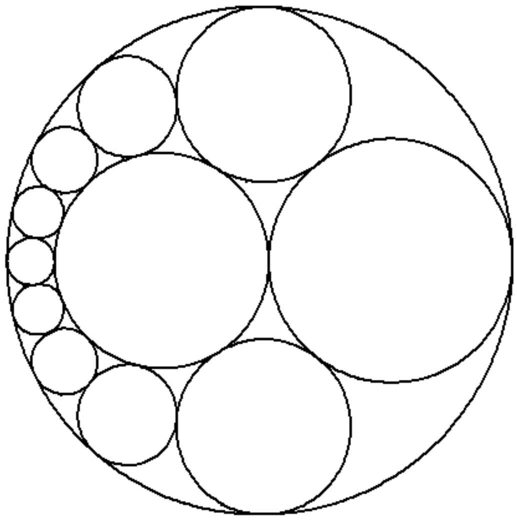
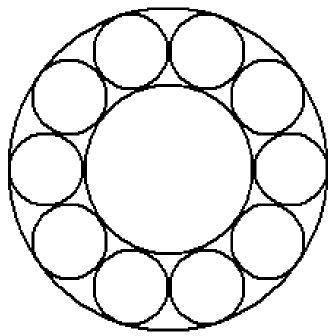
シュタイナーの閉形定理(反転の応用として)

定理(シュタイナー)
2つの円があって、一方の円内に他方があるとする。両者の間に互いに接するように円を描く。何個目かの円を描いて最初に描いた円と初めて共通点をもつとき、それがちょうど接しているかどうかは、元の2つの円(中心と半径)で決まっており、最初の円を描く位置には依らない。しかも内部に内接する円の数は一定であり、隣り合う円の接点はある定円上にある。





【上の図の描き方】
右の図のような同心円の大円と小円を考え、その間に円を内接させる。
これを反転で移すことで上の図を描くことができる。(functionview)

【右の図の描き方】
同心円の大円と小円をかく。
大円の半径を　R　、小円の半径を　r　とする。
大円と小円の間に接している円環の数　n　を、
それらの半径はすべて等しいが、それを　x　をとすると

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{x}{R-x} \quad \text{これより} \quad x=\frac{R\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}} \quad \cdots ①$$

また、　$2x=R-r$　・・・②であるから　$r=R-2x=R-\dfrac{2R\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}=\dfrac{R\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$　となる。

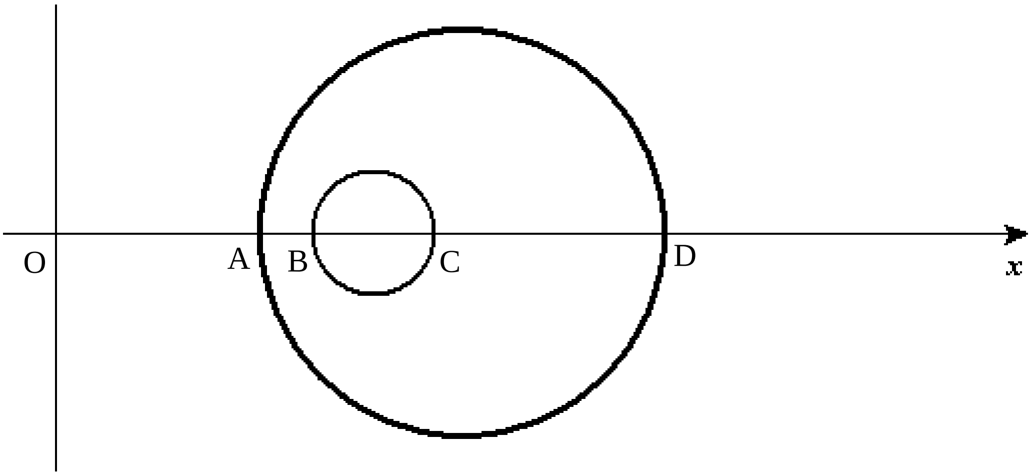
この式により、大円の半径　R　と2つの円に内接する円の数　n　を指定すれば、小円と内接する円が自動的に決定されることになる。

2つの同心円に円を内接させたものを反転によって移せば、上の図が得られる。

反転による座標変換は　$f(x,y)=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$　である。

この定理は反転を用いて証明することができる。

（証明）
まず、一般の位置にある2つの大円と小円を同心円へ移すための反転の中心が存在することを示すことで、2つの円が同心円に移されるような反転が存在することを示す。
大円と小円は下図のような位置にあるとして一般性を失わない。（小円は大円の中に含まれるとする）



x 軸と大円との交点を順にA,Dとし、小円との交点を順にB,Cとする。
$OA=x$, $AB=b$, $AC=c$, $AD=d$ とおく。
このとき $x>0$, $0<b<c<d$ である。

原点を中心とする反転による A, B, C, D の変換後の点を $A_{0,} B_{0,} C_{0,} D_0$ とすると
$A_0\left(\frac{1}{x}\right), B_0\left(\frac{1}{x+b}\right), C_0\left(\frac{1}{x+c}\right), D_0\left(\frac{1}{x+d}\right)$ となる。
よって反転によって2つの円が同心円に移されるとすると
$\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x+d}-\frac{1}{x+c}$ すなわち $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+d}=\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}$ である。
これを整理すれば、 $(b+c-d)x^2+2bcx+bcd=0$ となる。
この判別式は
$\frac{D}{4}=a^2b^2+(b+c-d)\cdot bcd=bc(d-c)(d-b)>0$ となる。
したがって反転の中心は2つある。
以上のことから2つの大円と小円を適当な反転により同心円に移すことは可能である。

以上のことを利用し、証明する。
上のような一般の位置にある大円と小円を考える。（ただし、小円は大円の中に含まれるとする）
そのとき2つの円の間に内接する円を任意の位置から次々と描いていき、最後の円がぴったりとはまったとする。・・・①
このとき適当な反転を行えば大円と小円は同心円に移され、2つの円の間には同じ半径の円がぴったりと内接している。
一般の位置にある大円と小円において、①とは別の位置から円を描き始めるとする。まず最初に1つ目の円だけを描き、残りの円は描かないでおく。この状態を反転で移せば、2つの同心円の間に1つの円が内接している状態になるが、このあと続けて残りの円を内接していくことは可能である。なぜならそれは①を反転で移したものを適当に回転させたものになっているからである。
よって、同心円の間に1つの円が内接している状態から続けて、すべての内接円を描き、それを反転の逆写像で戻せば、一般の位置にある大円と小円の間に円がぴったりと内接している状態を構成できる。

隣り合う円の接点の性質については、反転で移した先ではある定円上にあるが、それを反転の逆写像で移せば、円に移されることから従う。(反転の性質より、反転の中心を通らない円はまた反転の中心を通らない円に移される。)以上により定理は成り立つ。(終)

大円の半径 R ,小円の半径 r ,大小2円の中心の距離 d ,2つの円の間に詰めた円の個数 n の間には次のシュタイナーの等式と呼ばれる関係式が成り立っている。

定理(シュタイナーの等式)

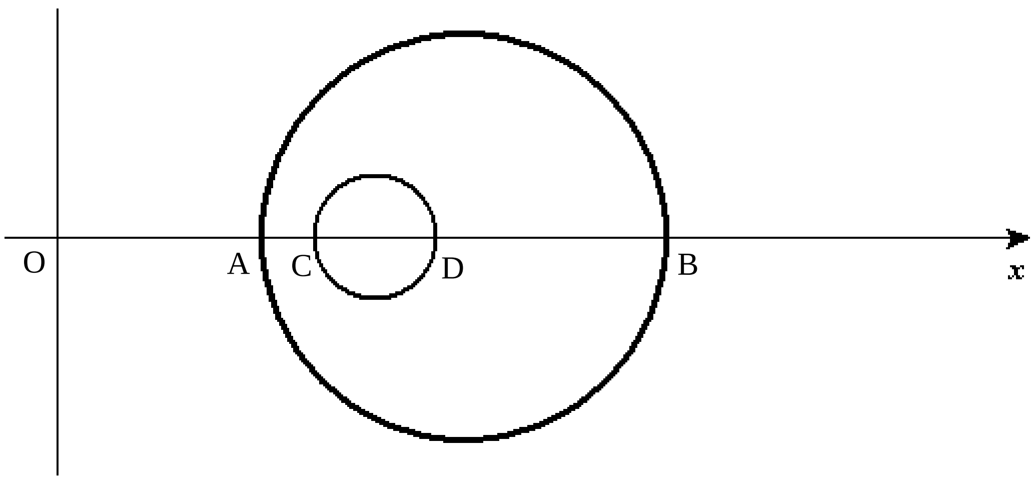
$$(R-r)^2-4Rr\tan^2\frac{\pi}{n}=d^2$$

(証明)等式を次のように変形する。

$$\frac{(R-r)^2-d^2}{4Rr}=\tan^2\frac{\pi}{n}$$

このとき左辺は反転で不変であることをまず示す。その後、2円を同心円に反転で移した場合でこの値を計算し、それが右辺に等しいことを示す。

大円と x 軸との交点を座標の小さい方から $A(a), B(b)$,小円と x 軸との交点を座標の小さい方から $C(c), D(d)$ とする。



$$R=\frac{b-a}{2},\quad r=\frac{d-c}{2},\quad d=\frac{a+b}{2}-\frac{c+d}{2}$$

ゆえに $R-r+d=\dfrac{b-a}{2}-\dfrac{d-c}{2}+\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{c+d}{2}=b-d$

$$R-r-d=\frac{b-a}{2}-\frac{d-c}{2}-\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}=c-a$$

よって、左辺= $\dfrac{(R-r)^2-d^2}{4Rr}=\dfrac{(R-r+d)(R-r-d)}{4Rr}=\dfrac{(b-d)(c-a)}{4\cdot\dfrac{(b-a)(d-c)}{4}}=\dfrac{(b-d)(c-a)}{(b-a)(d-c)}$ …③

同じことを反転で移った先でも考える。

反転で A, B, C, D が $A_0(a_0), B_0(b_0), C_0(c_0), D_0(d_0)$ になったとし、大小2円の半径が R_0, r_0 となったとすると、上の計算と同様にして

$\dfrac{(R_0-r_0)^2-{d_0}^2}{4R_0r_0}=\dfrac{(b_0-d_0)(c_0-a_0)}{(b_0-a_0)(d_0-c_0)}$ であるが、反転の性質より $a_0=\dfrac{1}{a}, b_0=\dfrac{1}{b}, c_0=\dfrac{1}{c}, d_0=\dfrac{1}{d}$ なので

代入して

$$\frac{(R_0-r_0)^2-{d_0}^2}{4R_0r_0}=\frac{(b_0-d_0)(c_0-a_0)}{(b_0-a_0)(d_0-c_0)}=\frac{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)}=\frac{(b-d)(c-a)}{(b-a)(d-c)}\quad\cdots④$$

③④より、左辺の値は反転で不変である。

次にこの不変値を求める。適当な反転で大小2円は同心円に移されるから、その状況では　$d=0$　である。

①②より　$R-r=2x=\dfrac{2R\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$　,　$r=\dfrac{R\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$

よって、左辺= $\dfrac{(R-r)^2-d^2}{4Rr}=\dfrac{\left(\dfrac{2R\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\right)^2-0}{4R\cdot\dfrac{R\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\frac{\pi}{n}}}=\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{1-\sin^2\frac{\pi}{n}}=\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}=\tan^2\frac{\pi}{n}$

よって証明された。(終)

【参考文献】

[1]高校生のための現代数学講座「複素数」講義(1)　大島俊雄
[2]数学ひとり旅　石谷　茂
[3]平面図形の幾何学　難波　誠