定積分の公式について

1、 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

2、 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

証明は　$x-\beta=(x-\alpha)+(\alpha+\beta)$　として計算していけばよい。

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\alpha+\alpha-\beta)\,dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^3dx+(\alpha-\beta)\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[(\beta-\alpha)^4\right]_{\alpha}^{\beta}+(\alpha-\beta)\cdot\frac{1}{3}\left[(\beta-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^4=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

3、 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

2と3はグラフの形を描き、x 軸より上は＋、下は―と覚えるといい。

4、 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx=\frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$

一般的に次が成り立つ。

（公式）　$\displaystyle I_{m,n}=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx=(-1)^n\cdot\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$

（証明）　$t=x-\alpha$　とおくと、　$x=t+\alpha$　で　$x:\alpha\to\beta$　のとき、　$t:0\to\beta-\alpha$　であるから

$$I_{m,n}=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx=\int_{0}^{\beta-\alpha}t^m\{t+(\alpha-\beta)\}^n\,dt$$

部分積分をすると　$f'=t^m$　　　$g=\{t+(\alpha-\beta)\}^n$

$f=\dfrac{1}{m+1}t^{m+1}$　　$g'=n\{t+(\alpha-\beta)\}^{n-1}$　であるから

$$I_{m,n}=\frac{1}{m+1}\left[t^{m+1}\{t+(\alpha-\beta)\}^n\right]_0^{\beta-\alpha}-\frac{n}{m+1}\int_{0}^{\beta-\alpha}t^{m+1}\{t+(\alpha-\beta)\}^{n-1}dt$$
$$=\frac{1}{m+1}(\beta-\alpha)^{m+1}(\beta-\alpha+\alpha-\beta)^n-0-\frac{n}{m+1}\int_{0}^{\beta-\alpha}t^{m+1}\{t+(\alpha-\beta)\}^{n-1}dt$$
$$=-\frac{n}{m+1}\int_{0}^{\beta-\alpha}t^{m+1}\{t+(\alpha-\beta)\}^{n-1}dt$$

$t=x-\alpha$　であったから、戻して

$$=-\frac{n}{m+1}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^{m+1}(x-\beta)^{n-1}dx=-\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}$$

よって、 $I_{m,n}=-\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}=-\frac{n}{m+1}\cdot\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)I_{m+2,n-2}$

$=\ -\frac{n}{m+1}\cdot\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\cdot\left(-\frac{n-2}{m+3}\right)I_{m+3,n-3}=\cdots\ =$

$=\ -\frac{n}{m+1}\cdot\left(-\frac{n-1}{m+2}\right)\cdot\left(-\frac{n-2}{m+3}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+n}\right)I_{m+n,0}$

$=\ (-1)^n\cdot\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}dx$

$=\ (-1)^n\cdot\frac{m!n!}{(m+n+1)!}\frac{1}{m+n+1}[(x-\alpha)^{m+n+1}]_\alpha^\beta$

$=\ (-1)^n\cdot\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ （終）

次の形の公式もある。これは公式3を使って導くことができる。

（準公式） $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)dx=\frac{1}{12}(2c-a-b)(b-a)^3$

（証） $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)dx=\int_a^b (x-a)(x-b)\left(\frac{x}{2}-\frac{a}{2}+\frac{x}{2}-\frac{b}{2}+\frac{a+b}{2}-c\right)dx$

$=\ \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)^2(x-b)dx+\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)^2dx+\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)(a+b-2c)dx$

$=\ \frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{12}(b-a)^4+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}(b-a)^4-\frac{1}{12}(a+b-2c)(b-a)^3=\frac{1}{12}(2c-a-b)(b-a)^3$ （終）

次のような導き方もある。これならばいつでも作れる。

$\int_a^b (x-a)(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0$

これを次のように変形する。

$\int_a^b (x-a)(x-b)\left(x-c+c-\frac{a+b}{2}\right)dx=0$

よって $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)dx=-\left(c-\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b (x-a)(x-b)dx$

したがって $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)dx=\frac{1}{6}\left(c-\frac{a+b}{2}\right)(b-a)^3$