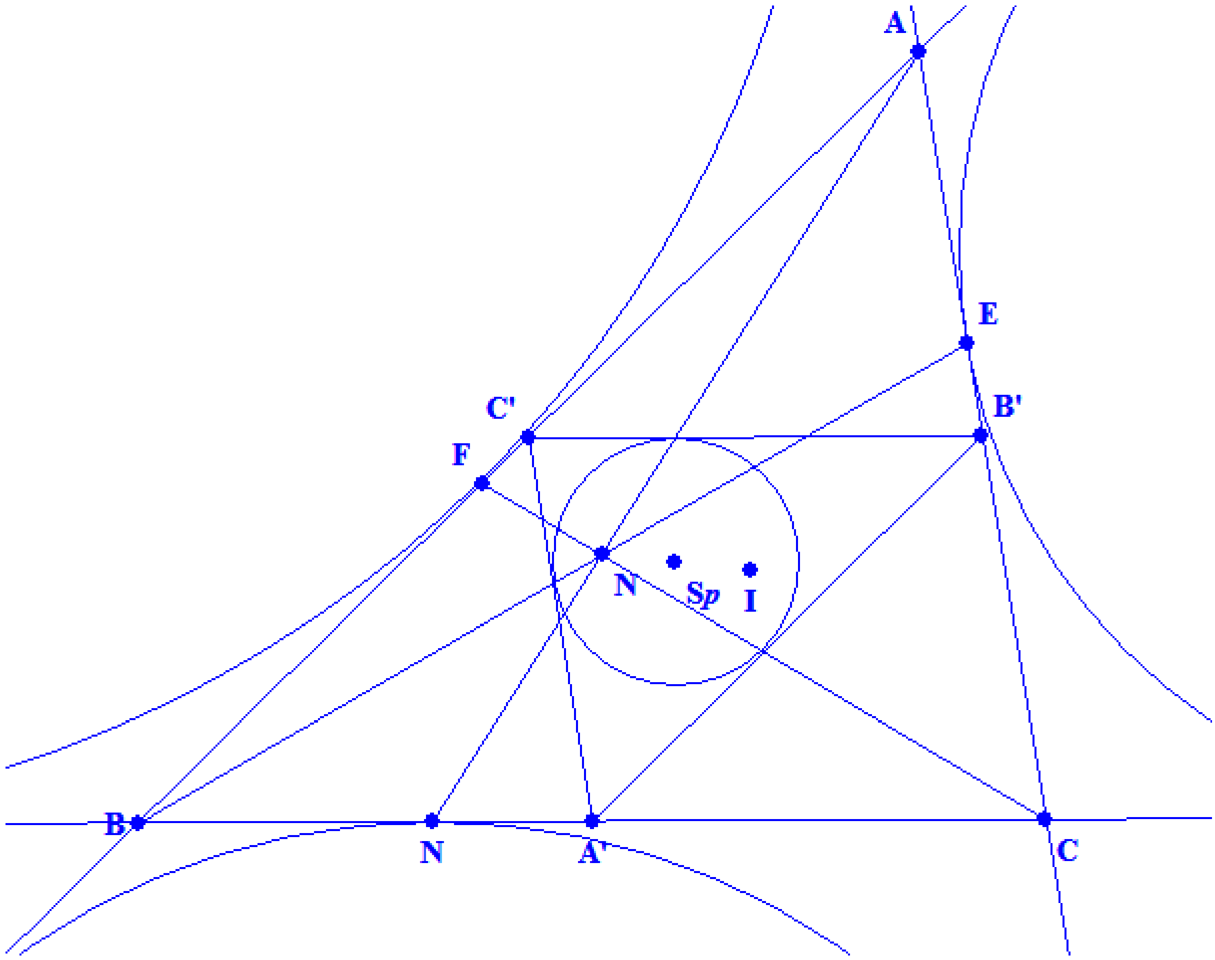
よって、絶対重心座標は $\left(\frac{b+c}{2(a+b+c)},\frac{c+a}{2(a+b+c)},\frac{a+b}{2(a+b+c)}\right)$ であり、

重心座標は $\left(b+c,c+a,a+b\right)$ となる。(終)

・スピーカー点の性質について

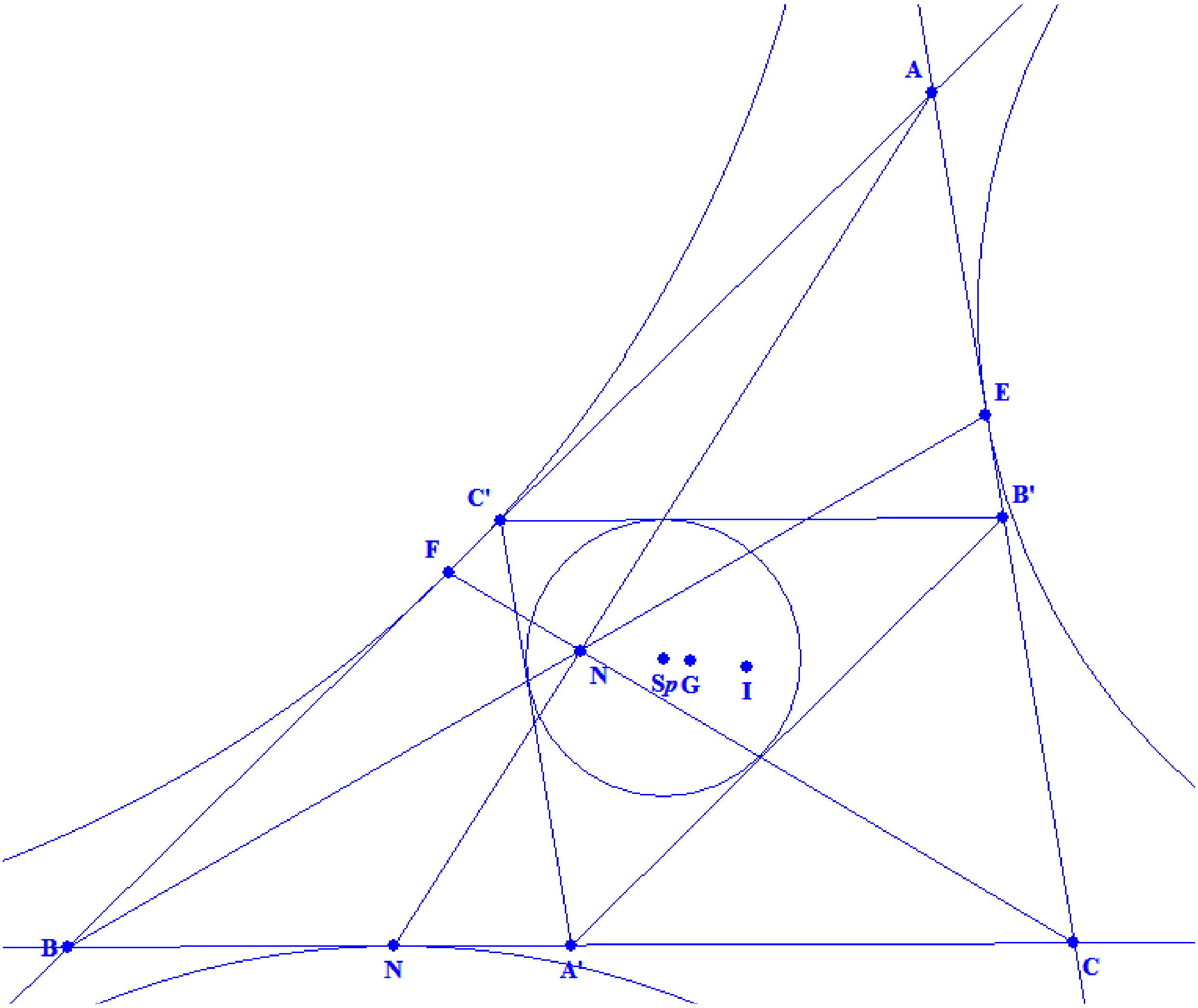
【定理】スピーカー点は内心 I とナーゲル点 Na の中点である。

(証明)絶対重心座標で考える。
内心の絶対重心座標は $\left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right)$
ナーゲル点の絶対重心座標は $\left(\frac{-a+b+c}{a+b+c},\frac{a-b+c}{a+b+c},\frac{a+b-c}{a+b+c}\right)$ である。
よって、内心とナーゲル点の中点の絶対重心座標は $\left(\frac{b+c}{2(a+b+c)},\frac{c+a}{2(a+b+c)},\frac{a+b}{2(a+b+c)}\right)$ となり、

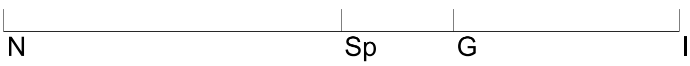


これはスピーカー点の絶対重心座標と一致するので成り立つ。(終)

ナーゲル点の性質より、「内心、重心、ナーゲル点は同一直線上にあり、 $IG:GN=1:2$ 」である。
これを図に付け加えると、次のようになる。



わかりやすく表示すると、次のようになる。



よって、 $SpG:GI=1:2$ も成り立つ。

【定理3】垂心 H、スピーカー点 Sp、ミッテンプンクト M は同一直線上にある。
証明はミッテンプンクトを参照。