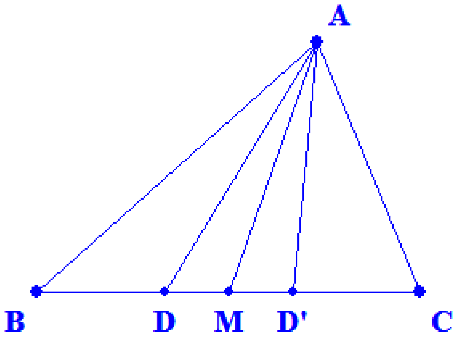
等距離共役点

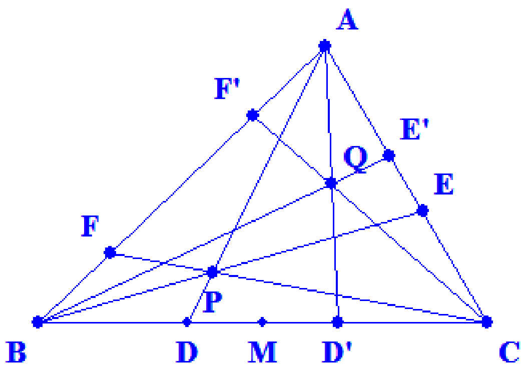
【定義】(等距離共役線)⊿ABC の辺 BC 上に点 D と D'があり、それらが BC の中点 M に関して対称であるとき、AD と AD'は互いに等距離共役線であるという。



次の定理が成り立つ。
【定理1】(等距離共役点)
三角形の各頂点を通る直線が1点 P で交わるならば、それらの等距離共役線もまた1点 Q で交わる。
(P と Q を互いに等距離共役点であるという。)

(証明)D,E,F,D',E',F'を図のように定める。
仮定より、P は共点であるから
チェバの定理より、 $\dfrac{AF}{FB}\dfrac{BD}{DC}\dfrac{CE}{EA}=1$
かつ
$AF=BF',\ FB=F'A,\ BD=CD'$
$DC=D'B,\ CE=AE',\ EA=E'C$
となるので、代入すれば

$$\frac{BF'}{F'A}\frac{CD'}{D'B}\frac{AE'}{E'C}=1$$



すなわち
$\dfrac{BF'}{F'A}\dfrac{AE'}{E'C}\dfrac{CD'}{D'B}=1$ よって、チェバの定理の逆により、AD',BE',CF'は1点で交わる。(終)

等距離共役点の重心座標の間には、次の関係がある。

【定理2】P と Q を互いに等距離共役点であるとする。このとき、P の重心座標が (s,t,u) ならば、Q の重心座標は $\left(\dfrac{1}{s},\dfrac{1}{t},\dfrac{1}{u}\right)$ である。

(証明)P の重心座標が (s,t,u) であるとする。このとき Q の重心座標 (s',t',u') を求める。
$\overrightarrow{AP}=l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$ と表されるとき、 $\overrightarrow{OP}=(1-l-m)\overrightarrow{OA}+l\overrightarrow{OB}+m\overrightarrow{OC}$ であるから、逆をたどることで

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$ ならば $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{AC}$ となる。
(あるいは、ベクトルの始点 O として特別な点 A を考えて、 O を A に置き換えても良い。)

これを変形して、 $\overrightarrow{AP}=(t+u)\dfrac{t\overrightarrow{AB}+u\overrightarrow{AC}}{t+u}$ であるから、AP の延長と辺 BC との交点を D とすると、

$BD:DC=u:t$ である。

同様にして、BP の延長と辺 AC との交点を E、CP の延長と辺 AB との交点を F とすると、

$AE:EC=u:s$, $AF:FB=t:s$ となる。

これと同じことを Q (s',t',u') についても行う。

AQ の延長と辺 BC との交点を D'、BQ の延長と辺 AC との交点を E'、CQ の延長と辺 AB との交点を F'とすると、 $BD':D'C=u':t'$, $AE':E'C=u':s'$, $AF':F'B=t':s'$ ・・・①となる。

ここで仮定より P と Q は互いに等距離共役点であるので、①を書き換えると

$BD':D'C=u':t'=t:u=st:su$

$AE':E'C=u':s'=s:u=st:ut$

$AF':F'B=t':s'=s:t$

である。

よって、 $s':t':u'=ut:su:st=\dfrac{stu}{s}:\dfrac{stu}{t}:\dfrac{stu}{u}=\dfrac{1}{s}:\dfrac{1}{t}:\dfrac{1}{u}$ となる。（終）