k 項間漸化式の特性多項式（固有多項式）について

漸化式

$$x_{n+k}+p_1x_{n+k-1}+p_2x_{n+k-2}+\cdots+p_kx_n=0$$

で定められる数列 $\{x_n\}$ 全体の作るベクトル空間 V（これは数列ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^N$ の部分ベクトル空間であるが）の線形変換 $F:\{x_n\}\longrightarrow\{x_{n+1}\}$ の固有多項式は

$$x^k+p_1x^{k-1}+p_2x^{k-2}+\cdots+p_k=0$$

である。このことを証明する。

$\{x_n\}$ は初めの k 個の数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ が決まれば決定するから $\dim V=k$ である。したがって k 個の基底がとれる。

$$\begin{aligned}
\{a_n^1\} &: \ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ -p_k,\cdots\\
\{a_n^2\} &: \ 0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ -p_{k-1},\cdots\\
&\quad\ \cdots\\
\{a_n^k\} &: \ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1,\ -p_1,\cdots
\end{aligned}$$

とおく。このとき

$$\{a_n^1\},\ \{a_n^2\},\ \cdots,\{a_n^k\}$$

は V の基底となる。ここで

$$\begin{aligned}
F(\{a_n^1\}) &= \{a_{n+1}^1\}=x_{11}\{a_n^1\}+x_{21}\{a_n^2\}+\cdots+x_{k1}\{a_n^k\}\\
F(\{a_n^2\}) &= \{a_{n+1}^2\}=x_{12}\{a_n^1\}+x_{22}\{a_n^2\}+\cdots+x_{k2}\{a_n^k\}\\
&\quad \cdots\\
F(\{a_n^k\}) &= \{a_{n+1}^k\}=x_{1k}\{a_n^1\}+x_{2k}\{a_n^2\}+\cdots+x_{kk}\{a_n^k\}
\end{aligned}$$

とおき、F の表現行列を求める。

行列算を流用して書けば、

$$F(\{a_n^1\},\{a_n^2\},\cdots,\{a_n^k\})=(\{a_n^1\},\{a_n^2\},\cdots,\{a_n^k\})\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kk}\end{pmatrix}$$

数列の第 n 項に着目すれば、上の式より

$$F(a_n^1, a_n^2, \cdots, a_n^k) = (a_n^1, a_n^2, \cdots, a_n^k)\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kk} \end{pmatrix}$$

となる。ここで $n = 1,\ 2, \cdots,\ k$ とした式を、行列を用いて表せば

$$F\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^k \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k^1 & a_k^2 & \cdots & a_k^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^k \\ a_3^1 & a_3^2 & \cdots & a_3^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1}^1 & a_{k+1}^2 & \cdots & a_{k+1}^k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^k \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k^1 & a_k^2 & \cdots & a_k^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kk} \end{pmatrix} \text{となる。}$$

初期条件を代入すると

$$\begin{aligned} F\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_k & -p_{k-1} & \cdots & \cdots & -p_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kk} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって表現行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_k & -p_{k-1} & \cdots & \cdots & -p_1 \end{pmatrix}$$

である。この固有多項式は

$$x^k + p_1 x^{k-1} + p_2 x^{k-2} + \cdots + p_k$$

であることを数学的帰納法で示そう。（従って、これは漸化式の特性方程式に等しいということになる。）

まず $n = 2$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

の固有多項式は

$$\phi_2(x) = |xI - A| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x + a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1 x + a_2$$

となり、成り立つ。

$n = k$ のとき成り立つと仮定すると

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_k & -p_{k-1} & \cdots & \cdots & -p_1 \end{pmatrix}$$

の固有多項式は

$$\phi_k(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + p_2 x^{k-2} + \cdots + p_k$$

である。

$n=k+1$ のとき

$$|xI-A| = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ p_{k+1} & p_k & p_{k-1} & \cdots & p_2 & x+p_1 \end{vmatrix}$$

これを 1 列について展開すると

$$\begin{aligned} & x(x^k + p_1x^{k-1} + \cdots + p_k) + (-1)^{k+2}p_{k+1}(-1)^k \\ = \quad & x^{k+1} + p_1x^k + \cdots + p_kx + p_{k+1} \end{aligned}$$

よって数学的帰納法により証明された。

以上のことから漸化式 $x_{n+k} + p_1x_{n+k-1} + p_2x_{n+k-2} + \cdots + p_kx_n = 0$ を行列を用いて表現したときの表現行列 A の固有多項式は漸化式から得られる特性方程式にほかならない。

分数型漸化式と行列との関係について（H17 神戸大学より）

$\{a_n\}$ が $a_1 = a, \quad a_{n+1} = \dfrac{pa_n + q}{ra_n + s}$ とする。

$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とし、$A^{n-1} = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ と定める。ただし $A^0 = E$ とする。

このとき

$$a_n = \frac{p_n a + q_n}{r_n a + s_n}$$

が成り立つ。

（証明）数学的帰納法で証明する。

[I] $n = 1$ のとき、$a_1 = a$

$\dfrac{p_1 a + q_1}{r_1 a + s_1} = \dfrac{1 \cdot a + 0}{0 \cdot a + 1} = a$ よって成り立つ。

[II] $n = k$ のとき、成り立つと仮定する。このとき

$$a_k = \frac{p_k a + q_k}{r_k a + s_k}$$

$n = k + 1$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{pa_k + q}{ra_k + s} \\ &= \frac{p\dfrac{p_k a + q_k}{r_k a + s_k} + q}{r\dfrac{p_k a + q_k}{r_k a + s_k} + s} \\ &= \frac{p(p_k a + q_k) + q(r_k a + s_k)}{r(p_k a + q_k) + s(r_k a + s_k)} \\ &= \frac{(pp_k + qr_k)a + (pq_k + qs_k)}{(rp_k + sr_k)a + (rq_k + ss_k)} \end{aligned}$$

ここで $A^k = AA^{k-1}$ と分解して

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k & q_k \\ r_k & s_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} pp_k + qr_k & pq_k + qs_k \\ rp_k + sr_k & rq_k + ss_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
p_{k+1} &= pp_k + qr_k \\
q_{k+1} &= pq_k + qs_k \\
r_{k+1} &= rp_k + sr_k \\
s_{k+1} &= rq_k + ss_k
\end{aligned}$$

である。したがって

$$a_{k+1} = \frac{p_{k+1}a + q_{k+1}}{r_{k+1}a + s_{k+1}}$$

が成り立つ。

[I] [II] により数学的帰納法により証明された。（証明終）

（計算のポイント）$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{k-1}$ と分解したところが重要で、$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A}$ と分解すると、計算が複雑になる。（できることはできる。）