拡 大 実 数 の 効 能

～ 拡大実数は何の役に立つか ～

$$(1/\aleph_0)+(1/\aleph_1)=1/\aleph_0$$

$$(1/\aleph_0)\cdot(1/\aleph_1)=1/\aleph_1$$

西　田　正　夫　著

はじめに

この本は，実数を拡張するための，ある方法についての解説書である．実数の拡張には，

実数に虚数単位を付加して複素数を導く方法（参考文献［１］ｐ．２０４）

複素数の更なる拡張として四元数を導く方法（参考文献［１］ｐ．２１３）

実数に∞を付加する方法（参考文献［３］ｐ．４４）

超実数を導く方法（参考文献［４］［５］）

等がよく知られている．

しかし，次の２つの方法があることは，あまり知られていないようである．

（ア）　カージナル数（濃度）を新しい自然数として，整数，有理数，実数へと拡張する方法

（イ）　実数に，すべての無限大カージナル数

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots,\ \aleph_\omega,\ \cdots$$

を付加する方法

当然，（ア）と（イ）のどちらの方法も，無限大カージナル数を分母とする分数$1/\aleph_\alpha$を考えることになる．そのような数が何の役に立つのかと疑問に感じる読者も多いと思われるが，その効能については，第３章で述べることにして，実際に，そのような数の拡張が可能であることを先に示す．

この本では，（イ）の方法を用いるが，（ア）の方法で導かれる数も，（イ）の方法で導かれる数も，結果は同じである．（参考文献［６］）

約　束

この本では，次のことは，説明なしで用いる．

（ア）　無限大カージナル数すべての集まりを集合とすれば，ブラリ・フォルティの逆理が生じるので，この逆理を回避するために，集合よりも，もっと広い概念である領域という用語も用いる．（参考文献［２］Ｐ．１４４）

（イ）　元が一つだけの集合$\{a\}$とaは本質的に異なる概念であるが，混乱が生じない場合は，両者を同一視する．このとき，

例：　$a\in\{a\}$は当然であるが，$a\in a$も正しい．

例：　実数すべての集合をRとして，Rの空でない部分集合すべての族を$U(R)$とすれば，$R\in U(R)$は当然であるが，$R\subset U(R)$も正しい．実際，

$^\forall a \in R$，$\{a\} \in U(R)$であるので，$\{\{a\} : a \in R\} \subset U(R)$である．

ここで，$\{a\}$とaを同一視すれば，$R = \{a : a \in R\} \subset U(R)$となる．

（ウ）　一般連続体仮説「任意の順序数αについて$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$」は成り立つと仮定する．このとき，実数すべての集合Ｒのカージナル数は$\aleph_1$に等しい．

目　次

参考文献

［１］　数学原論（黒崎　達著，槇書店）

［２］　集合論入門（赤　攝也著，培風館）

［３］　ルベグ積分入門（吉田洋一著，培風館）

［４］　無限小解析の基礎（キースラー著　齋藤正彦訳，東京図書）

［５］　数学セミナー（１９７７年１月号～１２月号，日本評論社）

［６］　拡大実数論の源流（西田正夫著，自費出版，2016）

（URL）http://www.geocities.jp/kakudaijissuu/

第１章　拡大実数

次の２つの命題を仮定する．

（＊１）実数すべての集合が存在する．その集合をＲで表す．

（＊２）無限大カージナル数

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots,\ \aleph_\omega,\ \cdots$$

すべての領域が存在する．その領域をＷで表す．

このとき，$W=\{\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots,\ \aleph_\omega,\ \cdots\}$に

$$W_{(1)}=\{\aleph_{0(1)},\ \aleph_{1(1)},\ \aleph_{2(1)},\ \cdots,\ \aleph_{\omega(1)},\ \cdots\}$$
$$W_{(2)}=\{\aleph_{0(2)},\ \aleph_{1(2)},\ \aleph_{2(2)},\ \cdots,\ \aleph_{\omega(2)},\ \cdots\}$$
$$W_{(3)}=\{\aleph_{0(3)},\ \aleph_{1(3)},\ \aleph_{2(3)},\ \cdots,\ \aleph_{\omega(3)},\ \cdots\}$$
$$W_{(4)}=\{\aleph_{0(4)},\ \aleph_{1(4)},\ \aleph_{2(4)},\ \cdots,\ \aleph_{\omega(4)},\ \cdots\}$$

のように添え数を付けることで，Ｗと同等で互いに素な領域

$$W_{(1)},\quad W_{(2)},\quad W_{(3)},\quad W_{(4)}$$

を得ることができる．

★１）　定義１

$W_{(1)}$の元に大小関係を導入する．$\aleph_\alpha \in W$に対して，$\aleph_{\alpha(1)} \in W_{(1)}$が対応する１対１写像を$f^+$で表す．すなわち，

$$f^+ : \aleph_\alpha \rightarrow \aleph_{\alpha(1)}$$

とする．ここで，$\aleph_\alpha$，$\aleph_\beta \in W$において，

（ア）$\aleph_\alpha < \aleph_\beta$　ならば　$f^+(\aleph_\alpha) > f^+(\aleph_\beta)$　すなわち　$\aleph_{\alpha(1)} > \aleph_{\beta(1)}$

（イ）$\aleph_\alpha = \aleph_\beta$　ならば　$f^+(\aleph_\alpha) = f^+(\aleph_\beta)$　すなわち　$\aleph_{\alpha(1)} = \aleph_{\beta(1)}$

（ウ）$\aleph_\alpha > \aleph_\beta$　ならば　$f^+(\aleph_\alpha) < f^+(\aleph_\beta)$　すなわち　$\aleph_{\alpha(1)} < \aleph_{\beta(1)}$

とする．

補足１：　Ｗが全順序な領域であるので，

$$\cdots < f^+(\aleph_\omega) < \cdots < f^+(\aleph_2) < f^+(\aleph_1) < f^+(\aleph_0)$$

であり，$W_{(1)}$も全順序な領域である．

★２）　定義２

$W_{(2)}$の元に大小関係を導入する．$\aleph_\alpha \in W$に対して，$\aleph_{\alpha(2)} \in W_{(2)}$が対応する１対１写像を$f^-$で表す．すなわち，

$$f^- : \aleph_\alpha \to \aleph_{\alpha(2)}$$

とする．ここで，$\aleph_\alpha$，$\aleph_\beta \in W$において，

（ア）$\aleph_\alpha < \aleph_\beta$　ならば　$f^-(\aleph_\alpha) < f^-(\aleph_\beta)$　すなわち　$\aleph_{\alpha(2)} < \aleph_{\beta(2)}$

（イ）$\aleph_\alpha = \aleph_\beta$　ならば　$f^-(\aleph_\alpha) = f^-(\aleph_\beta)$　すなわち　$\aleph_{\alpha(2)} = \aleph_{\beta(2)}$

（ウ）$\aleph_\alpha > \aleph_\beta$　ならば　$f^-(\aleph_\alpha) > f^-(\aleph_\beta)$　すなわち　$\aleph_{\alpha(2)} > \aleph_{\beta(2)}$

とする．

補足２：　Wが全順序な領域であるので，

$$f^-(\aleph_0) < f^-(\aleph_1) < f^-(\aleph_2) < \cdots < f^-(\aleph_\omega) < \cdots$$

であり，$W_{(2)}$も全順序な領域である．

★３）　定義３

$W_{(3)}$の元に大小関係を導入する．$\aleph_\alpha \in W$に対して，$\aleph_{\alpha(3)} \in W_{(3)}$が対応する１対１写像を$g^+$で表す．すなわち，

$$g^+ : \aleph_\alpha \to \aleph_{\alpha(3)}$$

とする．ここで，$\aleph_\alpha$，$\aleph_\beta \in W$において，

（ア）$\aleph_\alpha < \aleph_\beta$　ならば　$g^+(\aleph_\alpha) < g^+(\aleph_\beta)$　すなわち　$\aleph_{\alpha(3)} < \aleph_{\beta(3)}$

（イ）$\aleph_\alpha = \aleph_\beta$　ならば　$g^+(\aleph_\alpha) = g^+(\aleph_\beta)$　すなわち　$\aleph_{\alpha(3)} = \aleph_{\beta(3)}$

（ウ）$\aleph_\alpha > \aleph_\beta$　ならば　$g^+(\aleph_\alpha) > g^+(\aleph_\beta)$　すなわち　$\aleph_{\alpha(3)} > \aleph_{\beta(3)}$

とする．

補足３：　Wが全順序な領域であるので，

$$g^+(\aleph_0) < g^+(\aleph_1) < g^+(\aleph_2) < \cdots < g^+(\aleph_\omega) < \cdots$$

であり，$W_{(3)}$も全順序な領域である．

★４）　定義４

$W_{(4)}$の元に大小関係を導入する．$\aleph_\alpha \in W$に対して，$\aleph_{\alpha(4)} \in W_{(4)}$が対応する１対１写像を$g^-$で表す．すなわち，

$$g^- : \aleph_\alpha \to \aleph_{\alpha(4)}$$

とする．ここで，$\aleph_\alpha$，$\aleph_\beta \in W$において，

（ア）$\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ ならば $g^-(\aleph_\alpha) > g^-(\aleph_\beta)$ すなわち $\aleph_{\alpha(4)} > \aleph_{\beta(4)}$

（イ）$\aleph_\alpha = \aleph_\beta$ ならば $g^-(\aleph_\alpha) = g^-(\aleph_\beta)$ すなわち $\aleph_{\alpha(4)} = \aleph_{\beta(4)}$

（ウ）$\aleph_\alpha > \aleph_\beta$ ならば $g^-(\aleph_\alpha) < g^-(\aleph_\beta)$ すなわち $\aleph_{\alpha(4)} < \aleph_{\beta(4)}$

とする．

補足４：　Ｗが全順序な領域であるので，

$$\cdots < g^-(\aleph_\omega) < \cdots < g^-(\aleph_2) < g^-(\aleph_1) < g^-(\aleph_0)$$

であり，$W_{(4)}$も全順序な領域である．

★５）　定義５

$0 \in R$として，領域$\Pi = W_{(2)} \cup \{0\} \cup W_{(1)}$ の元に大小関係を導入する．

a，$b \in \Pi$とするとき，

（ア）a，$b \in W_{(1)}$で，$W_{(1)}$において$a < b$ならば，Πにおいても$a < b$

a，$b \in W_{(1)}$で，$W_{(1)}$において$a = b$ならば，Πにおいても$a = b$

a，$b \in W_{(1)}$で，$W_{(1)}$において$a > b$ならば，Πにおいても$a > b$

（イ）a，$b \in W_{(2)}$で，$W_{(2)}$において$a < b$ならば，Πにおいても$a < b$

a，$b \in W_{(2)}$で，$W_{(2)}$において$a = b$ならば，Πにおいても$a = b$

a，$b \in W_{(2)}$で，$W_{(2)}$において$a > b$ならば，Πにおいても$a > b$

（ウ）$a \in W_{(1)}$，$b \in W_{(2)}$ならば，$a > b$

（エ）$a = 0$，$b \in W_{(1)}$ならば，$a < b$

$a = 0$，$b \in W_{(2)}$ならば，$a > b$

$a = 0$，$b = 0$ならば，$a = b$

とする．

補足５：　$\aleph_\alpha < \aleph_\beta$とすれば，

$$f^-(\aleph_0) < f^-(\aleph_1) < f^-(\aleph_2) < \cdots < f^-(\aleph_\alpha) < \cdots < f^-(\aleph_\beta) <$$
$$\cdots < 0 < \cdots$$
$$< f^+(\aleph_\beta) < \cdots < f^+(\aleph_\alpha) < \cdots < f^+(\aleph_2) < f^+(\aleph_1) < f^+(\aleph_0)$$

であり，Πは全順序な領域である．

★６）　定義６

$a \in \Pi$の符号は，$a \in W_{(1)}$ならば正，$a \in W_{(2)}$ならば負，$a = 0$ならば零とする．

★７）　定義７

$a \in \Pi$のとき，記号$-a$の意味を，次のように定める．

（ア）$a = f^{+}(\aleph_{\alpha})$ならば，$-a = f^{-}(\aleph_{\alpha})$

（イ）$a = f^{-}(\aleph_{\alpha})$ならば，$-a = f^{+}(\aleph_{\alpha})$

（ウ）$a = 0$ならば，$-a = 0$

★８）　定義８

領域$\{t : f^{-}(\aleph_{\alpha}) \leqq t \leqq f^{+}(\aleph_{\alpha}),\ t \in \Pi\}$を，$\Pi_{\alpha}$で表す．

補足６：　$\Pi_{0} = \Pi$

★９）　定義９

$a \in \Pi$，$a \neq 0$ならば，$a = f^{+}(\aleph_{\alpha})$ または $a = f^{-}(\aleph_{\alpha})$となる順序数$\alpha$が一意に存在する．この$\alpha$を，$a$のレベルといい，$\ell(a)$で表す．$\ell(a) = \alpha$であることを$a_{\alpha}$で表すこともある．

★10）　定義10

$a \in \Pi$の絶対値$|a|$を，次のように定める．

（ア）$a = 0$ならば，$|a| = 0$

（イ）$\ell(a) = \alpha$ならば，$|a| = f^{+}(\aleph_{\alpha})$

★11）　定義11

a，$b \in \Pi$のとき，絶対値の小さくない方を，$A_{max}\{a, b\}$で表す．すなわち，

（ア）「$a \neq 0$，$b = 0$」または「$\ell(a) \leqq \ell(b)$」ならば，$A_{max}\{a, b\} = a$

（イ）「$a = 0$，$b \neq 0$」または「$\ell(a) \geqq \ell(b)$」ならば，$A_{max}\{a, b\} = b$

（ウ）「$a = 0$，$b = 0$」ならば，$A_{max}\{a, b\} = 0$

とする．

★12）　定義12

Πにおいて，次の加法を定義する．a，$b \in \Pi$のとき，

$$a + b = \begin{cases} A_{max}\{a, b\} & (a \neq -b) \\ \Pi_{\alpha} & (a = -b,\ \ell(a) = \alpha) \\ 0 & (a = b = 0) \end{cases}$$

★13)　定義13

ここで，「演算及び大小関係に関する規則」を定める．

Ｄが全順序領域で，Ｄの空でない部分領域すべての族をＵ(Ｄ)で表すとき，

(ア) 演算

ａ，ｂ∈Ｄにおいて，演算＊が，ａ＊ｂ∈Ｕ(Ｄ)となるように定義されているならば，Ａ，Ｂ∈Ｕ(Ｄ)に対して，

$$A * B = \bigcup_{a \in A,\ b \in B} (a * b)$$

とする．

(イ) 大小関係

Ａ，Ｂ∈Ｕ(Ｄ)に対して，

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a < b \text{ ならば},\ A < B$$

$$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leqq b \text{ ならば},\ A \leqq B$$

とする．

★14)　定義14

定義13において，Ｄに属する元を定数，Ｕ(Ｄ)−Ｄに属する元を不定数という．

補足７：　Ａ，Ｂ∈Ｕ(Ｄ)に対して，Ａ，Ｂの少なくとも片方が不定数ならば，Ａ≦Ｂは，「Ａ＝ＢまたはＡ＜Ｂ」の意味ではないので注意を要する．

★15)　定理１

Πにおける加法は，次の結果を得る．証明は，定義12，定義13による．

(ア) 交換法則が成り立つ．

(イ)
$$f^{+}(\aleph_\alpha) + b = \begin{cases} f^{+}(\aleph_\alpha) & (f^{-}(\aleph_\alpha) < b \leqq f^{+}(\aleph_\alpha)) \\ \Pi_\alpha & (b = f^{-}(\aleph_\alpha)) \\ b & (b < f^{-}(\aleph_\alpha) \text{ または } f^{+}(\aleph_\alpha) < b) \end{cases}$$

(ウ)
$$f^{-}(\aleph_\alpha) + b = \begin{cases} f^{-}(\aleph_\alpha) & (f^{-}(\aleph_\alpha) \leqq b < f^{+}(\aleph_\alpha)) \\ \Pi_\alpha & (b = f^{+}(\aleph_\alpha)) \\ b & (b < f^{-}(\aleph_\alpha) \text{ または } f^{+}(\aleph_\alpha) < b) \end{cases}$$

(エ)
$$\Pi_\alpha + b = \begin{cases} \Pi_\alpha & (b \in \Pi_\alpha) \\ b & (b \notin \Pi_\alpha) \end{cases}$$

（オ） $\Pi_{\alpha}+\Pi_{\beta}=\Pi_{\min\{\alpha,\ \beta\}}$

★16)　定理２

Πにおける加法は，結合法則が成り立つ．すなわち，ａ，ｂ，ｃ∈Πとすれば，

（ア） $(a+b)+c=a+(b+c)$

（イ） $(\Pi_{\alpha}+b)+c=\Pi_{\alpha}+(b+c)$

（ウ） $(a+\Pi_{\beta})+c=a+(\Pi_{\beta}+c)$

（エ） $(a+b)+\Pi_{\gamma}=a+(b+\Pi_{\gamma})$

（オ） $(\Pi_{\alpha}+\Pi_{\beta})+c=\Pi_{\alpha}+(\Pi_{\beta}+c)$

（カ） $(a+\Pi_{\beta})+\Pi_{\gamma}=a+(\Pi_{\beta}+\Pi_{\gamma})$

（キ） $(\Pi_{\alpha}+b)+\Pi_{\gamma}=\Pi_{\alpha}+(b+\Pi_{\gamma})$

（ク） $(\Pi_{\alpha}+\Pi_{\beta})+\Pi_{\gamma}=\Pi_{\alpha}+(\Pi_{\beta}+\Pi_{\gamma})$

が成り立つ．

（ア）の証明

ａ，ｂ，ｃのうちの，少なくとも１つが０ならば，明らかに成り立つので，$a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$とする．

（あ）　ａ，ｂ，ｃがすべて同符号ならば，

$$a=f^{+}(\aleph_{\alpha}),\quad b=f^{+}(\aleph_{\beta}),\quad c=f^{+}(\aleph_{\gamma})$$

または，

$$a=f^{-}(\aleph_{\alpha}),\quad b=f^{-}(\aleph_{\beta}),\quad c=f^{-}(\aleph_{\gamma})$$

であるが，いずれの場合も，

$$(a+b)+c=A_{\max}\{a,\ b,\ c\}=a+(b+c)$$

を得る．

（い）　その他のときは，$\ell(a)=\alpha$，$\ell(b)=\beta$，$\ell(c)=\gamma$として，次の場合に分ける．

（い－１） $\alpha=\beta=\gamma$の場合

（い－２） $\alpha<\beta,\ \gamma$の場合

（い－３） $\beta<\alpha,\ \gamma$の場合

（い－４） $\gamma<\alpha,\ \beta$の場合

（い－５） $\alpha=\beta<\gamma$の場合

（い－６） $\alpha=\gamma<\beta$の場合

（い－７） $\beta=\gamma<\alpha$の場合

（い－１）の場合は，$(a+b)+c=\Pi_{\alpha}=a+(b+c)$

（い－２）の場合は，$(a+b)+c=a=a+(b+c)$

（い－3）の場合は，$(a+b)+c=b=a+(b+c)$

（い－4）の場合は，$(a+b)+c=c=a+(b+c)$

（い－5）の場合は，$(a+b)+c=a+b=a+(b+c)$

（い－6）の場合は，$(a+b)+c=a+c=a+(b+c)$

（い－7）の場合は，$(a+b)+c=b+c=a+(b+c)$

を得る.

（イ）の証明

$b\in\Pi_\alpha$，$c\in\Pi_\alpha$ならば，$(\Pi_\alpha+b)+c=\Pi_\alpha=\Pi_\alpha+(b+c)$

$b\notin\Pi_\alpha$，$c\in\Pi_\alpha$ならば，$(\Pi_\alpha+b)+c=b=\Pi_\alpha+(b+c)$

$b\in\Pi_\alpha$，$c\notin\Pi_\alpha$ならば，$(\Pi_\alpha+b)+c=c=\Pi_\alpha+(b+c)$

$b\notin\Pi_\alpha$，$c\notin\Pi_\alpha$ならば，$(\Pi_\alpha+b)+c=b+c=\Pi_\alpha+(b+c)$

を得る.

（ウ）の証明

$a\in\Pi_\beta$，$c\in\Pi_\beta$ならば，$(a+\Pi_\beta)+c=\Pi_\beta=a+(\Pi_\beta+c)$

$a\notin\Pi_\beta$，$c\in\Pi_\beta$ならば，$(a+\Pi_\beta)+c=a=a+(\Pi_\beta+c)$

$a\in\Pi_\beta$，$c\notin\Pi_\beta$ならば，$(a+\Pi_\beta)+c=c=a+(\Pi_\beta+c)$

$a\notin\Pi_\beta$，$c\notin\Pi_\beta$ならば，$(a+\Pi_\beta)+c=a+c=a+(\Pi_\beta+c)$

を得る.

（エ）の証明

$a\in\Pi_\gamma$，$b\in\Pi_\gamma$ならば，$(a+b)+\Pi_\gamma=\Pi_\gamma=a+(b+\Pi_\gamma)$

$a\notin\Pi_\gamma$，$b\in\Pi_\gamma$ならば，$(a+b)+\Pi_\gamma=a=a+(b+\Pi_\gamma)$

$a\in\Pi_\gamma$，$b\notin\Pi_\gamma$ならば，$(a+b)+\Pi_\gamma=b=a+(b+\Pi_\gamma)$

$a\notin\Pi_\gamma$，$b\notin\Pi_\gamma$ならば，$(a+b)+\Pi_\gamma=a+b=a+(b+\Pi_\gamma)$

を得る.

（オ）の証明

$c\in\Pi_{\min\{\alpha,\beta\}}$ならば，$(\Pi_\alpha+\Pi_\beta)+c=\Pi_{\min\{\alpha,\beta\}}=\Pi_\alpha+(\Pi_\beta+c)$

$c\notin\Pi_{\min\{\alpha,\beta\}}$ならば，$(\Pi_\alpha+\Pi_\beta)+c=c=\Pi_\alpha+(\Pi_\beta+c)$

を得る.

（カ）の証明

$a\in\Pi_{\min\{\beta,\gamma\}}$ならば，$(a+\Pi_\beta)+\Pi_\gamma=\Pi_{\min\{\beta,\gamma\}}=a+(\Pi_\beta+\Pi_\gamma)$

$a\notin\Pi_{\min\{\beta,\gamma\}}$ならば，$(a+\Pi_\beta)+\Pi_\gamma=a=a+(\Pi_\beta+\Pi_\gamma)$

を得る.

（キ）の証明

$b \in \Pi_{\min\{\alpha, \gamma\}}$ならば，$(\Pi_\alpha + b) + \Pi_\gamma = \Pi_{\min\{\alpha, \gamma\}} = \Pi_\alpha + (b + \Pi_\gamma)$

$b \notin \Pi_{\min\{\alpha, \gamma\}}$ならば，$(\Pi_\alpha + b) + \Pi_\gamma = b = \Pi_\alpha + (b + \Pi_\gamma)$

を得る．

（ク）の証明

$(\Pi_\alpha + \Pi_\beta) + \Pi_\gamma = \Pi_{\min\{\alpha, \beta, \gamma\}} = \Pi_\alpha + (\Pi_\beta + \Pi_\gamma)$

を得る．

★17)　定義15

領域$P = W_{(4)} \cup R \cup W_{(3)}$ の元に大小関係を導入する．a，$b \in P$とするとき，

（ア）a，$b \in W_{(3)}$で，$W_{(3)}$において$a < b$ならば，Pにおいても$a < b$

a，$b \in W_{(3)}$で，$W_{(3)}$において$a = b$ならば，Pにおいても$a = b$

a，$b \in W_{(3)}$で，$W_{(3)}$において$a > b$ならば，Pにおいても$a > b$

（イ）a，$b \in W_{(4)}$で，$W_{(4)}$において$a < b$ならば，Pにおいても$a < b$

a，$b \in W_{(4)}$で，$W_{(4)}$において$a = b$ならば，Pにおいても$a = b$

a，$b \in W_{(4)}$で，$W_{(4)}$において$a > b$ならば，Pにおいても$a > b$

（ウ）a，$b \in R$で，Rにおいて$a < b$ならば，Pにおいても$a < b$

a，$b \in R$で，Rにおいて$a = b$ならば，Pにおいても$a = b$

a，$b \in R$で，Rにおいて$a > b$ならば，Pにおいても$a > b$

（エ）$a \in W_{(3)}$，$b \in R$ならば，$a > b$

（オ）$a \in W_{(4)}$，$b \in R$ならば，$a < b$

（カ）$a \in W_{(3)}$，$b \in W_{(4)}$ならば，$a > b$

とする．

補足８：　$\aleph_\alpha < \aleph_\beta$とすれば，

$$\cdots < g^-(\aleph_\beta) < \cdots < g^-(\aleph_\alpha) < \cdots < g^-(\aleph_2) < g^-(\aleph_1) < g^-(\aleph_0)$$

$$< R <$$

$$g^+(\aleph_0) < g^+(\aleph_1) < g^+(\aleph_2) < \cdots < g^+(\aleph_\alpha) < \cdots < g^+(\aleph_\beta) < \cdots$$

であり，Pは全順序な領域である．

★18)　定義16

$a \in P$のとき，記号$-a$の意味を，次のように定める．

（ア）$a \in R$ならば，$-a$はaの反数（符号が逆の実数）

（イ）$a = g^{+}(\aleph_{\alpha})$ならば，$-a = g^{-}(\aleph_{\alpha})$

（ウ）$a = g^{-}(\aleph_{\alpha})$ならば，$-a = g^{+}(\aleph_{\alpha})$

★19)　定義17

集合$\{t : g^{-}(\aleph_{\alpha}) \leqq t \leqq g^{+}(\aleph_{\alpha}),\ t \in P\}$を，$H_{\alpha}$で表す．

補足９：　$\bigcup_{\aleph_{\alpha} \in W} H_{\alpha} = P$

★20)　定義18

$a \in P$，$a \notin R$ならば，$a = g^{+}(\aleph_{\alpha})$ または $a = g^{-}(\aleph_{\alpha})$となる順序数$\alpha$が一意に存在する．この$\alpha$をaのレベルといい，$\ell(a)$で表す．$\ell(a) = \alpha$であることを$a_{\alpha}$で表すこともある．

★21)　定義19

$a \in P$の絶対値$|a|$を，次のように定める．

$$|a| = \begin{cases} |a| & (a \in R) \\ g^{+}(\aleph_{\alpha}) & (\ell(a) = \alpha) \end{cases}$$

★22)　定義20

a，$b \in P$のとき，絶対値の小さくない方を，$A_{max}\{a, b\}$で表す．すなわち，

（ア）「$a \in R$，$b \in R$」で$|a| \geqq |b|$ならば，$A_{max}\{a, b\} = a$

「$a \in R$，$b \in R$」で$|a| \leqq |b|$ならば，$A_{max}\{a, b\} = b$

（イ）「$a \notin R$，$b \in R$」または「$\ell(a) \geqq \ell(b)$」ならば，$A_{max}\{a, b\} = a$

「$a \in R$，$b \notin R$」または「$\ell(a) \leqq \ell(b)$」ならば，$A_{max}\{a, b\} = b$

とする．

★23)　定義21

Ｐにおいて，次の加法を定義する．ａ，ｂ∈Ｐのとき，

$$a+b=\begin{cases} a+b & (a,\ b\in R) \\ A_{\max}\{a,\ b\} & (a\notin R \text{ または } b\notin R \text{ で，} a\neq -b) \\ H_{\alpha} & (a\notin R,\ b\notin R \text{ で，} a=-b,\ a_{\alpha}) \end{cases}$$

★24)　定理３

Ｐにおける加法は，次の結果を得る．証明は，定義21，定義13による．

（ア）交換法則が成り立つ．

（イ）$$g^{+}(\aleph_{\alpha})+b=\begin{cases} g^{+}(\aleph_{\alpha}) & (g^{-}(\aleph_{\alpha})<b\leqq g^{+}(\aleph_{\alpha})) \\ H_{\alpha} & (b=g^{-}(\aleph_{\alpha})) \\ b & (b<g^{-}(\aleph_{\alpha}) \text{ または } g^{+}(\aleph_{\alpha})<b) \end{cases}$$

（ウ）$$g^{-}(\aleph_{\alpha})+b=\begin{cases} g^{-}(\aleph_{\alpha}) & (g^{-}(\aleph_{\alpha})\leqq b<g^{+}(\aleph_{\alpha})) \\ H_{\alpha} & (b=g^{+}(\aleph_{\alpha})) \\ b & (b<g^{-}(\aleph_{\alpha}) \text{ または } g^{+}(\aleph_{\alpha})<b) \end{cases}$$

（エ）$$H_{\alpha}+b=\begin{cases} H_{\alpha} & (b\in H_{\alpha}) \\ b & (b\notin H_{\alpha}) \end{cases}$$

（オ）$H_{\alpha}+H_{\beta}=H_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$

★25)　定理４

Ｐにおける加法は，結合法則が成り立つ．すなわち，ａ，ｂ，ｃ∈Ｐとすれば，

（ア）$(a+b)+c=a+(b+c)$

（イ）$(H_{\alpha}+b)+c=H_{\alpha}+(b+c)$

（ウ）$(a+H_{\beta})+c=a+(H_{\beta}+c)$

（エ）$(a+b)+H_{\gamma}=a+(b+H_{\gamma})$

（オ）$(H_{\alpha}+H_{\beta})+c=H_{\alpha}+(H_{\beta}+c)$

（カ）$(a+H_{\beta})+H_{\gamma}=a+(H_{\beta}+H_{\gamma})$

（キ）$(H_{\alpha}+b)+H_{\gamma}=H_{\alpha}+(b+H_{\gamma})$

（ク）$(H_{\alpha}+H_{\beta})+H_{\gamma}=H_{\alpha}+(H_{\beta}+H_{\gamma})$

が成り立つ．

（ア）の証明

次の場合に分ける．

（ア－１）$a \in R$，$b \in R$，$c \in$の場合

（ア－２）$a \in R$，$b \in R$，$c \notin R$の場合

（ア－３）$a \in R$，$b \notin R$，$c \in R$の場合

（ア－４）$a \notin R$，$b \in R$，$c \in R$の場合

（ア－５）$a \in R$，$b \notin R$，$c \notin R$の場合

（ア－６）$a \notin R$，$b \in R$，$c \notin R$の場合

（ア－７）$a \notin R$，$b \notin R$，$c \in R$の場合

（ア－８）$a \notin R$，$b \notin R$，$c \notin R$の場合

（ア－１）の場合は，Ｒが実数の集合であるので明らか．

（ア－２）の場合は，$(a+b)+c=c=a+(b+c)$

（ア－３）の場合は，$(a+b)+c=b=a+(b+c)$

（ア－４）の場合は，$(a+b)+c=a=a+(b+c)$

（ア－５）の場合は，$(a+b)+c=b+c=a+(b+c)$

（ア－６）の場合は，$(a+b)+c=a+c=a+(b+c)$

（ア－７）の場合は，$(a+b)+c=a+b=a+(b+c)$

（ア－８）の場合は，$\ell(a)=\alpha$，$\ell(b)=\beta$，$\ell(c)=\gamma$として，次の場合に分ける．

（ア－８－１）$\alpha=\beta=\gamma$の場合

（ア－８－２）$\alpha<\beta=\gamma$の場合

（ア－８－３）$\beta<\alpha=\gamma$の場合

（ア－８－４）$\gamma<\alpha=\beta$の場合

（ア－８－５）β，$\gamma<\alpha$の場合

（ア－８－６）α，$\gamma<\beta$の場合

（ア－８－７）α，$\beta<\gamma$の場合

（ア－８－１）の場合は，ａ，ｂ，ｃが，すべて同符合のときは両辺ともにａに等しく，その他のときは両辺ともにH_αに等しい．

（ア－８－２）の場合は，ｂ，ｃが同符合のときは両辺ともにｂに等しく，その他のときは両辺ともにH_βに等しい．

（ア－８－３）の場合は，ａ，ｃが同符合のときは両辺ともにｃに等しく，その他のときは両辺ともにH_γに等しい．

（ア－８－４）の場合は，ａ，ｂが同符合のときは両辺ともにａに等しく，その他のときは両辺ともにH_αに等しい．

（ア－８－５）の場合は，両辺ともにａに等しい．

（ア－８－６）の場合は，両辺ともにｂに等しい．

（ア－８－７）の場合は，両辺ともにｃに等しい．

（イ）の証明

$b \in H_{\alpha}$，$c \in H_{\alpha}$ならば，両辺ともにH_{α}に等しい．

$b \notin H_{\alpha}$，$c \in H_{\alpha}$ならば，両辺ともにｂに等しい．

$b \in H_{\alpha}$，$c \notin H_{\alpha}$ならば，両辺ともにｃに等しい．

$b \notin H_{\alpha}$，$c \notin H_{\alpha}$ならば，両辺ともに$b + c$に等しい．

（ウ）の証明

$a \in H_{\beta}$，$c \in H_{\beta}$ならば，両辺ともにH_{β}に等しい．

$a \notin H_{\beta}$，$c \in H_{\beta}$ならば，両辺ともにａに等しい．

$a \in H_{\beta}$，$c \notin H_{\beta}$ならば，両辺ともにｃに等しい．

$a \notin H_{\beta}$，$c \notin H_{\beta}$ならば，両辺ともに$a + c$に等しい．

（エ）の証明

$a \in H_{\gamma}$，$b \in H_{\gamma}$ならば，両辺ともにH_{γ}に等しい．

$a \notin H_{\gamma}$，$b \in H_{\gamma}$ならば，両辺ともにａに等しい．

$a \in H_{\gamma}$，$b \notin H_{\gamma}$ならば，両辺ともにｂに等しい．

$a \notin H_{\gamma}$，$b \notin H_{\gamma}$ならば，両辺ともに$a + b$に等しい．

（オ）の証明

$c \in H_{\max\{\alpha, \beta\}}$ならば，両辺ともに$H_{\max\{\alpha, \beta\}}$に等しい．

$c \notin H_{\max\{\alpha, \beta\}}$ならば，両辺ともにｃに等しい．

（カ）の証明

$a \in H_{\max\{\beta, \gamma\}}$ならば，両辺ともに$H_{\max\{\beta, \gamma\}}$に等しい．

$a \notin H_{\max\{\beta, \gamma\}}$ならば，両辺ともにａに等しい．

（キ）の証明

$b \in H_{\max\{\alpha, \gamma\}}$ならば，両辺ともに$H_{\max\{\alpha, \gamma\}}$に等しい．

$b \notin H_{\max\{\alpha, \gamma\}}$ならば，両辺ともにｂに等しい．

（ク）の証明

両辺ともに$H_{\max\{\alpha, \beta, \gamma\}}$に等しい．

★26)　定義22

$a \in P$，$b \in \Pi$ とするとき，条件

「$a \in R$，$b \in \Pi$」または「$a \in P$，$a \notin R$，$b = 0$」

を満たす順序対（a，b）の領域

$$\{(a, b) : a \in R,\ b \in \Pi\} \cup \{(a, b) : a \in P,\ a \notin R,\ b = 0\}$$

をDで表し，Dの元を拡大実数という．

★27)　定義23

領域Dの元に大小関係を導入する．$x = (a, b) \in D$，$y = (c, d) \in D$として，

（ア）「$a = c$，$b = d$」のとき，$x = y$

（イ）「$a < c$ または『$a = c$，$b < d$』」のとき，$x < y$

とする．

補足10：　領域P，Πが全順序領域であるので，Dも全順序領域である．

★28)　定義24

$x = (a, b) \in D$ ならば，$-x = (-a, -b)$ とする．

★29)　定義25

（ア）$x \in D$が，$(0, 0) < x$ ならば正の数，$x < (0, 0)$ ならば負の数とする．

（イ）正の数すべての領域をD^+で表し，負の数すべての領域をD^-で表す．

★30)　定義26

領域$\{t : (g^-(\aleph_\alpha), 0) \leqq t \leqq (g^+(\aleph_\alpha), 0),\ t \in D\}$を，$\Theta_\alpha$で表す．

補足11：　$\bigcup_{\aleph_\alpha \in W} \Theta_\alpha = D$

★31)　定義27

$x \in D$の絶対値$|x|$を，次のように定める．

$$|x| = \begin{cases} x & ((0, 0) \leqq x) \\ \\ -x & (x < (0, 0)) \end{cases}$$

★32)　定義28

$x \in D$を，次のように分類する．

（ア）$0 < |x| \leqq (0,\ f^{+}(\aleph_0))$のとき，無限小という．

（イ）「$(0,\ f^{+}(\aleph_0)) < |x| < (g^{+}(\aleph_0),\ 0)$」または$x = (0,\ 0)$のとき，有限という．

（ウ）$(g^{+}(\aleph_0),\ 0) \leqq |x|$のとき，無限大という．

（エ）無限小と有限を合わせて，有界という．

★33)　定義29

Dにおいて，次の加法を定義する．$x = (a,\ b) \in D$，$y = (c,\ d) \in D$とすれば，

$$x + y = \begin{cases} \{(a + c,\ t) : t \in b + d\} & (a \in R,\ c \in R) \\ A_{max}\{x,\ y\} & (a \notin R \text{ または } c \notin R \text{で，} x \neq -y) \\ \Theta_{\alpha} & (a \notin R,\ c \notin R \text{で，} x = -y,\ a_{\alpha}) \end{cases}$$

例：$x = (1,\ f^{+}(\aleph_0))$，$y = (2,\ f^{-}(\aleph_1))$とすれば，

$x + y = (1 + 2,\ f^{+}(\aleph_0) + f^{-}(\aleph_1)) = (3,\ f^{+}(\aleph_0))$

例：$x = (1,\ f^{+}(\aleph_0))$，$y = (2,\ f^{-}(\aleph_0))$とすれば，

$x + y = (1 + 2,\ f^{+}(\aleph_0) + f^{-}(\aleph_0)) = (3,\ \Pi_0) = \{(3,\ t) : t \in \Pi_0\}$

例：$x = (g^{+}(\aleph_0),\ 0)$，$y = (1,\ f^{+}(\aleph_0))$とすれば，

$x + y = A_{max}\{x,\ y\} = x$

例：$x = (g^{+}(\aleph_1),\ 0)$，$y = (g^{-}(\aleph_1),\ 0)$とすれば，

$x + y = \Theta_1$

★34)　約束

表記を簡潔にするために，Dの元を表す記号を，次のように簡略化して，必要に応じて用いる．

（ア）$(a,\ 0)$，$(0,\ b)$は，それぞれ，a，bと同一視する．

（イ）$g^{+}(\aleph_{\alpha})$，$g^{-}(\aleph_{\alpha})$を，それぞれ，∞_{α}，$-\infty_{\alpha}$で表す．

（ウ）$f^{+}(\aleph_{\alpha})$，$f^{-}(\aleph_{\alpha})$を，それぞれ，$1/\infty_{\alpha}$，$-1/\infty_{\alpha}$で表す．

例：（ア）$(0,\ 0)$を，0で表す．

（イ）$(g^{+}(\aleph_{\alpha}),\ 0)$を，$\infty_{\alpha}$で表す．

（ウ）$(0,\ f^{-}(\aleph_{\alpha}))$を，$-1/\infty_{\alpha}$で表す．

補足12：　Ｄの元を表す記号の簡略化により，$x\in D$が，

$$\infty_\alpha,\quad -\infty_\alpha,\quad 1/\infty_\alpha,\quad -1/\infty_\alpha$$

のいずれかであれば，$\ell(x)=\alpha$となる．また，x_αと表すこともある．

★35)　定理５

Ｄの元（ａ，ｂ）は，簡略記号を用いれば，$a+b$で表すことができる．

証明

$a\in R$ならば，$(a,\ b)=(a,\ 0)+(0,\ b)=a+b$

$a\notin R$ならば，定義22より，$b=0$であるので，

$$(a,\ b)=(a,\ 0)=a=A_{max}\{a,\ 0\}=a+0=a+b$$

である．

補足13：　以下，拡大実数$x\in D$を，

$$x=a+b,\quad a\in P,\quad b\in \Pi$$

のように表すときは，特にことわらなくとも，

$$a\in P,\quad a\notin R\text{ならば}b=0$$

とする．

★36)　定理６

Ｄにおける加法は，次の結果を得る．

（ア）交換法則が成り立つ．

（イ）有界の領域を，$《D》=\{(a,\ b):\ a\in R,\ b\in \Pi\}$で表せば，

（イ－１）$x\in《D》$ならば，$《D》+x=《D》$

（イ－２）$《D》+《D》=《D》$

（ウ）$$\infty_\alpha+y=\begin{cases}\infty_\alpha & (-\infty_\alpha<y\leqq\infty_\alpha)\\ \Theta_\alpha & (y=-\infty_\alpha)\\ y & (y<-\infty_\alpha\text{ または }\infty_\alpha<y)\end{cases}$$

（エ）$$-\infty_\alpha+y=\begin{cases}-\infty_\alpha & (-\infty_\alpha\leqq y<\infty_\alpha)\\ \Theta_\alpha & (y=\infty_\alpha)\\ y & (y<-\infty_\alpha\text{ または }\infty_\alpha<y)\end{cases}$$

（オ）$$\Theta_\alpha+y=\begin{cases}\Theta_\alpha & (y\in\Theta_\alpha)\\ y & (y\notin\Theta_\alpha)\end{cases}$$

（カ）$\Theta_\alpha + \Theta_\beta = \Theta_{\max\{\alpha,\beta\}}$

（ア）の証明

明らか.

（イ）の証明

（イ－１）は，$x = (c, d)$とすれば，$c \in R$，$d \in \Pi$であり，$R + c = R$，$\Pi + d = \Pi$であるので成り立つ.

（イ－２）は，（イ－１）による.

（ウ）の証明

$-\infty_\alpha < y \leqq \infty_\alpha$ ならば，$\infty_\alpha \neq -y$ であるので，$\infty_\alpha + y = A_{\max}\{\infty_\alpha, y\} = \infty_\alpha$.

$y = -\infty_\alpha$ ならば，$\infty_\alpha = -y$ であるので，$\infty_\alpha + y = \Theta_\alpha$.

$y < -\infty_\alpha$ または $\infty_\alpha < y$ ならば，$\infty_\alpha \neq -y$ であるので，

$$\infty_\alpha + y = A_{\max}\{\infty_\alpha, y\} = y.$$

（エ）の証明

$-\infty_\alpha \leqq y < \infty_\alpha$ ならば，$-\infty_\alpha \neq -y$ であるので，

$$-\infty_\alpha + y = A_{\max}\{-\infty_\alpha, y\} = -\infty_\alpha.$$

$y = \infty_\alpha$ ならば，$-\infty_\alpha = -y$ であるので，$-\infty_\alpha + y = \Theta_\alpha$.

$y < -\infty_\alpha$ または $\infty_\alpha < y$ ならば，$-\infty_\alpha \neq -y$ であるので，

$$-\infty_\alpha + y = A_{\max}\{-\infty_\alpha, y\} = y.$$

（オ）の証明

(ウ)，(エ)による.

（カ）の証明

(オ)による.

★37)　定理７

Dにおける加法は，結合法則が成り立つ．すなわち，$x, y, z \in D$とすれば，

（ア）$(x + y) + z = x + (y + z)$

（イ）$(\Theta_\alpha + y) + z = \Theta_\alpha + (y + z)$

（ウ）$(x + \Theta_\beta) + z = x + (\Theta_\beta + z)$

（エ）$(x + y) + \Theta_\gamma = x + (y + \Theta_\gamma)$

（オ）$(\Theta_\alpha + \Theta_\beta) + z = \Theta_\alpha + (\Theta_\beta + z)$

（カ）$(x + \Theta_\beta) + \Theta_\gamma = x + (\Theta_\beta + \Theta_\gamma)$

（キ）$(\Theta_\alpha + y) + \Theta_\gamma = \Theta_\alpha + (y + \Theta_\gamma)$

（ク）$(\Theta_\alpha + \Theta_\beta) + \Theta_\gamma = \Theta_\alpha + (\Theta_\beta + \Theta_\gamma)$

が成り立つ.

（ア）の証明

$x=(a,\ b)$, $y=(c,\ d)$, $z=(e,\ f)$として，次の場合に分ける.

（ア－１） $x\in《D》$, $y\in《D》$, $z\in《D》$の場合

（ア－２） $x\in《D》$, $y\in《D》$, $z\notin《D》$の場合

（ア－３） $x\in《D》$, $y\notin《D》$, $z\in《D》$の場合

（ア－４） $x\notin《D》$, $y\in《D》$, $z\in《D》$の場合

（ア－５） $x\in《D》$, $y\notin《D》$, $z\notin《D》$の場合

（ア－６） $x\notin《D》$, $y\in《D》$, $z\notin《D》$の場合

（ア－７） $x\notin《D》$, $y\notin《D》$, $z\in《D》$の場合

（ア－８） $x\notin《D》$, $y\notin《D》$, $z\notin《D》$の場合

（ア－１）の場合は，a, c, eはRの元より加法の結合法則が成り立ち，b, d, fはΠの元であるので，定理２より，加法の結合法則が成り立つ.

したがって，

$$
\begin{aligned}
(x+y)+z &= \{(a+c,\ t) : t\in b+d\}+(e,\ f) \\
&= \{((a+c)+e,\ t) : t\in(b+d)+f\} \\
&= \{(a+(c+e),\ t) : t\in b+(d+f)\} \\
&= (a,\ b)+\{(c+e,\ t) : t\in d+f\} \\
&= x+(y+z)
\end{aligned}
$$

（ア－２）の場合は,

$$(x+y)+z=z=x+(y+z)$$

（ア－３）の場合は,

$$(x+y)+z=y=x+(y+z)$$

（ア－４）の場合は,

$$(x+y)+z=x=x+(y+z)$$

（ア－５）の場合は,

$$(x+y)+z=y+z=x+(y+z)$$

（ア－６）の場合は,

$$(x+y)+z=x+z=x+(y+z)$$

（ア－７）の場合は,

$$(x+y)+z=x+y=x+(y+z)$$

（ア－８）の場合は，$\ell(\mathrm{x})=\alpha$，$\ell(\mathrm{y})=\beta$，$\ell(\mathrm{z})=\gamma$として，次の場合に分ける．

（ア－８－１）$\alpha=\beta=\gamma$の場合

（ア－８－２）$\alpha<\beta=\gamma$の場合

（ア－８－３）$\beta<\alpha=\gamma$の場合

（ア－８－４）$\gamma<\alpha=\beta$の場合

（ア－８－５）β，$\gamma<\alpha$の場合

（ア－８－６）α，$\gamma<\beta$の場合

（ア－８－７）α，$\beta<\gamma$の場合

（ア－８－１）の場合は，x，y，zが，全て同符合のときは両辺ともにxに等しく，
その他のときは両辺ともにΘ_αに等しい．

（ア－８－２）の場合は，y，zが同符合のときは両辺ともにyに等しく，
その他のときは両辺ともにΘ_βに等しい．

（ア－８－３）の場合は，x，zが同符合のときは両辺ともにzに等しく，
その他のときは両辺ともにΘ_γに等しい．

（ア－８－４）の場合は，x，yが同符合のときは両辺ともにxに等しく，
その他のときは両辺ともにΘ_αに等しい．

（ア－８－５）の場合は，両辺ともにxに等しい．

（ア－８－６）の場合は，両辺ともにyに等しい．

（ア－８－７）の場合は，両辺ともにzに等しい．

（イ）の証明

$\mathrm{y}\in\Theta_\alpha$，$\mathrm{z}\in\Theta_\alpha$ならば，両辺ともに$\Theta_\alpha$に等しい．

$\mathrm{y}\notin\Theta_\alpha$，$\mathrm{z}\in\Theta_\alpha$ならば，両辺ともにyに等しい．

$\mathrm{y}\in\Theta_\alpha$，$\mathrm{z}\notin\Theta_\alpha$ならば，両辺ともにzに等しい．

$\mathrm{y}\notin\Theta_\alpha$，$\mathrm{z}\notin\Theta_\alpha$ならば，両辺ともに$\mathrm{y}+\mathrm{z}$に等しい．

（ウ）の証明

$\mathrm{x}\in\Theta_\beta$，$\mathrm{z}\in\Theta_\beta$ならば，両辺ともに$\Theta_\beta$に等しい．

$\mathrm{x}\notin\Theta_\beta$，$\mathrm{z}\in\Theta_\beta$ならば，両辺ともにxに等しい．

$\mathrm{x}\in\Theta_\beta$，$\mathrm{z}\notin\Theta_\beta$ならば，両辺ともにzに等しい．

$\mathrm{x}\notin\Theta_\beta$，$\mathrm{z}\notin\Theta_\beta$ならば，両辺ともに$\mathrm{x}+\mathrm{z}$に等しい．

（エ）の証明

$\mathrm{x}\in\Theta_\gamma$，$\mathrm{y}\in\Theta_\gamma$ならば，両辺ともに$\Theta_\gamma$に等しい．

$\mathrm{x}\notin\Theta_\gamma$，$\mathrm{y}\in\Theta_\gamma$ならば，両辺ともにxに等しい．

$\mathrm{x}\in\Theta_\gamma$，$\mathrm{y}\notin\Theta_\gamma$ならば，両辺ともにyに等しい．

$x \notin \Theta_{\gamma}$，$y \notin \Theta_{\gamma}$ならば，両辺ともに$x+y$に等しい．

（オ）の証明

$z \in \Theta_{\max\{\alpha, \beta\}}$ならば，両辺ともに$\Theta_{\max\{\alpha, \beta\}}$に等しい．

$z \notin \Theta_{\max\{\alpha, \beta\}}$ならば，両辺ともに$z$に等しい．

（カ）の証明

$x \in \Theta_{\max\{\beta, \gamma\}}$ならば，両辺ともに$\Theta_{\max\{\beta, \gamma\}}$に等しい．

$x \notin \Theta_{\max\{\alpha, \beta\}}$ならば，両辺ともに$x$に等しい．

（キ）の証明

$y \in \Theta_{\max\{\alpha, \gamma\}}$ならば，両辺ともに$\Theta_{\max\{\alpha, \gamma\}}$に等しい．

$y \notin \Theta_{\max\{\alpha, \gamma\}}$ならば，両辺ともに$y$に等しい．

（ク）の証明

両辺ともに$\Theta_{\max\{\alpha, \beta, \gamma\}}$に等しい．

★38)　定義30

x，$y \in D$において，xとyのレベルがともに存在するときは，レベルの小さくない方を，また，片方だけレベルが存在するときは，そのレベルが存在する方を，

$$\ell_{\max}\{x, y\}$$

で表す．レベルがともに存在しないときは，$\ell_{\max}\{x, y\}$は定義しないものとする．

★39)　定義31

$x \in D$，$x \neq 0$ に対して，記号x^{-1}の意味を，次のように定める．

$x = \infty_{\alpha}$　ならば，$x^{-1} = 1/\infty_{\alpha}$

$x = -\infty_{\alpha}$　ならば，$x^{-1} = -1/\infty_{\alpha}$

$x = 1/\infty_{\alpha}$　ならば，$x^{-1} = \infty_{\alpha}$

$x = -1/\infty_{\alpha}$　ならば，$x^{-1} = -\infty_{\alpha}$

$x = (a, b)$，$a \in R$，$a \neq 0$ならば，$x^{-1} = (a^{-1}, -b)$

★40)　定義32

（ア）領域$\{t : 1/\infty_{\alpha} \leqq t \leqq \infty_{\alpha}\}$を，$\Sigma_{\alpha}$で表す．

（イ）領域$\{t : -\infty_{\alpha} \leqq t \leqq -1/\infty_{\alpha}\}$を，$-\Sigma_{\alpha}$で表す．

補足14：　$R^{+}=\{x : 0<x,\ x\in R\}$

$R^{-}=\{x : x<0,\ x\in R\}$

$\langle D^{+}\rangle=\{(a,\ b) : a\in R^{+},\ b\in \Pi\}$

$\langle D^{-}\rangle=\{(a,\ b) : a\in R^{-},\ b\in \Pi\}$

とすれば，

$$\Sigma_{\alpha}=\{1/\infty_{\mu} : 0\leqq\mu\leqq\alpha\}\cup\langle D^{+}\rangle\cup\{\infty_{\mu} : 0\leqq\mu\leqq\alpha\}$$

$$-\Sigma_{\alpha}=\{-\infty_{\mu} : 0\leqq\mu\leqq\alpha\}\cup\langle D^{-}\rangle\cup\{-1/\infty_{\mu} : 0\leqq\mu\leqq\alpha\}$$

である．

★41)　定義33

Dにおいて，次の乗法を定義する．

$$x\in D^{+},\ x=a+b,\ a\in P,\ b\in\Pi$$

$$y\in D^{+},\ y=c+d,\ c\in P,\ d\in\Pi$$

とすれば，

(ア) $$xy=\begin{cases} ac+(b+d) & (a\in R^{+},\ c\in R^{+}) \\ \ell_{\max}\{x,\ y\} & (\ell(x)\text{または}\ell(y)\text{が存在し，}x\neq y^{-1}) \\ \Sigma_{\alpha} & (\ell(x)=\ell(y)=\alpha\text{で，}x=y^{-1}) \end{cases}$$

(イ) $(-x)(-y)=xy,\qquad (-x)y=x(-y)=-(xy)$

(ウ) $^{\forall}z\in D,\ z0=0z=0$

例：$x=1+(1/\infty_{0})$，$y=2-(1/\infty_{1})$とすれば，

$$xy=1\cdot 2+\{(1/\infty_{0})-(1/\infty_{1})\}=2+(1/\infty_{0})$$

例：$x=1+(1/\infty_{0})$，$y=2-(1/\infty_{0})$とすれば，

$$xy=1\cdot 2+\{(1/\infty_{0})-(1/\infty_{0})\}=2+\Pi_{0}=\{2+t : t\in\Pi_{0}\}$$

例：$x=\infty_{0}$，$y=1+(1/\infty_{0})$とすれば，

$$xy=\ell_{\max}\{x,\ y\}=x$$

例：$x=\infty_{1}$，$y=1/\infty_{1}$とすれば，

$$xy=\Sigma_{1}$$

補足15：　定義33は，ａ，ｃが正の実数である拡大実数の乗法を，

$$(a+b)(c+d)=ac+(b+d) \quad \cdots (*)$$

と定めている．従来の乗法の基本からすれば，

$$(a+b)(c+d)=ac+(ad+bc+bd)$$

とするのが自然であるが，あえて（＊）と定義するのは，

$$ad+bc+bd=b+d$$

が成り立つからである．実際に確かめると，

「$b=1/\infty_{\alpha}$，$d=1/\infty_{\beta}$」の場合は，

$\alpha<\beta$ ならば，

$$ad+bc+bd=1/\infty_{\beta}+1/\infty_{\alpha}+1/\infty_{\beta}=1/\infty_{\alpha}=b+d$$

$\alpha=\beta$ ならば，

$$ad+bc+bd=1/\infty_{\beta}+1/\infty_{\alpha}+1/\infty_{\beta}=1/\infty_{\alpha}=b+d$$

$\alpha>\beta$ ならば，

$$ad+bc+bd=1/\infty_{\beta}+1/\infty_{\alpha}+1/\infty_{\alpha}=1/\infty_{\beta}=b+d$$

「$b=1/\infty_{\alpha}$，$d=-1/\infty_{\beta}$」の場合は，

$\alpha<\beta$ ならば，

$$ad+bc+bd=-1/\infty_{\beta}+1/\infty_{\alpha}-1/\infty_{\beta}=1/\infty_{\alpha}=b+d$$

$\alpha=\beta$ ならば，

$$ad+bc+bd=-1/\infty_{\beta}+1/\infty_{\alpha}-1/\infty_{\beta}=\Pi_{\alpha}=b+d$$

$\alpha>\beta$ ならば，

$$ad+bc+bd=-1/\infty_{\beta}+1/\infty_{\alpha}-1/\infty_{\alpha}=-1/\infty_{\beta}=b+d$$

「$b=1/\infty_{\alpha}$，$d=0$」の場合は，

$$ad+bc+bd=1/\infty_{\alpha}=b+d$$

「$b=-1/\infty_{\alpha}$，$d=0$」の場合は，

$$ad+bc+bd=-1/\infty_{\alpha}=b+d$$

「$b=0$，$d=0$」の場合は，

$$ad+bc+bd=0=b+d$$

であり，他の場合も同様である．

★42)　定理８

Dにおける乗法は，次の結果を得る．

（ア）交換法則が成り立つ．

（イ）$y \in D^+$とすれば，

（イ－１）$$\infty_\alpha y = \begin{cases} \infty_\alpha & (1/\infty_\alpha < y \leqq \infty_\alpha) \\ \Sigma_\alpha & (y = 1/\infty_\alpha) \\ y & (y < 1/\infty_\alpha \text{ または } \infty_\alpha < y) \end{cases}$$

（イ－２）$$(1/\infty_\alpha)\, y = \begin{cases} 1/\infty_\alpha & (1/\infty_\alpha \leqq y < \infty_\alpha) \\ \Sigma_\alpha & (y = \infty_\alpha) \\ y & (y < 1/\infty_\alpha \text{ または } \infty_\alpha < y) \end{cases}$$

（イ－３）$$\Sigma_\alpha y = \begin{cases} \Sigma_\alpha & (y \in \Sigma_\alpha) \\ y & (y \notin \Sigma_\alpha) \end{cases}$$

（イ－４）$\Sigma_\alpha \Sigma_\beta = \Sigma_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$

★43)　定理９

Dにおける乗法は，結合法則が成り立つ．すなわち，$x,\ y,\ z \in D^+$とすれば，

（ア）$(x y) z = x (y z)$

（イ）$(\Sigma_\alpha y) z = \Sigma_\alpha (y z)$

（ウ）$(x \Sigma_\beta) z = x (\Sigma_\beta z)$

（エ）$(x y) \Sigma_\gamma = x (y \Sigma_\gamma)$

（オ）$(\Sigma_\alpha \Sigma_\beta) z = \Sigma_\alpha (\Sigma_\beta z)$

（カ）$(x \Sigma_\beta) \Sigma_\gamma = x (\Sigma_\beta \Sigma_\gamma)$

（キ）$(\Sigma_\alpha y) \Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha (y \Sigma_\gamma)$

（ク）$(\Sigma_\alpha \Sigma_\beta) \Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha (\Sigma_\beta \Sigma_\gamma)$

が成り立つ．

（ア）の証明

$x = a + b,\quad y = c + d,\quad z = e + f,\quad a,\ c,\ e \in P,\quad b,\ d,\ f \in \Pi$

として，次の場合に分ける．

（ア－１）$a \in R^+$，$c \in R^+$，$e \in R^+$の場合

（ア－２）$a \in R^+$，$c \in R^+$，$e \notin R^+$の場合

（ア－３）$a \in R^+$，$c \notin R^+$，$e \in R^+$の場合

（ア－４）$a \notin R^+$，$c \in R^+$，$e \in R^+$の場合

（ア－５）$a \in R^{+}$，$c \notin R^{+}$，$e \notin R^{+}$の場合

（ア－６）$a \notin R^{+}$，$c \in R^{+}$，$e \notin R^{+}$の場合

（ア－７）$a \notin R^{+}$，$c \notin R^{+}$，$e \in R^{+}$の場合

（ア－８）$a \notin R^{+}$，$c \notin R^{+}$，$e \notin R^{+}$の場合

（ア－１）の場合は，a，c，eはR^{+}の元より乗法の結合法則が成り立ち，b，d，fはΠの元であるので,定理２より,加法の結合法則が成り立つ.したがって,

$$
\begin{aligned}
(xy)z &= \{ac+(b+d)\}(e+f) \\
&= (ac)e+\{(b+d)+f\} \\
&= a(ce)+\{b+(d+f)\} \\
&= (a+b)\{ce+(d+f)\} \\
&= x(yz)
\end{aligned}
$$

（ア－２）の場合は，$(xy)z = z = x(yz)$

（ア－３）の場合は，$(xy)z = y = x(yz)$

（ア－４）の場合は，$(xy)z = x = x(yz)$

（ア－５）の場合は，$(xy)z = yz = x(yz)$

（ア－６）の場合は，$(xy)z = xz = x(yz)$

（ア－７）の場合は，$(xy)z = xy = x(yz)$

（ア－８）の場合は，$\ell(x)=\alpha$，$\ell(y)=\beta$，$\ell(z)=\gamma$として，次の場合に分ける.

（ア－８－１）$\alpha=\beta=\gamma$の場合

（ア－８－２）$\alpha<\beta=\gamma$の場合

（ア－８－３）$\beta<\alpha=\gamma$の場合

（ア－８－４）$\gamma<\alpha=\beta$の場合

（ア－８－５）β，$\gamma<\alpha$の場合

（ア－８－６）α，$\gamma<\beta$の場合

（ア－８－７）α，$\beta<\gamma$の場合

（ア－８－１）の場合は，$x=y=z=\infty_{\alpha}$ または $x=y=z=1/\infty_{\alpha}$のときは両辺ともにxに等しく，その他のときは両辺ともにΣ_{α}に等しい.

（ア－８－２）の場合は，$y=z=\infty_{\beta}$ または $y=z=1/\infty_{\beta}$のときは両辺ともにyに等しく，その他のときは両辺ともにΣ_{β}に等しい.

（ア－８－３）の場合は，$x=z=\infty_{\gamma}$ または $x=z=1/\infty_{\gamma}$のときは両辺ともにzに等しく，その他のときは両辺ともにΣ_{γ}に等しい.

（ア－８－４）の場合は，$x=y=\infty_{\alpha}$ または $x=y=1/\infty_{\alpha}$のときは両辺ともにxに等しく，その他のときは両辺ともにΣ_{α}に等しい.

（ア－８－５）の場合は，両辺ともにxに等しい．

（ア－８－６）の場合は，両辺ともにyに等しい．

（ア－８－７）の場合は，両辺ともにzに等しい．

（イ）の証明

$y \in \Sigma_{\alpha}$，　$z \in \Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにΣ_{α}に等しい．

$y \notin \Sigma_{\alpha}$，　$z \in \Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにyに等しい．

$y \in \Sigma_{\alpha}$，　$z \notin \Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにzに等しい．

$y \notin \Sigma_{\alpha}$，　$z \notin \Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともに$y\,z$に等しい．

（ウ）の証明

$x \in \Sigma_{\beta}$，　$z \in \Sigma_{\beta}$ならば，両辺ともにΣ_{β}に等しい．

$x \notin \Sigma_{\beta}$，　$z \in \Sigma_{\beta}$ならば，両辺ともにxに等しい．

$x \in \Sigma_{\beta}$，　$z \notin \Sigma_{\beta}$ならば，両辺ともにzに等しい．

$x \notin \Sigma_{\beta}$，　$z \notin \Sigma_{\beta}$ならば，両辺ともに$x\,z$に等しい．

（エ）の証明

$x \in \Sigma_{\gamma}$，　$y \in \Sigma_{\gamma}$ならば，両辺ともにΣ_{γ}に等しい．

$x \notin \Sigma_{\gamma}$，　$y \in \Sigma_{\gamma}$ならば，両辺ともにxに等しい．

$x \in \Sigma_{\gamma}$，　$y \notin \Sigma_{\gamma}$ならば，両辺ともにyに等しい．

$x \notin \Sigma_{\gamma}$，　$y \notin \Sigma_{\gamma}$ならば，両辺ともに$x\,y$に等しい．

（オ）の証明

$z \in \Sigma_{\max\{\alpha, \beta\}}$ならば，両辺ともに$\Sigma_{\max\{\alpha, \beta\}}$に等しい．

$z \notin \Sigma_{\max\{\alpha, \beta\}}$ならば，両辺ともに$z$に等しい．

（カ）の証明

$x \in \Sigma_{\max\{\beta, \gamma\}}$ならば，両辺ともに$\Sigma_{\max\{\beta, \gamma\}}$に等しい．

$x \notin \Sigma_{\max\{\alpha, \beta\}}$ならば，両辺ともに$x$に等しい．

（キ）の証明

$y \in \Sigma_{\max\{\alpha, \gamma\}}$ならば，両辺ともに$\Sigma_{\max\{\alpha, \gamma\}}$に等しい．

$y \notin \Sigma_{\max\{\alpha, \gamma\}}$ならば，両辺ともに$y$に等しい．

（ク）の証明

両辺ともに$\Sigma_{\max\{\alpha, \beta, \gamma\}}$に等しい．

★44)　分配法則

拡大実数の分配法則は，一般的には成り立たない．実際，

$$x=\infty_{\alpha},\quad y=2,\quad z=-1$$

とすれば，

$$x(y+z)=\infty_{\alpha}(2-1)=\infty_{\alpha}\cdot 1=\infty_{\alpha}$$

$$xy+xz=\infty_{\alpha}\cdot 2+\infty_{\alpha}\cdot(-1)=\infty_{\alpha}-\infty_{\alpha}=\Theta_{\alpha}$$

である．しかし，次の定理を得る．

★45)　定理10（定理13の予備定理１）

$$-x+(-y)=-(x+y)$$

証明

初めに，ｘ，ｙがともに無限小の場合・・・（＊）を証明する．

$x=1/\infty_{\alpha}$，$y=1/\infty_{\beta}$ならば，

$$\begin{aligned}(-x)+(-y)&=-1/\infty_{\alpha}+(-1/\infty_{\beta})\\&=-1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-(x+y)&=-(1/\infty_{\alpha}+1/\infty_{\beta})\\&=-1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}}\end{aligned}$$

$x=-1/\infty_{\alpha}$，$y=-1/\infty_{\beta}$ならば，

$$\begin{aligned}(-x)+(-y)&=1/\infty_{\alpha}+1/\infty_{\beta}\\&=1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-(x+y)&=-\{-1/\infty_{\alpha}+(-1/\infty_{\beta})\}\\&=-(-1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}})\\&=1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}})\end{aligned}$$

$x=1/\infty_{\alpha}$，$y=-1/\infty_{\beta}$ならば，

$$(-x)+(-y)=-1/\infty_{\alpha}+1/\infty_{\beta}$$

$$=\begin{cases}-1/\infty_{\alpha} & (\alpha<\beta)\\ \Pi_{\alpha} & (\alpha=\beta)\\ 1/\infty_{\beta} & (\alpha>\beta)\end{cases}$$

$$-(x+y)=-\{1/\infty_{\alpha}+(-1/\infty_{\beta})\}$$

$$=\begin{cases}-1/\infty_{\alpha} & (\alpha<\beta)\\ -\Pi_{\alpha} & (\alpha=\beta)\\ -(-1/\infty_{\beta}) & (\alpha>\beta)\end{cases}$$

$$
=\begin{cases} -1/\infty_{\alpha} & (\alpha<\beta) \\ \Pi_{\alpha} & (\alpha=\beta) \\ 1/\infty_{\beta} & (\alpha>\beta) \end{cases}
$$

$x=-1/\infty_{\alpha}$， $y=1/\infty_{\beta}$ならば，

$$
(-x)+(-y)=1/\infty_{\alpha}+(-1/\infty_{\beta})
$$

$$
=\begin{cases} 1/\infty_{\alpha} & (\alpha<\beta) \\ \Pi_{\alpha} & (\alpha=\beta) \\ -1/\infty_{\beta} & (\alpha>\beta) \end{cases}
$$

$$
-(x+y)=-\{-1/\infty_{\alpha}+1/\infty_{\beta}\}
$$

$$
=\begin{cases} -(-1/\infty_{\alpha}) & (\alpha<\beta) \\ -\Pi_{\alpha} & (\alpha=\beta) \\ -1/\infty_{\beta} & (\alpha>\beta) \end{cases}
$$

$$
=\begin{cases} 1/\infty_{\alpha} & (\alpha<\beta) \\ \Pi_{\alpha} & (\alpha=\beta) \\ -1/\infty_{\beta} & (\alpha>\beta) \end{cases}
$$

（ア）　x，yがともに有界の場合

$x=a+b$，$y=c+d$とすれば，a，$c\in R$，b，$d\in\Pi$であるので，

$$
\begin{aligned}
(-x)+(-y)&=(-a,\ -b)+(-c,\ -d) \\
&=\{(-a+(-c),\ t):\ t\in(-b+(-d))\} \\
&=\{(-a+(-c),\ t):\ t\in-(b+d)\} \qquad (\because(*)) \\
&=\{(-(a+c),\ -t):\ t\in(b+d)\} \\
&=\{-(a+c,\ t):\ t\in(b+d)\} \\
&=-\{(a+c,\ t):\ t\in(b+d)\} \\
&=-\{(a,\ b)+(c,\ d)\} \\
&=-(x+y)
\end{aligned}
$$

（イ）　x，yの少なくとも片方が無限大の場合

xが無限大でyが有界ならば，

$$
(-x)+(-y)=-x=-(x+y)
$$

xが有界でyが無限大ならば，

$$
(-x)+(-y)=-y=-(x+y)
$$

$x=\infty_{\alpha}$，$y=\infty_{\beta}$ならば，

$$
(-x)+(-y)=-\infty_{\alpha}+(-\infty_{\beta})=-\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}
$$

$$
-(x+y)=-(\infty_{\alpha}+\infty_{\beta})=-\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}
$$

$x=-\infty_\alpha$, $y=-\infty_\beta$ ならば,

$$(-x)+(-y)=\infty_\alpha+\infty_\beta=\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$$

$$-(x+y)=-\{(-\infty_\alpha)+(-\infty_\beta)\}=-(-\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}})=\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$$

$x=-\infty_\alpha$, $y=\infty_\beta$ ならば,

$$(-x)+(-y)=\infty_\alpha-\infty_\beta$$

$$=\begin{cases}-\infty_\beta & (\alpha<\beta)\\ \boldsymbol{\Theta}_\alpha & (\alpha=\beta)\\ \infty_\alpha & (\alpha>\beta)\end{cases}$$

$$-(x+y)=-(-\infty_\alpha+\infty_\beta)$$

$$=\begin{cases}-\infty_\beta & (\alpha<\beta)\\ -\boldsymbol{\Theta}_\alpha & (\alpha=\beta)\\ -(-\infty_\alpha) & (\alpha>\beta)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\infty_\beta & (\alpha<\beta)\\ \boldsymbol{\Theta}_\alpha & (\alpha=\beta)\\ \infty_\alpha & (\alpha>\beta)\end{cases}$$

$x=\infty_\alpha$, $y=-\infty_\beta$ ならば,

$$(-x)+(-y)=-\infty_\alpha+\infty_\beta$$

$$=\begin{cases}\infty_\beta & (\alpha<\beta)\\ \boldsymbol{\Theta}_\alpha & (\alpha=\beta)\\ -\infty_\alpha & (\alpha>\beta)\end{cases}$$

$$-(x+y)=-\{\infty_\alpha+(-\infty_\beta)\}$$

$$=\begin{cases}-(-\infty_\beta) & (\alpha<\beta)\\ -\boldsymbol{\Theta}_\alpha & (\alpha=\beta)\\ -\infty_\alpha & (\alpha>\beta)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\infty_\beta & (\alpha<\beta)\\ \boldsymbol{\Theta}_\alpha & (\alpha=\beta)\\ -\infty_\alpha & (\alpha>\beta)\end{cases}$$

★46)　定理11（定理13の予備定理２）

$x, y, z \in D^{+}$とすれば，

（ア）　$x(y+z)=xy+xz$ ・・・（＊）

が成り立てば，次の関係式も成り立つ．

（ア－１）　$x\{(-y)+(-z)\}=x(-y)+x(-z)$

（ア－２）　$(-x)(y+z)=(-x)y+(-x)z$

（ア－３）　$(-x)\{(-y)+(-z)\}=(-x)(-y)+(-x)(-z)$

（イ）　$x\{y+(-z)\}=xy+x(-z)$ ・・・（＊＊）

が成り立てば，次の関係式も成り立つ．

（イ－１）　$x\{(-y)+z\}=x(-y)+xz$

（イ－２）　$(-x)\{y+(-z)\}=(-x)y+(-x)(-z)$

（イ－３）　$(-x)\{(-y)+z\}=(-x)(-y)+(-x)z$

（ア）の証明

定理10と（＊）より，

（ア－１）は，
$$\begin{aligned} x\{(-y)+(-z)\} &= x\{-(y+z)\} \\ &= -\{x(y+z)\} \\ &= -(xy+xz) \\ &= \{-(xy)\}+\{-(xz)\} \\ &= x(-y)+x(-z) \end{aligned}$$

（ア－２）は，
$$\begin{aligned} (-x)(y+z) &= -\{x(y+z)\} \\ &= -(xy+xz) \\ &= \{-(xy)\}+\{-(xz)\} \\ &= (-x)y+(-x)z \end{aligned}$$

（ア－３）は，
$$\begin{aligned} (-x)\{(-y)+(-z)\} &= (-x)\{-(y+z)\} \\ &= x(y+z) \\ &= xy+xz \\ &= (-x)(-y)+(-x)(-z) \end{aligned}$$

（イ）の証明

定理10と（＊＊）より，

（イ－１）は，
$$\begin{aligned} x\{(-y)+z\} &= x\{-(y+(-z))\} \\ &= -\{x(y+(-z))\} \\ &= -\{xy+x(-z)\} \\ &= -\{xy+(-xz)\} \end{aligned}$$

$$=-(xy)+xz$$
$$=x(-y)+xz$$

（イ－２）は，　$(-x)\{y+(-z)\}=-\{x(y+(-z))\}$
$$=-\{xy+x(-z)\}$$
$$=-\{xy+(-xz)\}$$
$$=-(xy)+xz$$
$$=(-x)y+(-x)(-z)$$

（イ－３）は，　$(-x)\{(-y)+z\}=(-x)\{-(y+(-z))\}$
$$=x\{y+(-z)\}$$
$$=xy+x(-z)$$
$$=(-x)(-y)+(-x)z$$

★47)　定理12（定理13の予備定理３）

$x, y, z\in D^+$とするとき，次の式が成り立つ.

（ア）$x(y+z)=xy+xz$

（イ）$xy+x(-z)$が定数ならば，$x\{y+(-z)\}=xy+x(-z)$

証明

$x, y, z\in D^+$を，それぞれ，無限小、有限、無限大の場合に分けて，

$x(y+z)$，　$xy+xz$，　$x\{y+(-z)\}$，　$xy+x(-z)$

の値を，それぞれ求めて一覧表にすれば，(ア)，(イ)ともに，容易に確かめることができる.（参考文献［６］p．１０１）

★48)　定理13

$x, y, z\in D$における分配法則 $x(y+z)=xy+xz$ は，

（ア）x, y, zの少なくとも１つが０ならば成り立つ.

（イ）y, zが同符合ならば成り立つ.

（ウ）$xy+xz$が定数ならば成り立つ.

（ア）の証明

明らか.

（イ）の証明

(ア)より，$x\neq 0$，$y\neq 0$，$z\neq 0$の場合を証明すればよい．そして，この場合は，定理11の(ア)と定理12の(ア)より成り立つ.

（ウ）の証明

（ア）より，$x \neq 0$，$y \neq 0$，$z \neq 0$ の場合を証明すればよい．更に，（イ）より，y，z が異符号の場合を証明すればよい. そして, この場合は, 定理11の（イ）と定理12の（イ）より成り立つ.

補足16：　以上により，拡大実数すべての領域Dは，

（ア）全順序領域である．

（イ）加法の交換法則，結合法則が成り立つ．

（ウ）乗法の交換法則，結合法則が成り立つ．

（エ）ある条件があれば，分配法則が成り立つ．

したがって，拡大実数は，数として市民権を得られる程度には，諸定理が成り立つ．問題は，この拡大実数が，何の役に立つかである．この問題については，第３章で解説する．

第２章　実核・超実核

$$D=\{(a,\ b):\ a\in R,\ b\in\Pi_0\}\cup\{(a,\ b):\ a\in P,\ a\notin R,\ b=0\}$$

であるので,

$$D=\bigcup_{a\in R}(a+\Pi_0)\cup\{\infty_\alpha:\aleph_\alpha\in W\}\cup\{-\infty_\alpha:\aleph_\alpha\in W\}$$

と表すことができる．ここで,

（ア）　不定数 $a+\Pi_0$，$\{\infty_\alpha:\aleph_\alpha\in W\}$，$\{-\infty_\alpha:\aleph_\alpha\in W\}$ を，それぞれ,

$$\zeta(a),\qquad \zeta(\infty_0),\qquad \zeta(-\infty_0)$$

で表し，これらの不定数を実核という.

（イ）　実核 $\zeta(a)$，$\zeta(\infty_0)$，$\zeta(-\infty_0)$ に属する a，∞_0，$-\infty_0$ を，それぞれの実核の基という.

（ウ）　実核の基すべての集合 $R\cup\{\infty_0,\ -\infty_0\}$ を，$[R]$ で表す.

（エ）　$\zeta(a)$ を有限実核といい，$\zeta(\infty_0)$，$\zeta(-\infty_0)$ を無限大実核という.

（オ）　有限実核全ての集合 $\{\zeta(a):\ a\in R\}$ を $\boldsymbol{R}$ で表し，実核全ての集合

$$\boldsymbol{R}\cup\{\zeta(\infty_0),\ \zeta(-\infty_0)\}$$

を $[\boldsymbol{R}]$ で表す.

第２章は，この実核の性質を解説する.

★49)　定理14

有限実核の基に，その有限実核が対応する写像　$f:R\to\boldsymbol{R}$ は，大小関係，加法，乗法についての同型写像である．すなわち,

（ア）大小関係

$a,\ b\in R$ ならば,

$$a<b\ \Leftrightarrow\ \zeta(a)<\zeta(b)$$
$$a=b\ \Leftrightarrow\ \zeta(a)=\zeta(b)$$
$$a>b\ \Leftrightarrow\ \zeta(a)>\zeta(b)$$

（イ）加法

$a,\ b\in R$ ならば,

$$\zeta(a)+\zeta(b)=\zeta(a+b)$$

（ウ）乗法

$a,\ b\in R^+$ ならば,

$$\zeta(a)\zeta(b)=\zeta(ab),\qquad \zeta(-a)\zeta(-b)=\zeta((-a)(-b))$$

$$\zeta(a)\zeta(-b)=\zeta(a(-b)), \qquad \zeta(-a)\zeta(b)=\zeta((-a)b)$$
$$\zeta(a)\zeta(0)=\zeta(a\,0), \qquad \zeta(0)\zeta(b)=\zeta(0\,b)$$
$$\zeta(-a)\zeta(0)=\zeta((-a)0), \qquad \zeta(0)\zeta(-b)=\zeta(0(-b))$$
$$\zeta(0)\zeta(0)=\zeta(0\,0)$$

が成り立つ.

（ア）の証明

$a, b \in R$ より,

$$a<b \Leftrightarrow a+\Pi_0<b+\Pi_0$$
$$a=b \Leftrightarrow a+\Pi_0=b+\Pi_0$$
$$a>b \Leftrightarrow a+\Pi_0>b+\Pi_0$$

（イ）の証明

$a, b \in R$ より,

$$\begin{aligned}\zeta(a)+\zeta(b)&=(a+\Pi_0)+(b+\Pi_0)\\&=(a+b)+\Pi_0 \qquad (\because \Pi_0+\Pi_0=\Pi_0)\\&=\zeta(a+b)\end{aligned}$$

（ウ）の証明

$a, b \in R^+$ より,

$$\begin{aligned}\zeta(a)\zeta(b)&=(a+\Pi_0)(b+\Pi_0)\\&=(a\,b)+\Pi_0\\&=\zeta(a\,b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(-a)\zeta(-b)&=(-(a+\Pi_0))(-(b+\Pi_0)) \quad (\because -\Pi_0=\Pi_0)\\&=(a\,b)+\Pi_0\\&=((-a)(-b))+\Pi_0\\&=\zeta((-a)(-b))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(a)\zeta(-b)&=(a+\Pi_0)(-(b+\Pi_0))\\&=-((a\,b)+\Pi_0)\\&=-(a\,b)-\Pi_0\\&=a(-b)+\Pi_0\\&=\zeta(a(-b))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(-a)\zeta(b)&=(-(a+\Pi_0))(b+\Pi_0)\\&=-((a\,b)+\Pi_0)\\&=-(a\,b)-\Pi_0\\&=(-a)b+\Pi_0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \zeta((-a)b) \\
\zeta(a)\zeta(0) &= (a+\Pi_0)\Pi_0 \\
&= \Pi_0 \\
&= \zeta(0) \\
&= \zeta(a\,0) \\
\zeta(0)\zeta(b) &= \Pi_0(b+\Pi_0) \\
&= \Pi_0 \\
&= \zeta(0) \\
&= \zeta(0\,b) \\
\zeta(-a)\zeta(0) &= -(a+\Pi_0)\Pi_0 \\
&= \Pi_0 \\
&= \zeta(0) \\
&= \zeta((-a)0) \\
\zeta(0)\zeta(-b) &= \Pi_0(-(b+\Pi_0)) \\
&= \Pi_0 \\
&= \zeta(0) \\
&= \zeta(0(-b)) \\
\zeta(0)\zeta(0) &= \Pi_0\Pi_0 \\
&= \Pi_0 \\
&= \zeta(0) \\
&= \zeta(0\,0)
\end{aligned}
$$

補足17：　定理14を，拡張すれば，次の定理が成り立つ．

　実核の基に，その実核が対応する写像　$f:[R] \to [\boldsymbol{R}]$ は，次の６つの例外を除けば，大小関係，加法，乗法についての同型写像である．

例外：$\zeta(\infty_0)+\zeta(-\infty_0)$，$\zeta(-\infty_0)+\zeta(\infty_0)$．

$\zeta(0)\zeta(\infty_0)$，$\zeta(0)\zeta(-\infty_0)$，$\zeta(\infty_0)\zeta(0)$，$\zeta(-\infty_0)\zeta(0)$．

　この定理を証明するには，

$$[R]=R\cup\{\infty_0,\ -\infty_0\},\qquad [\boldsymbol{R}]=\boldsymbol{R}\cup\{\zeta(\infty_0),\ \zeta(-\infty_0)\}$$

であるので，a，$b\in[R]$として，a，bの少なくとも片方が無限大の場合を証明すればよい．（∵定理14）

大小関係の証明

（ア） $a=\infty_0$， $b\in R$ ならば，$\infty_0>b \Leftrightarrow \zeta(\infty_0)>b+\Pi_0$

（イ） $a=-\infty_0$， $b\in R$ ならば，$-\infty_0<b \Leftrightarrow \zeta(-\infty_0)<b+\Pi_0$

（ウ） $a\in R$， $b=\infty_0$ならば， $a<\infty_0 \Leftrightarrow a+\Pi_0<\zeta(\infty_0)$

（エ） $a\in R$， $b=-\infty_0$ならば， $a>-\infty_0 \Leftrightarrow a+\Pi_0>\zeta(-\infty_0)$

（オ） $a=-\infty_0$， $b=\infty_0$ならば，$-\infty_0<\infty_0 \Leftrightarrow \zeta(-\infty_0)<\zeta(\infty_0)$

（カ） $a=\infty_0$， $b=-\infty_0$ならば，$\infty_0>-\infty_0 \Leftrightarrow \zeta(\infty_0)>\zeta(-\infty_0)$

（キ） $a=\infty_0$， $b=\infty_0$ならば，$\infty_0=\infty_0 \Leftrightarrow \zeta(\infty_0)=\zeta(\infty_0)$

（ク） $a=-\infty_0$， $b=-\infty_0$ならば，$-\infty_0=-\infty_0 \Leftrightarrow \zeta(-\infty_0)=\zeta(-\infty_0)$

加法の証明

（ア） $a=\infty_0$， $b\in R$ ならば，

$\zeta(\infty_0)+\zeta(b)=\zeta(\infty_0)+(b+\Pi_0)=\zeta(\infty_0)=\zeta(\infty_0+b)$

（イ） $a=-\infty_0$， $b\in R$ ならば，

$\zeta(-\infty_0)+\zeta(b)=\zeta(-\infty_0)+(b+\Pi_0)=\zeta(-\infty_0)=\zeta(-\infty_0+b)$

（ウ） $a\in R$， $b=\infty_0$ならば，

$\zeta(a)+\zeta(\infty_0)=(a+\Pi_0)+\zeta(\infty_0)=\zeta(\infty_0)=\zeta(a+\infty_0)$

（エ） $a\in R$， $b=-\infty_0$ならば，

$\zeta(a)+\zeta(-\infty_0)=(a+\Pi_0)+\zeta(-\infty_0)=\zeta(-\infty_0)=\zeta(a+(-\infty_0))$

（オ） $a=\infty_0$， $b=\infty_0$ならば，

$\zeta(\infty_0)+\zeta(\infty_0)=\zeta(\infty_0)=\zeta(\infty_0+\infty_0)$

（カ） $a=-\infty_0$， $b=-\infty_0$ならば，

$\zeta(-\infty_0)+\zeta(-\infty_0)=\zeta(-\infty_0)=\zeta(-\infty_0+(-\infty_0))$

しかし，

（キ） $a=\infty_0$， $b=-\infty_0$ならば，

$\zeta(\infty_0)+\zeta(-\infty_0)=\bigcup\Theta_\alpha$であるが，$\zeta(\infty_0+(-\infty_0))=\zeta(\Theta_0)$は存在しない．

（ク） $a=-\infty_0$， $b=\infty_0$ならば，

$\zeta(-\infty_0)+\zeta(\infty_0)=\bigcup\Theta_\alpha$であるが，$\zeta((-\infty_0)+\infty_0)=\zeta(\Theta_0)$は存在しない．

ただし，$\zeta(\Theta_0)=\bigcup_{a\in\Theta_0}\zeta(a)$と約束すれば，

（キ）は，$\zeta(\infty_0)+\zeta(-\infty_0)=D=\zeta(\infty_0+(-\infty_0))$

（ク）は，$\zeta(-\infty_0)+\zeta(\infty_0)=D=\zeta((-\infty_0)+\infty_0)$

が成り立つ．

乗法の証明

（ア） $a=\infty_0$， $b\in R$， $b\neq 0$ならば，

$$\zeta(\infty_0)\zeta(b)=\zeta(\infty_0)(b+\Pi_0)=\zeta((\mathrm{sgn}\,b)\infty_0)=\zeta(\infty_0 b)$$

（イ） $a=-\infty_0$， $b\in R$， $b\neq 0$ならば，

$$\zeta(-\infty_0)\zeta(b)=\zeta(-\infty_0)(b+\Pi_0)=\zeta(-(\mathrm{sgn}\,b)\infty_0)=\zeta(-\infty_0 b)$$

（ウ） $a\in R$， $a\neq 0$， $b=\infty_0$ならば，

$$\zeta(a)\zeta(\infty_0)=(a+\Pi_0)\zeta(\infty_0)=\zeta((\mathrm{sgn}\,a)\infty_0)=\zeta(a\infty_0)$$

（エ） $a\in R$， $a\neq 0$， $b=-\infty_0$ならば，

$$\zeta(a)\zeta(-\infty_0)=(a+\Pi_0)\zeta(-\infty_0)=\zeta(-(\mathrm{sgn}\,a)\infty_0)=\zeta(a(-\infty_0))$$

（オ） $a=\infty_0$， $b=\infty_0$ならば，

$$\zeta(\infty_0)\zeta(\infty_0)=\zeta(\infty_0)=\zeta(\infty_0\infty_0)$$

（カ） $a=-\infty_0$， $b=-\infty_0$ならば，

$$\zeta(-\infty_0)\zeta(-\infty_0)=\zeta(\infty_0)=\zeta((-\infty_0)(-\infty_0))$$

しかし，

（キ） $a=0$， $b=\infty_0$ならば，

$$\zeta(0)\zeta(\infty_0)=\Pi_0\zeta(\infty_0)=D\neq\Pi_0=\zeta(0)=\zeta(0\infty_0)$$

（ク） $a=0$， $b=-\infty_0$ならば，

$$\zeta(0)\zeta(-\infty_0)=\Pi_0\zeta(-\infty_0)=D\neq\Pi_0=\zeta(0)=\zeta(0(-\infty_0))$$

（ケ） $a=\infty_0$， $b=0$ならば，

$$\zeta(\infty_0)\zeta(0)=\zeta(\infty_0)\Pi_0=D\neq\Pi_0=\zeta(0)=\zeta(\infty_0 0)$$

（コ） $a=-\infty_0$， $b=0$ならば，

$$\zeta(-\infty_0)\zeta(0)=\zeta(-\infty_0)\Pi_0=D\neq\Pi_0=\zeta(0)=\zeta(-\infty_0 0)$$

★50)　超実核

拡大実数は従来の実数の拡張であり，超実数も従来の実数の拡張である．そして，両者は全く異なる数のように見えるが，以下のように考えれば，両者を融合することができる．すなわち，$\boldsymbol{R}$を導く過程で用いるRの代わりにR^*（超実数すべての集合）を用いれば，

$$\boldsymbol{R}^*=\{\zeta(a):a\in R^*\}$$

を得ることができる．実際，

超実数は，$x_n\in R$の無限列$\{x_n\}$によって作り出される．（参考文献[５]）

そして，定義13に従えば，「$x_n\in R^+$ならば，$1/\infty_\alpha<\{x_n\}$」である．

これは，$\{x_n\}$が，いかなる正の無限小超実数としても，$1/\infty_\alpha$は，それよりも更に

小さい無限小であることを示している．

したがって，超実数ａと無限小拡大実数$1/\infty_\alpha$の，

$$\text{和}\ a+(1/\infty_\alpha),\qquad \text{差}\ a-(1/\infty_\alpha)$$

は超実数でも，拡大実数でもないので，新たに，

$$\text{順序対}(a,\ b),\ a\in R^*,\ b\in\Pi_0$$

を考えて，超実数を拡張すれば，「拡大超実数」，及び，その不定数である「超実核」$\zeta(a)$を導くことができる．

この超実核を用いて，$a\in R^*$，$\zeta(a)\in \boldsymbol{R^*}$として，写像 $f : a \to \zeta(a)$ を考えれば，ｆは，R*から***R****への，大小関係，加法，乗法についての同型写像になるので，R*上における超準解析と同じ理論が，***R****上にも存在する．

第３章　拡大実数の効能

無限小$1/\infty_1$の図形的意味を，次のように解釈することができる．

有限カージナル数の集合を，$N=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$

無限大カージナル数の領域を，$W=\{\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots,\ \aleph_\omega,\ \cdots\}$

として，カージナル数すべての領域を，

$\Psi=N\cup W=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots,\ \aleph_\omega,\ \cdots\}$

とする．また，

非負の整数の集合を，$N=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$

正の無限大拡大実数の領域を，$M=\{\infty_0,\ \infty_1,\ \infty_2,\ \cdots,\ \infty_\omega\cdots\}$

として，

$\Omega=N\cup M=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \infty_0,\ \infty_1,\ \infty_2,\ \cdots,\ \infty_\omega\cdots\}$

とする．

このとき，$n\in N$として，ΨからΩへの，１対１写像

$$\kappa:\begin{cases} n \to n \\ \aleph_\alpha \to \infty_\alpha \end{cases}$$

を考えれば，「ΨとΩが，大小関係，加法，乗法について同型である」ことを，容易に確かめることができる．（∵定義23，定義29，定義33）

したがって，大小関係，加法，乗法については，$\aleph_\alpha$と∞_αを同一視することができるので，$1/\infty_\alpha$は，１を$\aleph_\alpha$で割った値と考えても不自然ではない．そして，我々は，一般連続体仮説が成り立つものと仮定しているので，$\aleph_1$は連続濃度を表し，

$1/\infty_1$は，長さ１の区間を連続濃度に等分割して得られる区間の長さを表す・・・（＊）

と考えることができる．

★51)　実核による数直線

定理14より，有限実核は，実数と，大小関係，加法，乗法について同型である．このことは，実数上における点集合論と同じ理論を，有限実核上にも創ることができることを意味している．そして，有限実核による点集合論ができれば，次は当然，有限実核による座標平面を考えることになるが，数直線の座標ａの位置に実核$\zeta(a)$を配置した数直線を考えれば矛盾が生じる．

実際，有限実核は，$a\in R$とすれば，

$$\zeta(a)=a+\Pi_0=\{x:(a-1/\infty_0)\leqq x\leqq(a+1/\infty_0)\}$$

であり，

$$(\mathrm{a} + 1/\infty_0) - (\mathrm{a} - 1/\infty_0) = 1/\infty_0$$

であるので，この有限実核を直線上に配置すれば，長さが$1/\infty_0$の区間になり，前述の（＊）に矛盾する．したがって，実核による数直線を構成することはできない．

★52)　「拡大実数は何の役に立つか」との問いに対する答え（効能その１）

　$\mathrm{a} \in \mathrm{R}$のとき，不定数$\mathbf{a} = \mathrm{a} + \Pi_1$を基本不定数という．このとき，定理14は，有限実核$\zeta(\mathrm{a})$の代わりに基本不定数$\mathbf{a}$を用いても，同様に証明される．したがって，基本不定数上においても，実数上における点集合論と同じ理論を創ることができる．

　そして，

$$\mathbf{a} = \mathrm{a} + \Pi_1 = \{\mathrm{x} : (\mathrm{a} - 1/\infty_1) \leqq \mathrm{x} \leqq (\mathrm{a} + 1/\infty_1)\}$$

であり，

$$(\mathrm{a} + 1/\infty_1) - (\mathrm{a} - 1/\infty_1) = 1/\infty_1$$

であるので，数直線の座標aの位置に基本不定数$\mathbf{a}$を配置した数直線（この数直線を基本直線という）を考えれば，★51）と同じ問題は生じない．

★53)　「拡大実数は何の役に立つか」との問いに対する答え（効能その２）

　現在，一般に使用されている数直線には，次のような素朴な矛盾がひそんでいる．

（ア）幾何学的な点は，その位置のみを有して大きさを有さない

と定義される．そして，

（イ）直線が点の集まりであり，

（ウ）直線上の点と実数が１対１対応する

と仮定して構成したものが数直線である．しかし，

（ア）より，点の大きさは０であり，０はどんなにたくさんどのように加えても０であるが，（イ）と（ウ）より，点を連続濃度だけ適当に集めれば，長さを有する線分を得る．

　数直線上の点を，幾何学的な点と同じであると考えれば，上記の矛盾を解決する方法はない．したがって，数直線上の点の定義（ア）を改めて，（イ）と（ウ）を保存し，我々の直観に反しない数直線の構成を試みることは無駄ではないと思われるが，ここで，基本不定数が，その目的を果たすことは明らかである．

　実際，基本不定数を，「実数点」と称して，

（イ）′ 数直線は「実数点」の集まりであり，

（ウ）′ 数直線上の「実数点」と実数が１対１対応する，

とすれば，上記の矛盾は解消される．

すなわち，今後，数直線といえば，基本直線のことであり，数直線上の１点とは，実数点のことであるとすればよい．

★54) 「拡大実数は何の役に立つか」との問いに対する答え（効能その３）

$\mathbf{a} \in \mathbf{R}$，$\zeta(\infty_0) = \boldsymbol{\infty}$，$\zeta(-\infty_0) = -\boldsymbol{\infty}$ とすれば，

（ア）$-\boldsymbol{\infty} = (-1)\boldsymbol{\infty}$

（イ）$-\boldsymbol{\infty} < \mathbf{a} < \boldsymbol{\infty}$

（ウ）$\boldsymbol{\infty} + \mathbf{a} = \boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty}) + \mathbf{a} = -\boldsymbol{\infty}$

（エ）$\boldsymbol{\infty} - \mathbf{a} = \boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty}) - \mathbf{a} = -\boldsymbol{\infty}$

（オ）$\boldsymbol{\infty} + \boldsymbol{\infty} = \boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty}) + (-\boldsymbol{\infty}) = -\boldsymbol{\infty}$

（カ）$\mathbf{a} > \mathbf{0}$ ならば，$\boldsymbol{\infty}\mathbf{a} = \boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty})\mathbf{a} = -\boldsymbol{\infty}$

（キ）$\mathbf{a} < \mathbf{0}$ ならば，$\boldsymbol{\infty}\mathbf{a} = -\boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty})\mathbf{a} = \boldsymbol{\infty}$

（ク）$\boldsymbol{\infty}\boldsymbol{\infty} = \boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty})(-\boldsymbol{\infty}) = \boldsymbol{\infty}$

（ケ）$\boldsymbol{\infty}(-\boldsymbol{\infty}) = -\boldsymbol{\infty}$

（コ）$\boldsymbol{\infty}0 = 0$，　$(-\boldsymbol{\infty})0 = 0$

が成り立つ．

これらの関係式は，通常，測度論で，便宜上の約束として定める式であるが，**R**上では，自然に導かれる式である．

★55) 「拡大実数は何の役に立つか」との問いに対する答え（効能その４）

（ア）　R^*はRと同じ連続濃度の集合であるので，実数点の場合と同様に，超実数点を考えることができる．ここで，超実数点とは，$\mathbf{a} = \mathrm{a} + \Pi_1$（$\mathrm{a} \in \mathrm{R}^*$）のことであり，超実数点すべての集合を，$\mathbf{R}^* = \{\mathbf{a} : \mathrm{a} \in \mathrm{R}^*\}$とすれば，$\mathbf{R}^*$上でも超準解析が成り立つ．実際，

$\mathrm{a} \in \mathrm{R}^*$，$\mathbf{a} \in \mathbf{R}^*$として，１対１写像 $\mathrm{f} : \mathrm{a} \rightarrow \mathbf{a}$

を考えればよい．

（イ）　次に，数学の世界には「可能的無限」と「実無限」の２種類の無限があることは周知の通りである. しかし, なぜ２種類必要なのか, なぜ１種類に統一しないのか, は疑問である．もちろん，この２つの無限の概念は次のように大きく異なる．

可能的無限は，「変動可能な有限」あるいは「限りなく大きくなろうとする状態」などと表現されることが多い概念であり，この無限の概念による無限大は，数としては存在しない．すなわち，∞は数ではない．

一方，実無限は，無限を完結したものとして扱い，この無限の概念による無限大は, 例えば, カージナル数 $\aleph_0$ や順序数 ω のように, 数としてとらえることができる.

ゆえに，通常の数学で，無限を用いる理論は，次の２つに分類できる．

理論（１）：「可能的無限」の概念を用いる理論.
(すなわち，ε δ 論法を用いる理論で, 無限を数としてとらえることができない理論)
理論（２）：「実無限」の概念を用いる理論.
(すなわち, 一般集合論を用いる理論で, 無限を数としてとらえることができる理論)

したがって，「可能的無限」と「実無限」を統一するとは，次の３つの方法のいずれか１つを意味するものと考えることができる．

（あ）　理論（１）に含まれる数学と同じ内容の理論を，理論（２）を仮定して導く．
（い）　理論（２）に含まれる数学と同じ内容の理論を，理論（１）を仮定して導く．
（う）　ある理論（３）を仮定して，理論（１）と（２）に含まれる数学と同じ内容の理論を導く．

ここで，（ア）は，「**R***上での超準解析は，（あ）を実現している」ことを示しているので，超実数点は，「可能的無限」と「実無限」を統一することができる．

おわりに

この本の要点を整理すると，次のようになる．

（ア）　実数に，すべての無限大カージナル数を付加して得られる拡大実数は，数として市民権を得られる程度には，諸定理が成り立つ．（第１章）

（イ）　有限実核は，従来の実数と同じ構造を有する．（第２章）

Rも，従来の実数と同じ構造を有する．（第３章）

（ウ）　超実核は，超実数と同じ構造を有する．（第２章）

$\mathbf{R}^*$も，超実数と同じ構造を有する．（第３章）

（エ）　拡大実数には，次の効能がある．

- (エ－１)　数直線上の１点の大きさを特定できる．（第３章）
- (エ－２)　数直線にひそむ矛盾を解消できる．（第３章）
- (エ－３)　★54）の関係式を導くことができる．（第３章）
- (エ－４)　「可能的無限」と「実無限」を統一できる．（第３章）

しかし，読者の皆さんも，気付いたことと思われるが，拡大実数が，実数にカージナル数を付加した数であるにもかかわらず，拡大実数の累乗について何も述べていないのは不自然である．**R**がRと同じ構造を有しているので，**R**における累乗は，Rにおける累乗と同じであることは明らかであるが，たとえば，

$$\pi^{\aleph_\alpha} \quad (\pi \text{は円周率})$$

のような累乗を，どのように定義するのか，を明確にしなくては，拡大実数論としては完成しない．ここで，

$$3 < \pi < 4, \quad \aleph_\alpha \text{は無限大}$$

であることを考えれば，

「$3^{\aleph_\alpha} \leqq \pi^{\aleph_\alpha} \leqq 4^{\aleph_\alpha}$，$3^{\aleph_\alpha} = 4^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$」より　$\pi^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$（∵一般連続体仮説）

となるのが自然であろうと思われるが，このことを，順序立てて説明するには，相応の紙面を必要とするので，今回は省略する．詳しくは，参考文献［６］の第６章を参照．

著者略歴

1948　誕生.

1971　立命館大学理工学部数学物理学科卒業.
　　　高等学校数学科教諭.

1973　数学セミナー（日本評論社）のNOTE欄に
　　　「累次積分に関する一公式」を投稿し掲載される.

1979　日本数学教育学会(第61回宇都宮大会)にて
　　　「実数の拡張に関する一例」を発表.

1988　日本数学教育学会(第70回静岡大会)にて
　　　「数直線上の点の大きさについて」を発表.

2009　高等学校教頭定年退職.

2011　日本数学教育学会(第93回神奈川大会)にて
　　　「拡大実数論」を発表.

2016　著書「拡大実数論の源流」を自費出版.

著　者：西　田　正　夫

発行者：西　田　正　夫
住　所 〒４３２－８００３
静岡県浜松市中区和地山２－８－１５
e-mail：ｋａｋｕｄａｉｊｉｓｓｕｕ＠ｙａｈｏｏ．ｃｏ．ｊｐ

発行日：平成２８年４月３０日

印刷社：ちょ古っ都印刷工房
ｈｔｔｐ：／／ｗｗｗ．ｃｈｏｋｏｔｔｏ．ｊｐ／