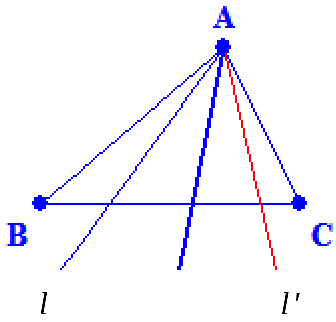
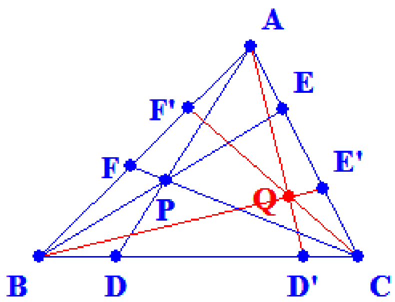
等角共役点

【定義】(等角共役線) 角の頂点を通る直線 l, l' がその角の二等分線に関して対称な直線であるとき、l と l' は互いに等角共役線であるという。



【定理1】三角形の各頂点を通る直線が1点 P で交わるならば、それらの等角共役線も1点 Q で交わる。
このとき、P と Q は互いに等角共役点であるという。

(証明) 点 P を共点とし、AP の延長と BC との交点を D、
BP との延長と AC との交点を E、CP との延長と AB との交点を F
とする。また AD と AD'、BE と BE'、CF と CF'は等角共役線である
とする。
∠BAD=α、∠CBE=β、∠BCF=γ とおく。
等角共役線の仮定により
∠CAD'=α、∠ABE'=β、∠ACF'=γ
である。



P が共点であるからチェバの定理より、

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}=1$$ が成り立つ。

これを三角形の面積の比で書き直すと

$$\frac{\triangle CAF}{\triangle CFB}\frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}\frac{\triangle BCE}{\triangle BEA}=1$$ となる。

計算すると

$$\frac{\frac{1}{2}CA\cdot CF\sin\gamma}{\frac{1}{2}CB\cdot CF\sin(C-\gamma)}\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\alpha}{\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin(A-\alpha)}\frac{\frac{1}{2}BC\cdot BE\sin\beta}{\frac{1}{2}BA\cdot BE\sin(B-\beta)}=1$$

これを約分すると

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(C-\gamma)}\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)}=1$$ を得る。・・・①

一方、$$\frac{AF'}{F'B}\frac{BD'}{D'C}\frac{CE'}{E'A}=\frac{\triangle CAF'}{\triangle CF'B}\frac{\triangle ABD'}{\triangle AD'C}\frac{\triangle BCE'}{\triangle BE'A}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}CA\cdot CF'\sin(C-\gamma)}{\frac{1}{2}CB\cdot CF'\sin\gamma}\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD'\sin(A-\alpha)}{\frac{1}{2}AC\cdot AD'\sin\alpha}\frac{\frac{1}{2}BC\cdot BE'\sin(B-\beta)}{\frac{1}{2}BA\cdot BE'\sin\beta}=1$$

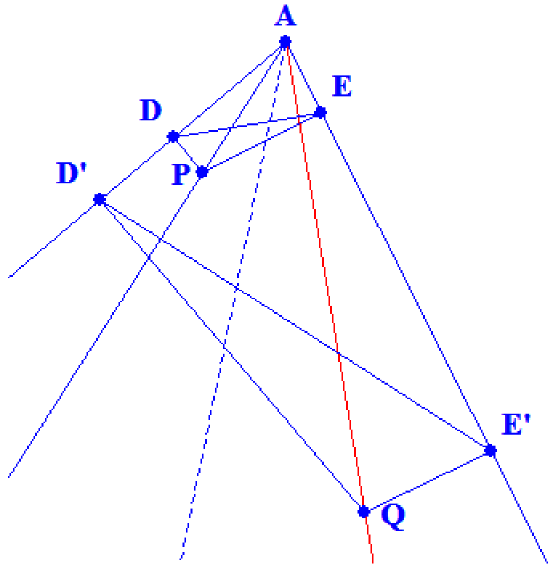
$$=\frac{\sin(C-\gamma)}{\sin\gamma}\frac{\sin(A-\alpha)}{\sin\alpha}\frac{\sin(B-\beta)}{\sin\beta}$$ となるが、この値は①により 1 である。

したがってチェバの定理の逆により、Q は共点である。(終)

等角共役線について、いくつかの性質が成り立つ。

【定理2】
(1) 等角共役線上の点 P,Q をとる。P,Q から2辺へ下した垂線の足を D,E,D',E'とすると、
⊿PDE∽　QE'D' が成り立つ。したがって、　$PD:PE=QE':QD'$　が成り立つ。

(2) 逆に、点 P,Q から2辺へ下した垂線の長さが　$PD:PE=QE':QD'$　を満たしているならば、
P,Q は互いに等角共役線上の点である。



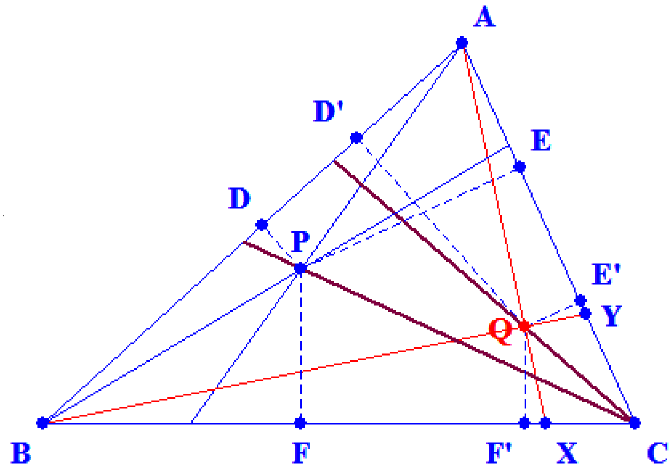
(証明)
(1) ∠PDE=∠PEA であるから、四角形 ADPE は円に内接する。
したがって内接四角形の性質により、
∠DPE=180°－∠A
同様にして四角形 AD'QE'は円に内接するので
∠D'QE'=180°－∠A
よって、∠DPE=∠D'QE'・・・①となる。

また、円周角の定理より、
∠PED=∠PAD・・・②
かつ∠QD'E'=∠QAE'・・・③
仮定より P,Q は等角共役線上の点であるから、
∠PAD=QAE'・・・④
②③④より∠PED=∠QD'E'・・・⑤

①⑤より⊿PDE∽　QE'D' である。したがって　$PD:PE=QE':QD'$　が成り立つ。(終)

(2)　仮定より①は成り立つ。ここで　$PD:PE=QE':QD'$　であるから、⊿PDE∽　QE'D' である。
よって∠PED=∠QD'E'・・・⑥である。
また②③も成り立つ。よって、②③⑥より∠PAD=QAE'である。よって、AP,AQ は等角共役線である。(終)

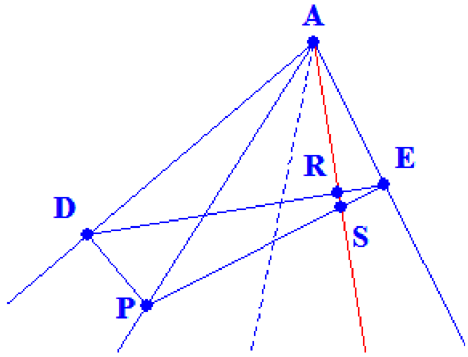
定理2を用いると、定理1を次のように証明することができる。
(定理1の別証)
P を共点とし、直線 AP の等角共役線を直線 AX、直線 BP の等角共役線を直線 BY とすると、
AX と BY は1点 Q で交わるが、このとき直線 CP と直線 CQ が互いに等角共役線になることが示されれば証明されたことになる。



AP と AQ は等角共役線であるから、
定理2(1)により　$PD:PE=QE':QD'$
すなわち　$\dfrac{PD}{PE}=\dfrac{QE'}{QD'}$　・・・①
同様にして、BP と BQ は等角共役線であるから、
$PF:PD=QD':QF'$
すなわち　$\dfrac{PF}{PD}=\dfrac{QD'}{QF'}$　・・・②
①②の辺々をかけると
$\dfrac{PF}{PE}=\dfrac{QE'}{QF'}$
すなわち　$PF:PE=QE':QF'$　。
ゆえに定理2(2)により直線 CP と直線 CQ は互いに等角共役線である。(終)

【定理3】点 P から2辺へ下した垂線の足を D,E とすると、直線 DE⊥(AP の等角共役線)となる。

(証明)⊿ESR と⊿ASE において
四角形 ADPE は円に内接するから、円周角の定理より
∠RES=∠PAD･･･①



仮定より∠PAD=∠EAS･･･②
①②より∠RES=∠EAS･･･③

また∠ASE は共通…④

よって③④より⊿ESR∽　ASE
したがって∠ERS=∠AES=90°(終)

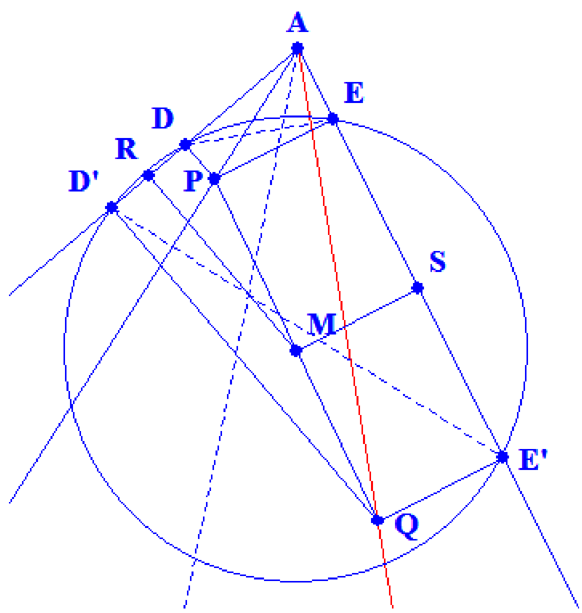
【定理4】
等角共役線上の点 P,Q から2辺へ下した垂線の足 D,E,D',E'は同一円周上にあり、その円の中心は PQ の中点である。

(証明)四角形 D'E'ED について
∠DD'E=∠DD'Q－∠QD'E'
ここで∠QD'E'=∠PED　（定理2(1)⑤より)
したがって、
∠DD'E=∠DD'Q－∠QD'E'
=∠DD'Q－∠PED
=90°－∠PED
=∠PEA－∠PED
=∠AED
よって、D,E,D',E'は同一円周上にある。

この円の中心は DD'の垂直二等分線上にあり、その垂直二等分線は DP,D'Q に平行である。
したがって、この垂直二等分線は PQ の中点 M を通る。

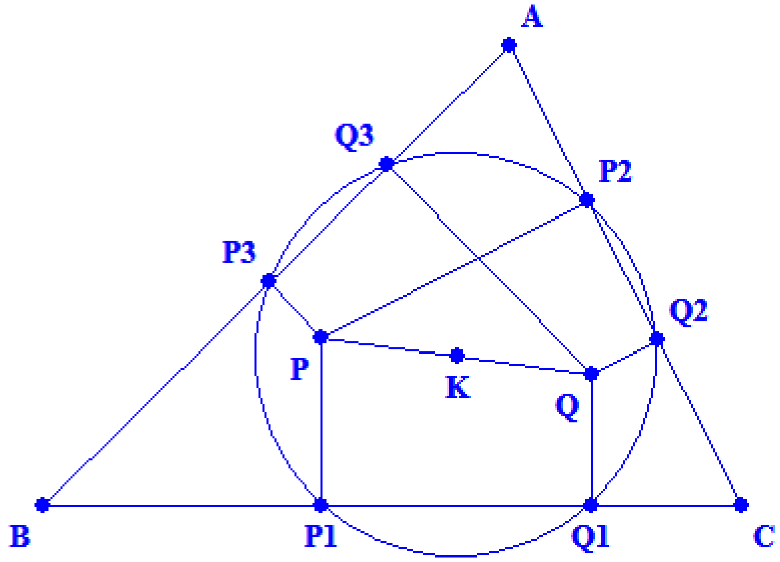
同様に、円の中心は EE'の垂直二等分線上にあり、その垂直二等分線は EP, E'Q に平行である。
したがって、この垂直二等分線は PQ の中点 M
を通る。

ゆえに、この円の中心は M である。



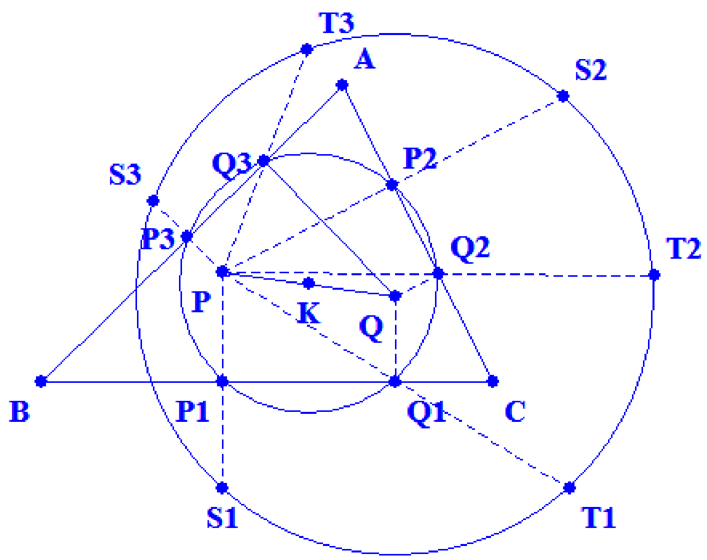
【定理5】(6 点円) ⊿ABC において、互いに等角共役な2点 P,Q があるとする。点 P から△ABC の3辺へ下ろした垂線の足を P_1, P_2, P_3 とし、点 Q から△ABC の3辺へ下ろした垂線の足を Q_1, Q_2, Q_3 とする。
このとき、6 点 $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ は同一円周上に存在する。またこの円の中心 K は P,Q の中点である。

(証明)
定理4を辺 AP と辺 AQ について適用すれば、 $P_2, Q_2, P_3, Q_3,$ の4点が同一円周上にあることが言える。
また辺 BP と辺 BQ について適用すれば、 $P_1, Q_1, P_3, Q_3,$ の4点が同一円周上にあることが言える。
したがって、6点 $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ は同一円周上に存在する。(終)



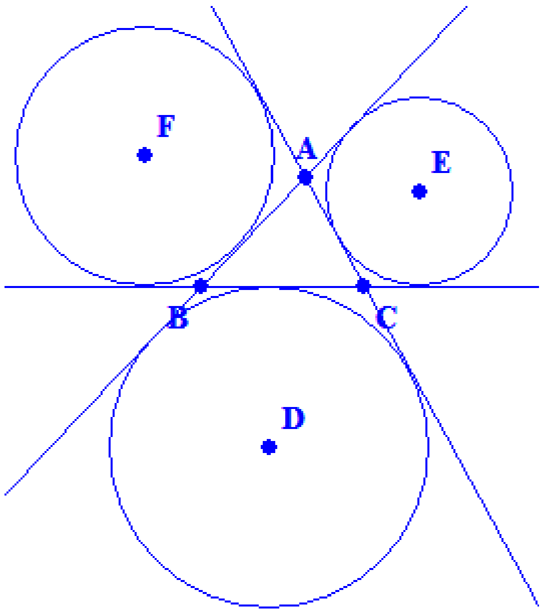
定理5の変形として次が成り立つ。

【定理6】(6 点円) ⊿ABC において、互いに等角共役な2点 P,Q があるとする。点 $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ は定理5のように定めるとし、これらの6点の点 P に関する対称点を考え、それらを $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ とする。このとき、
$S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ は Q を中心とする同一円周上にある。
同様に $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ の点 Q に関する対称点は点 P を中心とする同一円周上にある。



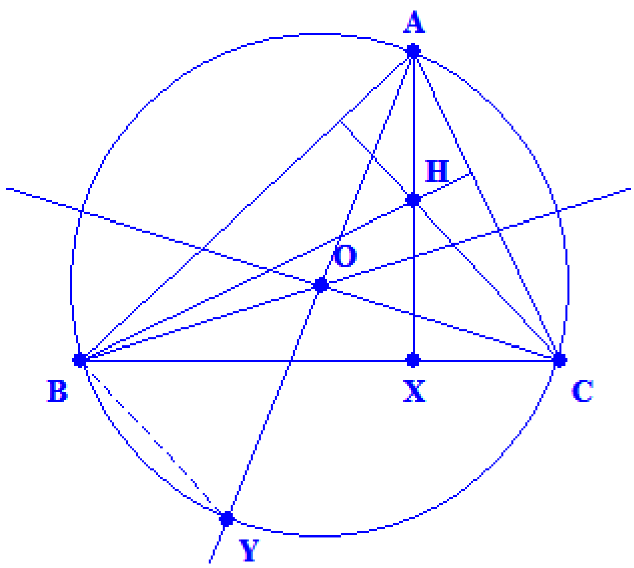
（証明） $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ の定め方から、点 P は⊿ $P_1 P_2 P_3$ を⊿ $S_1 S_2 S_3$ に相似比 $1:2$ で相似拡大したときの中心である。したがって、それらの外接円も点 P を中心に $1:2$ に相似拡大される。
同様に点 P は⊿ $Q_1 Q_2 Q_3$ を⊿ $T_1 T_2 T_3$ に相似比 $1:2$ で相似拡大したときの中心である。したがって、それらの外接円も点 P を中心に $1:2$ に相似拡大される。
ここで、⊿ $P_1 P_2 P_3$ の外接円と⊿ $Q_1 Q_2 Q_3$ の外接円は一致しているから、それらの相似拡大した三角形の外接円同士も一致する。
したがって、点 P は「 $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ を通る6点円」を「 $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ 通る6点円」に相似比 $1:2$ で相似拡大したときの中心である。
また、「 $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3$ を通る6点円」の中心は、P と Q の中点であったので、それを P を中心にして相似比 $1:2$ で相似拡大するとそれは点 Q になる。したがって、「 $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ 通る6点円」の中心は点 Q である。（終）

等角共役点の観点から5心を考えると、次のようになっている。
(1) 内心の等角共役点は内心自身である。
(2) 傍心の等角共役点はその傍心自身である。
(3) 外心と垂心は互いに等角共役点である。



（証明）
(1)は明らかである。

(2)は直線 AD の等角共役線が直線 AD 自身で、
直線 BD の等角共役線が直線 BF であり、
これは直線 BD に一致する。したがって成り立つ。



(3)直線 AO と直線 AH が等角共役線であることを示せば、同様にして直線 BO と直線 BH、
直線 CO と直線 CH が等角共役線であることもわかるので、O と H が等角共役点であることがわかる。
⊿ABY と⊿AXC において
∠AYB=ACX（弧 AC の円周角）
∠ABY=AXC=90°
よって、∠BAY=∠XAC である。
ゆえに直線 AO と直線 AH が等角共役線である。（終）

【系】定理5において、点Pが外心Oのとき、上の(3)により、点Qは垂心となるが、このとき定理5の6点円は9点円と一致する。

なぜなら、定理5の6点円は⊿ $Q_1 Q_, Q_3$ の外接円として一意に定まるが、これは垂心から各辺に下した垂線の足を通る円であり、それは9点円に一致するからである。

【定義】三角形の重心の等角共役点をルモアーヌ(Lemoine)点(類似重心)という。ルモアーヌ点はKで表すことが多い。これについては別に触れる。

・等角共役点の重心座標について

点Pと点Qが等角共役点であるとする。このとき、点Pの重心座標と点Qの重心座標の間には次の関係が成り立つ。

【定理7】PとQを互いに等角共役点であるとする。このとき、Pの重心座標が (s,t,u) ならば、Qの重心座標は $\left(\frac{a^2}{s},\frac{b^2}{t},\frac{c^2}{u}\right)$ である。

(証明)点Pの重心座標を (s,t,u) と点Qのの重心座標を (s',t',u') とする。等距離共役点のところで計算したようにして、 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{AC}=(t+u)\frac{t\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{AC}}{t+u}$ であるから、 $BD:DC=u:t$ となる。

よって、 $u:t=BD:DC=⊿ABD:⊿ADC$

$= \frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\alpha:\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin(A-\alpha)$

$= AB\sin\alpha:AC\sin(A-\alpha)$

$= c\sin\alpha:b\sin(A-\alpha)$ ・・・①

同様にして、 $u':t'=BD':D'C=⊿ABD':⊿AD'C$

$= \frac{1}{2}AB\cdot AD'\sin(A-\alpha):\frac{1}{2}AC\cdot AD'\sin\alpha$

$= AB\sin(A-\alpha):AC\sin\alpha$

$= c\sin(A-\alpha):b\sin\alpha$ ・・・②

①②より、 $u:t=c^2\sin\alpha:bc\sin(A-\alpha)$, $u':t'=bc\sin(A-\alpha):b^2\sin\alpha$

したがって $u':t'=bc\sin(A-\alpha):b^2\sin\alpha=t:\frac{b^2}{c^2}u=c^2t:b^2u=c^2st:b^2su$

同様にして $s':u'=a^2u:c^2s=a^2ut:c^2st$ となる。

よって、 $s':t':u'=a^2ut:b^2su:c^2st=\frac{a^2ut}{stu}:\frac{b^2su}{stu}:\frac{c^2st}{stu}=\frac{a^2}{s}:\frac{b^2}{t}:\frac{c^2}{u}$ (終)