

## 空気抵抗を考慮した斜方投射について(微分方程式の応用)

ボールを空中に投げ上げると、その軌跡は放物線になることは物理で知られている。  
今回はこれに空気抵抗を考慮した場合を考える。

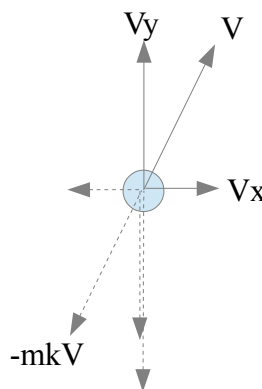
(空気抵抗があるときの物体の軌跡の運動方程式)

ボールに働く力は、重力と空気抵抗(摩擦力)である。空気抵抗は今の場合、物体の速度に比例すると考えられるので、運動方程式は次のようになる。

$V$  を物体の速度とし、その  $x, y$  成分を  $V_x, V_y$  とする。

$$\begin{cases} m \frac{dV_x}{dt} = -mkV_x \cdots ① \\ m \frac{dV_y}{dt} = -mg - mkV_y \cdots ② \end{cases}$$

これは変数分離形で簡単に解ける。(やってみよう)



①より、 $\int \frac{dV_x}{V_x} = -k \int dt$  これより、 $|V_x| = e^{-kt+C_1}$  ゆえに、 $V_x = C e^{-kt}$  ( $C$ :積分定数)

ここで初速度を  $V_{0x}$  とすると、 $t=0$  のとき、 $V = V_{0x}$  だから、 $V_x = V_{0x} e^{-kt} \cdots ①$ となる。

②より、 $\int \frac{dV_y}{g+kV_y} = -\int dt$  これより、 $|g+kV_y| = e^{-kt+C_2}$  ゆえに、 $g+kV_y = C_3 e^{-kt}$

これより、 $V_y = C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}$  ここで初速度を  $V_{0y}$  とすると、 $t=0$  のとき、 $V = V_{0y}$  だから、

$$V_{0y} = C_4 - \frac{g}{k} \text{ ゆえに、 } C_4 = V_{0y} + \frac{g}{k}$$

したがって、 $V_y = \left( V_{0y} + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} - \frac{g}{k} = -\frac{g}{k} + \left( V_{0y} + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} \cdots ②$ となる。

次に①②から  $x, y$  を求める。これは単に  $t$  で積分すればよい。

①から、 $V_x = \frac{dx}{dt} = V_{0x} e^{-kt}$  ゆえに、 $x = V_{0x} \int e^{-kt} dt = -\frac{V_{0x}}{k} e^{-kt} + C$

$$t=0 \text{ のとき、 } x=0 \text{ であるとする、 } C = \frac{V_{0x}}{k}$$

したがって、 $x = V_{0x} \int e^{-kt} dt = -\frac{V_{0x}}{k} e^{-kt} + \frac{V_{0x}}{k} = \frac{V_{0x}}{k} (1 - e^{-kt})$

また、 $V_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{k} + \left( V_{0y} + \frac{g}{k} \right) e^{-kt}$  なので、

$$y = -\frac{g}{k} t - \frac{1}{k} \left( V_{0y} + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} + C \quad t=0 \text{ のとき、 } y=0 \text{ であるとする、 } y = -\frac{g}{k} t - \frac{1}{k} \left( V_{0y} + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} + C$$

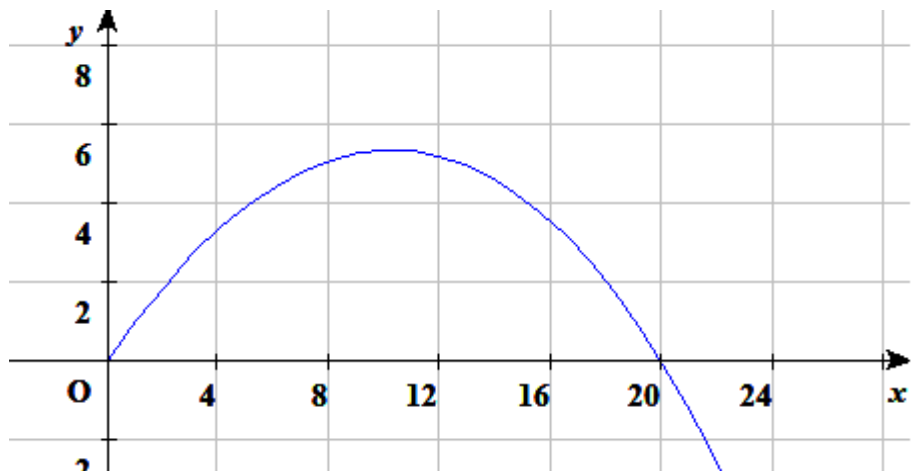
ゆえに、 $C = \frac{1}{k} \left( V_{0y} + \frac{g}{k} \right)$  したがって、

$$y = -\frac{g}{k} t - \frac{1}{k} \left( V_{0y} + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} + \frac{1}{k} \left( V_{0y} + \frac{g}{k} \right) = -\frac{g}{k} t + \frac{1}{k} \left( V_{0y} + \frac{g}{k} \right) (1 - e^{-kt}) \text{ となる。}$$

これをグラフでかくと、次のようになる。

投げ上げる角度は45度とし、初速度  $V$  は15mとした。(fct-view あり)

空気抵抗の  $k$  が0.1のとき



空気抵抗の  $k$  が0.5のとき

