正多面体が5種類しかないことの証明

正多面体においてすべての面が正m角形であるとする。また1つの頂点に集まる辺の数を　n　とする。

辺の総数Eについて、2通りに数えてみる。
(その1)
　$E=m\times F\div 2=\dfrac{1}{2}mF$　(1つの面を囲む辺の数がmで、面がF個あるが、2重にカウントしているから)
したがって、　$F=\dfrac{2}{m}E$　･･･①

(その2)
　$E=nV\div 2=\dfrac{1}{2}nV$　(1つの辺に集まる辺の数がnであるから、V個の頂点についてこれをすべて加えるが、2重にカウントしているから)
ゆえに　$V=\dfrac{2}{n}E$　･･･②

これをオイラーの多面体定理　$V-E+F=2$　に代入すると、　$\dfrac{2}{n}E-E+\dfrac{2}{m}E=2$　となる。
両辺を　2E　で割ると、　$\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{E}$　すなわち、　$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{E}$　･･･④となる。

ここで　$E>0$　であるから④より　$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}>\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\dfrac{1}{m}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}$　･･･⑤

ここで　$n\geq 3$　であるから　$\dfrac{1}{n}\leq\dfrac{1}{3}$　よって　$-\dfrac{1}{n}\geq-\dfrac{1}{3}$

よって　$\dfrac{1}{m}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$　となる。　$m\geq 3$　から　$m=3,4,5$　である。

以下、mによる場合わけをする。
(1)　$m=3$　のとき、⑤から　$\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}$　よって　$\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$　よって　$3\leq n<6$
したがって　$n=3,4,5$

(2)　$m=4$　のとき、⑤から　$\dfrac{1}{4}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}$　よって　$\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$　よって　$3\leq n<4$
したがって　$n=3$

(3)　$m=5$　のとき、⑤から　$\dfrac{1}{5}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}$　よって　$\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{10}$　よって　$3\leq n<\dfrac{10}{3}$
したがって　$n=3$

したがって条件を満たすm,nの組　(m,n)　は
　$(m,n)=(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(5,3)$　の5通りである。
それぞれの場合について正何面体になるのかを調べていく。

(i) $(m, n)=(3,3)$ のとき

$F=\frac{2}{3}E, V=\frac{2}{3}E$ これをオイラーの多面体定理に代入して

$\frac{2}{3}E-E+\frac{2}{3}E=2$ これより $E=6$ ゆえに $F=4$ これより正四面体である。

(ii) $(m, n)=(3,4)$ のとき

$F=\frac{2}{3}E, V=\frac{1}{2}E$ これをオイラーの多面体定理に代入して

$\frac{2}{3}E-E+\frac{2}{3}E=2$ これより $E=12$ ゆえに $F=8$ これより正八面体である。

(iii) $(m, n)=(3,5)$ のとき

$F=\frac{2}{3}E, V=\frac{2}{5}E$ これをオイラーの多面体定理に代入して

$\frac{2}{5}E-E+\frac{2}{3}E=2$ これより $E=30$ ゆえに $F=20$ これより正二十面体である。

(iv) $(m, n)=(4,3)$ のとき

$F=\frac{1}{2}E, V=\frac{2}{3}E$ これをオイラーの多面体定理に代入して

$\frac{2}{3}E-E+\frac{1}{2}E=2$ これより $E=12$ ゆえに $F=6$ これより正六面体である。

(v) $(m, n)=(5,3)$ のとき

$F=\frac{2}{5}E, V=\frac{2}{3}E$ これをオイラーの多面体定理に代入して

$\frac{2}{3}E-E+\frac{2}{5}E=2$ これより $E=30$ ゆえに $F=12$ これより正十二面体である。

(別法)
正多面体には次の性質がある。
① 1つの頂点には、3つ以上の面が集まっている。
② 1つの頂点に集まる角の大きさの和は360°より小さい。

①②より、正多面体の面になる正多角形の1つの角の大きさは $360°\div 3=120°$ より小さい

正多角形の1つの角の大きさは正三角形が $60°$ 正方形が $90°$ 正五角形が $108°$ 正六角形が $120°$ ・・・であるが、上のことより正多面体の面は正三角形、正方形、正五角形以外にはないことがわかる。

面が正三角形のとき
1つの頂点に集まる面の数は3,4,5 の場合が考えられる。
(1) 集まる面の数が 3 のとき、
頂点の数に関して $v=\frac{3f}{3}=f$ 、辺の数に関して $e=\frac{3f}{2}$

これをオイラーの多面体定理 $v-e+f=2$ に代入して、 $f-\frac{3f}{2}+f=2$ これより $f=4$ となるので、

正四面体である。

(2) 集まる面の数が 4 のとき、
頂点の数に関して　$v=\dfrac{3f}{4}$　、辺の数に関して　$e=\dfrac{3f}{2}$

これをオイラーの多面体定理　$v-e+f=2$　に代入して、　$\dfrac{3f}{4}-\dfrac{3f}{2}+f=2$　これより　$f=8$　となるので、

正八面体である。

(3) 面の数が 5 のとき、
頂点の数に関して
$v=\dfrac{3f}{5}$　、辺の数に関して　$e=\dfrac{3f}{2}$

これをオイラーの多面体定理　$v-e+f=2$　に代入して、　$\dfrac{3f}{5}-\dfrac{3f}{2}+f=2$　これより　$f=20$　となるので、

正二十面体である。

(4) 面が正四角形のとき
1つの頂点に集まる面の数は 3 である。
頂点の数に関して　$v=\dfrac{4f}{3}$　、辺の数に関して　$e=\dfrac{4f}{2}=2f$

これをオイラーの多面体定理　$v-e+f=2$　に代入して、　$\dfrac{4f}{3}-2f+f=2$　これより　$f=6$　となるので、

正六面体である。

(5) 面が正五角形のとき
1つの頂点に集まる面の数は 3 である。
頂点の数に関して　$v=\dfrac{5f}{3}$　、辺の数に関して　$e=\dfrac{5f}{2}$

これをオイラーの多面体定理　$v-e+f=2$　に代入して、　$\dfrac{5f}{3}-\dfrac{5f}{2}+f=2$　これより　$f=12$　となるので、

正十二面体である。