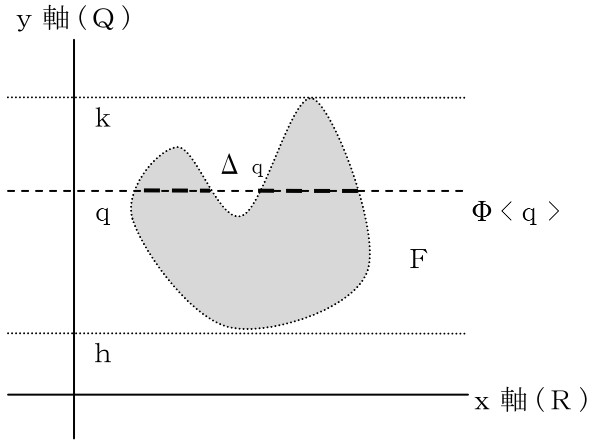
拡大実数論の源流

～数直線上の点とは何か～



西　田　正　夫　著

はじめに

〈１〉私が学生のとき，数学の世界には「可能的無限」と「実無限」の２種類の無限があることを初めて知り，そのとき，なぜ２種類必要なのか，なぜ１種類に統一しないのか，が疑問であった．もちろん，この２つの無限の概念は次のように大きく異なる．

可能的無限は，「変動可能な有限」あるいは「限りなく大きくなろうとする状態」などと表現されることが多い概念であり，この無限の概念による無限大は，数としては存在しない．すなわち，∞は数ではない．

実無限は，無限を完結したものとして扱い，この無限の概念による無限大は，例えば，カージナル数（濃度ともいう）$\aleph_0$や順序数ωのように，数としてとらえることができる．

しかし，カージナル数を仮定して，実数を含む新しい数（この数を「拡大実数」という）を創ることができれば，両者を統一できるのではないか，すなわち，「可能的無限」の概念を用いて導かれる数学（例えば，標準的な微分積分）と同じ内容の理論を，拡大実数を用いて導くことができれば，数学で用いる無限の概念は「実無限」だけであるとすることができるのではないか，と思い付いたのがこの研究の始まりである．

〈２〉カージナル数（順序数は既知とする）を仮定して拡大実数を導くための足掛かりとして，自然数とカージナル数の接点を調べると，

（ⅰ）カージナル数は，選択公理を認めれば，

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots,\ \aleph_\omega,\ \aleph_{\omega+1},\ \cdots$$

のように，大小の順に整列可能である．

（ⅱ）カージナル数は，有限の範囲で考えれば，大小関係，加法，乗法について自然数と同型である．

このことから，カージナル数を，新しい「自然数」としてとらえれば，「整数」，「有理数」，「実数」へと数の拡張をしていけるのではないかと期待される．そして，この期待が，「拡大実数」を創ろうと思い立った直接の動機である．

〈３〉「拡大実数」を創ろうと思い立った直接の動機が，もう１つある．それは，「拡大実数」は，数直線上の１点の大きさを表すことができるかもしれないという直観であり，その詳細は次の通りである．

（ア）幾何学的な点は，その位置のみを有して大きさを有さないものとして定義される．

そして，

（イ）直線が点の集まりであり，

（ウ）直線上の点と実数が１対１対応する

と仮定して構成したものが数直線であるが，この数直線に，我々の直観に反する矛盾が潜んでいることは周知の通りである．すなわち，

（ア）より点の大きさは０であり，０はどんなにたくさんどのように加えても０であるが，

（イ）と（ウ）より点を連続濃度だけ適当に集めれば，長さを有する１つの線分を得る．

数直線上の点を，幾何学的な点と同じであると考えれば，上記の矛盾を解決する方法はない．したがって，数直線上の点の定義を改めて，(イ)と(ウ)を保存し，我々の直観に反しない数直線の構成を試みることは無駄ではないと思われる．

いま，集合$\{x : 0 < x < 1\}$に属する実数に対応する点を集めて長さ１の線分を得たとする．この場合，点は，図形的には，長さ１の線分を連続濃度に等分割して得られる無限に小さい長さを有する線分であると考えることができれば理解しやすい．

実際，この無限に小さい長さを有する線分を「実数点」と名付けて，

(イ)′ 数直線は「実数点」の集まりであり，

(ウ)′ 数直線上の「実数点」と実数が１対１対応する

とすれば，上記の矛盾は生じない．

無論，この解釈が意味を有するためには，「実数点」の存在が必要であり，更にその長さを表す無限小なる数も必要であるが，仮に，１を$\aleph_1$で割って得られる「$1/\aleph_1$」なる数が存在するとすれば，この数が，「実数点」の存在と，その長さを表すはずである．

〈４〉カージナル数を扱うときは，連続体仮説が問題になるが，この小冊子においては，初めから，一般連続体仮説を認めることにする．すなわち，任意の順序数αに対して，

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

が成り立つものと仮定する．「$1/\aleph_1$」も，$\aleph_1$が連続濃度を表すものと仮定しての数である．ただし，$1/\aleph_1$は，記号的に違和感があるので，$1/\infty_1$と表すことにする．

〈５〉この小冊子では，順序数すべての集まりや，それと同等な集まりを考えることがある．しかし，この集まりを集合とすれば，ブラリ・フォルティの逆理が生じることはよく知られている．したがって，この逆理を回避するために，集合よりも，もっと広い概念である領域という用語も用いることにする．(参考文献［４］P. 144)

〈６〉参考文献

［１］ 新版集合論（辻　正次 著，小松勇作 改訂，共立出版）

［２］ 極限論と集合論（能代　清，岩波書店）

［３］ 数の概念（高木貞治，岩波書店）

［４］ 集合論入門（赤　攝也，培風館）

［５］ ルベグ積分入門（吉田洋一，培風館）

［６］ 数学セミナー（１９７７年１月号～１２月号，日本評論社）

［７］ 無限小解析の基礎（キースラー著　齋藤正彦訳，東京図書）

目　　次

第１章　整数

$\boxed{1}$ 符号がついた集合

初めに，若干の用語と記号を定める．

（ｉ）正と負の符号を元とする集合を$\delta=\{+,\ -\}$とするとき，写像$f:A\to\delta$が定義されている集合Ａを，符号がついた集合という．

（ⅱ）$a\in A$に対して，$f(a)=+$ならばａを正の元，$f(a)=-$ならばａを負の元という．

（ⅲ）$\forall a\in A$に対して，$f(a)=+$ならばＡを正の正規集合，$f(a)=-$ならばＡを負の正規集合といい，正の正規集合，負の正規集合，空集合を合わせて，単に正規集合という．

（ⅳ）a^+はａが正の元，a^-はａが負の元であることを表す．

（ｖ）A^+はＡが正の正規集合，A^-はＡが負の正規集合であることを表す．

（ⅵ）A_+はＡに属する正の元すべての集合，A_-はＡに属する負の元すべての集合を表す．

（ⅶ）ϕを「『$A_+\to A_-$』または『$A_-\to A_+$』」なる単射とする．

（ⅷ）差集合「『$A_- - \phi(A_+)$』または『$A_+ - \phi(A_-)$』」は正規集合であるが，この正規集合をA_ϕで表す．ただし，$\phi(A_+)=\{\phi(a):a\in A_+\}$，$\phi(A_-)=\{\phi(a):a\in A_-\}$．

（ⅸ）符号がついた集合ＡからA_ϕを求めることを，集合の正規化という．

（ｘ）符号がついた集合Ａの，各元の符号をすべて入れ換えた集合を，$-A$で表す．

例：　$A=\{a^+,\ b^-,\ c^+,\ d^-,\ e^+\}$ならば，$A_+=\{a^+,\ c^+,\ e^+\}$，$A_-=\{b^-,\ d^-\}$であり，$A_\phi$は「$\{a^+\}$または$\{c^+\}$または$\{e^+\}$」である．したがって，Ａの正規化によって得られる正規集合は，ϕによらず，ただ１つの元からなる正の正規集合である．

例：　$A=\{1^+,\ 2^-,\ 3^+,\ 4^-,\ 5^+,\ 6^-,\ \cdots\}$ならば，

$$A_+=\{1^+,\ 3^+,\ 5^+,\ \cdots\},\qquad A_-=\{2^-,\ 4^-,\ 6^-,\ \cdots\}$$

であり，A_ϕは，ϕにより，正の正規集合にも負の正規集合にも空集合にもなり得る．

$\boxed{2}$ 定義1-1（整数）

（ｉ）$\mathrm{card}A^+=\mathrm{card}B^+$ または $\mathrm{card}A^-=\mathrm{card}B^-$ または $A=B=\phi$(空集合)のとき，ＡとＢは同じ整数を表すといい，$A_{INT}=B_{INT}$ または $B_{INT}=A_{INT}$で表す．

ただし，cardＡは，集合Ａのカージナル数を表すものとする．

（ⅱ）Ａが任意の符号がついた集合で，Ａにおけるすべての単写ϕの集合を$\boldsymbol{\psi}$とするとき，

$$A_{INT}=\{A_{\phi\,INT}:\phi\in\boldsymbol{\psi}\}$$

とする．ただし，$\{A_{\phi\,INT}:\phi\in\boldsymbol{\psi}\}$が，ただ１つの元からなる集合ならば，$A_{INT}$は，その元を表すものとする．

（ⅲ）$A^+{}_{INT}$を正の整数，$A^-{}_{INT}$を負の整数，ϕ_{INT}を零の整数(または単に零)という．

（ⅳ）正規集合Ａが，有限集合ならば，A_{INT}を有限整数といい，無限集合ならば，A_{INT}を無限大整数という．

（ｖ）$(-A)_{INT}$を，$-A_{INT}$で表す．

$\boxed{3}$ 定義1-2

（ⅰ）大小関係

A，Bを，$A \cap B = \phi$なる正規集合とするとき，$\{B \cup (-A)\}_{\phi}$が，ϕによらず，常に正の正規集合になるとき，B_{INT}はA_{INT}より大であるといい，

$$B_{INT} > A_{INT} \text{ または } A_{INT} < B_{INT}$$

で表す．

（ⅱ）加法

A，Bを，$A \cap B = \phi$なる正規集合とするとき，$A_{INT} + B_{INT} = (A \cup B)_{INT}$とする．

（ⅲ）乗法

A，Bを正規集合とするとき，AとBの結合集合(A, B)の元(a, b)は，aとbが同符号ならば正の元，異符号ならば負の元とする．このとき，$A_{INT} B_{INT} = (A, B)_{INT}$とする．

$\boxed{4}$ 定理1-1

（ⅰ）次の写像κは，カージナル数から非負の整数への，大小関係，加法，乗法に関する同型写像である．

$$\kappa : \begin{cases} \mathrm{card}\,\phi \to \phi_{INT}, \\ \\ \mathrm{card}\,A^{+} \to A^{+}{}_{INT}. \end{cases}$$

（ⅱ）有限整数の大小関係，加法，乗法は，従来の整数の大小関係，加法，乗法と同値である．

証明（ⅰ）定義1-1，定義1-2において，非負の正規集合だけを考えれば，整数の大小関係，加法，乗法の定義は，カージナル数の大小関係，加法，乗法の定義と同値である■

（ⅱ）定義1-1，定義1-2において，有限正規集合だけを考えれば，整数の大小関係，加法，乗法の定義は，従来の整数の大小関係，加法，乗法の定義と同値である■

$\boxed{5}$ 定理1-2

（ⅰ）aを負の整数，bを正の整数とすれば，$a < 0 < b$が成り立つ．

（ⅱ）任意の整数a，bにおいて，「$a < b$ ならば $-a > -b$」が成り立つ．

証明（ⅰ）$A^{-}{}_{INT} = a$，$B^{+}{}_{INT} = b$とすれば，

$$\{B \cup (-\phi)\}^{+}, \quad \{\phi \cup (-A)\}^{+}, \quad \{B \cup (-A)\}^{+}$$

は明らか■

（ⅱ）A，Bを，$A_{INT} = a$，$B_{INT} = b$となる正規集合とする．

仮定$a < b$より，$\{B \cup (-A)\}_{\phi}$は，ϕによらず，常に正の正規集合である．また，

$$(-A) \cup \{-(-B)\} = B \cup (-A)$$

であるので，$[(-A) \cup \{-(-B)\}]_{\phi}$は，$\phi$によらず，常に正の正規集合である■

$\boxed{6}$ 定理1-3

任意の整数a，bの間には，次のうちの１つだけが成り立つ．

$$a=b,\qquad a<b,\qquad a>b.$$

証明　A，Bを，$A_{INT}=a$，$B_{INT}=b$となる正規集合とする．

（ⅰ）$^{\forall}\phi$，$\{B\cup(-A)\}_{\phi}{}^{+}$ ならば，定義1-2の(ⅰ)より，$a<b$である．

（ⅱ）$^{\forall}\phi$，$\{B\cup(-A)\}_{\phi}{}^{-}$ ならば，$-\{B\cup(-A)\}=A\cup(-B)$より，$\{A\cup(-B)\}_{\phi}{}^{+}$であるので，$a>b$である．

（ⅲ）(ⅰ)と(ⅱ)以外ならば，次のいずれかである．

　　(ア) $^{\exists}\phi$，$\{B\cup(-A)\}_{\phi}=\phi$．

　　(イ)「$^{\exists}\phi_1$，$\{B\cup(-A)\}_{\phi_1}{}^{+}$」かつ「$^{\exists}\phi_2$，$\{B\cup(-A)\}_{\phi_2}{}^{-}$」．

(ア)ならば，cardA＝cardBであるが，正規化の意味を考えれば，

$$\mathrm{card}A^{+}=\mathrm{card}B^{+},\qquad \mathrm{card}A^{-}=\mathrm{card}B^{-},\qquad A=B=\phi$$

のいずれかでなくてはならない．したがって，定義1-1の(ⅰ)より，$a=b$である．

(イ)ならば，

$$「^{\exists}\phi_1,\ \{B\cup(-A)\}_{\phi_1}{}^{+}」より，\mathrm{card}A\leqq\mathrm{card}B.$$

$$「^{\exists}\phi_2,\ \{B\cup(-A)\}_{\phi_2}{}^{-}」より，\mathrm{card}A\geqq\mathrm{card}B.$$

ゆえに，cardA＝cardBである．したがって，(ア)と同じ理由で，$a=b$である■

$\boxed{7}$ 定理1-4

任意の整数a，b，cにおいて，「$a<b$，$b<c$ ならば $a<c$」が成り立つ．

証明　定理1-2の(ⅰ)と，仮定$a<b$，$b<c$より，a，b，cの符号のこの順の組は，

$$(+,+,+),\ (0,+,+),\ (-,+,+),\ (-,0,+),$$
$$(-,-,+),\ (-,-,0),\ (-,-,-)$$

のいずれかである．

（ⅰ）$(+,+,+)$の場合は定理1-1の(ⅰ)による．

（ⅱ）$(0,+,+)$，$(-,+,+)$，$(-,0,+)$，$(-,-,+)$，$(-,-,0)$の場合は，aとcの符号を比べれば，定理1-2の(ⅰ)より$a<c$を得る．

（ⅲ）$(-,-,-)$の場合は，$-a$，$-b$，$-c$の符号を考えれば，$(+,+,+)$となる．

ここで，仮定$a<b$，$b<c$と定理1-2の(ⅱ)より，$-a>-b$，$-b>-c$であるので，(ⅰ)より，$-a>-c$，すなわち，$a<c$を得る■

$\boxed{8}$ 整数の整列

定理1-1の(ⅰ)より，非負の整数とカージナル数は大小関係において同型である．

したがって，定理1-2の(ⅰ)と(ⅱ)より，整数は次のように並べることができる．

ただし，$\mathrm{card}A=\aleph_{\alpha}$のときの$A^{+}{}_{INT}$を$\infty_{\alpha}$で表す．

$$\cdots<-\infty_{\omega}<\cdots<-\infty_2<-\infty_1<-\infty_0<\cdots<-3<-2<-1<$$
$$0<1<2<3<\cdots<\infty_0<\infty_1<\infty_2<\cdots<\infty_{\omega}<\cdots$$

$\boxed{9}$ 整数の加法における留意事項

整数の和として，１つの整数が一意的に定まるとは限らない．実際，

$$A^{+}{}_{INT}=\infty_{\alpha},\quad B^{-}{}_{INT}=-\infty_{\alpha},\quad A\cap B=\phi$$

とすれば，

$$\infty_{\alpha}+(-\infty_{\alpha})=\{(A\cup B)_{\phi\,INT}:\phi\in\boldsymbol{\psi}\}=\{a:-\infty_{\alpha}\leqq a\leqq\infty_{\alpha}\}$$

である．ここで，整数の集合$\{a:-\infty_{\alpha}\leqq a\leqq\infty_{\alpha}\}$を$\Theta_{\alpha}$で表せば，

$$\infty_{\alpha}+(-\infty_{\alpha})=\Theta_{\alpha}$$

となる．

このΘ_{α}のように，整数の和は，２つ以上の元を有する集合になる場合があるので，その扱い方を定めておく必要がある．

次の定義1-3は，整数についての定義であるが，以後現れる他の数についても，同様の定義が定められているものとする．

$\boxed{10}$ 定義1-3（不定数を含む演算及び大小関係）

整数すべての領域をΩで表し，Ωの空でない部分領域すべての領域を$U(\Omega)$で表す．

（ｉ） $\mathbf{a}$を$U(\Omega)$の元とする．

$\mathbf{a}$が１つの元からなる部分領域$\{a\}$ならば，$\mathbf{a}$をaと同一視して確定数という．

$\mathbf{a}$が２つ以上の元からなる部分領域ならば，$\mathbf{a}$を不定数という．

（ⅱ） $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$を$U(\Omega)$の元とする．$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$の二項演算を，演算記号を一般的に$*$とするとき，次のように定める．

$$\mathbf{a}*\mathbf{b}=\bigcup_{a\in\mathbf{a},\,b\in\mathbf{b}}(a*b).$$

（ⅲ） $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$を$U(\Omega)$の元とする．$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$の大小関係を，次のように定める．

「$\forall a\in\mathbf{a}$，$\forall b\in\mathbf{b}$，$a<b$」のとき，$\mathbf{a}<\mathbf{b}$．

「$\forall a\in\mathbf{a}$，$\forall b\in\mathbf{b}$，$a\leqq b$」のとき，$\mathbf{a}\leqq\mathbf{b}$．

例：$\mathbf{a}=\Theta_{\alpha}$，$\mathbf{b}=\infty_{\alpha}$とすれば，

$a\in(\Theta_{\alpha}-\{-\infty_{\alpha}\})$ ならば，$a+\infty_{\alpha}=\infty_{\alpha}$．

$a=-\infty_{\alpha}$ ならば，$a+\infty_{\alpha}=\Theta_{\alpha}$．

したがって，

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\bigcup_{a\in\mathbf{a},\,b\in\mathbf{b}}(a+b)=\Theta_{\alpha}.$$

例：$\mathbf{a}=\Theta_{\alpha}$，$\mathbf{b}=\infty_{\alpha}$とすれば，$\forall a\in\Theta_{\alpha}$，$a\leqq\infty_{\alpha}$であるので，$\mathbf{a}\leqq\mathbf{b}$．

$\mathbf{a}=\Theta_{\alpha}$，$\mathbf{b}=\infty_{\alpha+1}$とすれば，$\forall a\in\Theta_{\alpha}$，$a<\infty_{\alpha+1}$であるので，$\mathbf{a}<\mathbf{b}$．

$\mathbf{a}=\Theta_{\alpha}$，$\mathbf{b}=0$とすれば，$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$の大小関係は定義されていない．

補足：$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$が$U(\Omega)$の元で，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$の少なくとも片方が不定数の場合は，

$\mathbf{a}\leqq\mathbf{b}$は，「$\mathbf{a}<\mathbf{b}$ または $\mathbf{a}=\mathbf{b}$」のことではない

ので注意を要する．

$\boxed{11}$ 定理1-5

　$a \in \Omega$とすれば，次の式が成り立つ．

（ⅰ）aが有限ならば，$\infty_\alpha + a = \infty_\alpha$，$(-\infty_\alpha) + a = -\infty_\alpha$．

（ⅱ）aが正の有限ならば，

$$\infty_\alpha a = \infty_\alpha,\ \infty_\alpha(-a) = -\infty_\alpha,\ (-\infty_\alpha)a = -\infty_\alpha,\ (-\infty_\alpha)(-a) = \infty_\alpha.$$

（ⅲ）$a0 = 0$，$0a = 0$．

（ⅳ）$\infty_\alpha + \infty_\beta = \infty_{\max\{\alpha,\beta\}}$，　$(-\infty_\alpha) + (-\infty_\beta) = -\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}$．

（ⅴ）$\infty_\alpha \infty_\beta = \infty_{\max\{\alpha,\beta\}}$，　$(-\infty_\alpha)\infty_\beta = -\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}$．

（ⅵ）$\infty_\alpha + (-\infty_\beta) = \begin{cases} \infty_\alpha & (\alpha > \beta), \\ \Theta_\alpha & (\alpha = \beta), \\ -\infty_\beta & (\alpha < \beta). \end{cases}$

（ⅶ）$\Theta_\alpha + a = \begin{cases} \Theta_\alpha & (a \in \Theta_\alpha), \\ a & (a \notin \Theta_\alpha). \end{cases}$

（ⅷ）$\Theta_\alpha + \Theta_\beta = \Theta_{\max\{\alpha,\beta\}}$．

　証明　定義1-2の（ⅱ）と（ⅲ），定理1-1の（ⅰ）と（ⅱ）を用いれば，容易に証明される■

$\boxed{12}$ 定理1-6

　A，Bが符号のついた集合で，$A \cap B = \phi$とすれば，次の式が成り立つ．

$$A_{INT} + B_{INT} = (A \cup B)_{INT}.$$

　証明　一般に，A_{INT}が不定数になるのは，

$$\mathrm{card} A_+ = \mathrm{card} A_- = \aleph_\alpha$$

のときだけであり，そのとき，

$$A_{INT} = \Theta_\alpha$$

であるので，次の４通りの場合に分けて証明する．

（ⅰ）A_{INT}，B_{INT}がともに不定数，すなわち，$A_{INT} = \Theta_\alpha$，$B_{INT} = \Theta_\beta$．

（ⅱ）A_{INT}が不定数でB_{INT}が確定数，すなわち，$A_{INT} = \Theta_\alpha$，B_{INT}が確定数．

（ⅲ）A_{INT}が確定数でB_{INT}が不定数，すなわち，A_{INT}が確定数，$B_{INT} = \Theta_\beta$．

（ⅳ）A_{INT}，B_{INT}がともに確定数．

（ⅰ）$A_{INT} = \Theta_\alpha$，$B_{INT} = \Theta_\beta$の場合：

$$\mathrm{card} A_+ = \mathrm{card} A_- = \aleph_\alpha, \quad \mathrm{card} B_+ = \mathrm{card} B_- = \aleph_\beta$$

であるので，

$$\mathrm{card}(A \cup B)_+ = \mathrm{card}(A \cup B)_- = \aleph_{\max\{\alpha,\beta\}}.$$

　したがって，

$$(A \cup B)_{INT} = \Theta_{\max\{\alpha,\beta\}}$$

である．また，定理1-5の（ⅷ）より，

$$A_{INT} + B_{INT} = \Theta_\alpha + \Theta_\beta = \Theta_{\max\{\alpha,\beta\}}$$

である．

（ⅱ） $A_{INT}=\Theta_\alpha$，B_{INT}が確定数の場合：
（ア） 初めに，$(A\cup B)_{INT}$が確定数とすれば，次のいずれかである．

① $\mathrm{card}B_+>\aleph_\alpha$，$\mathrm{card}B_-<\mathrm{card}B_+$.

② $\mathrm{card}B_->\aleph_\alpha$，$\mathrm{card}B_+<\mathrm{card}B_-$.

ここで，①のときは，

$$\mathrm{card}(A\cup B)_+>\aleph_\alpha,\quad \mathrm{card}(A\cup B)_-<\mathrm{card}(A\cup B)_+$$

であるので，

$$(A\cup B)_{INT}=(A\cup B)_{+INT}=B_{+INT}$$

である．また，定理1-5の(ⅶ)より，

$$A_{INT}+B_{INT}=\Theta_\alpha+B_{+INT}=B_{+INT}$$

である．

②のときも同様である．

（イ） 次に，$(A\cup B)_{INT}=\Theta_\beta$とすれば，

$$\mathrm{card}(A\cup B)_+=\mathrm{card}(A\cup B)_-=\aleph_\beta$$

である．ここで，$\alpha<\beta$とすれば，

$$\mathrm{card}B_+=\mathrm{card}B_-=\aleph_\beta$$

でなくてはならないので，B_{INT}が確定数であることに反する．

したがって，$\alpha\geqq\beta$であるが，このときは，

$$\mathrm{card}B_+,\ \mathrm{card}B_-\leqq\aleph_\alpha \qquad (*)$$

であるので，

$$\mathrm{card}(A\cup B)_+=\mathrm{card}(A\cup B)_-=\aleph_\alpha.$$

すなわち，

$$(A\cup B)_{INT}=\Theta_\alpha$$

である．また，(＊)より，

$$B_{INT}\in\Theta_\alpha$$

となるので，定理1-5の(ⅶ)より，

$$A_{INT}+B_{INT}=\Theta_\alpha+B_{INT}=\Theta_\alpha$$

である．

（ⅲ） A_{INT}が確定数，$B_{INT}=\Theta_\beta$の場合は(ⅱ)と同様である．

（ⅳ） A_{INT}，B_{INT}がともに確定数の場合：

（ア） 初めに，$(A\cup B)_{INT}$を確定数とする．このときは，

$$\forall\phi,\ (A\cup B)_{\phi INT}=(A\cup B)_{INT}$$

であるので，考えられるのは，次の６通りである．

① $\mathrm{card}A_+\geqq\mathrm{card}A_-$，$\mathrm{card}B_+\geqq\mathrm{card}B_-$.

② $\mathrm{card}A_+\leqq\mathrm{card}A_-$，$\mathrm{card}B_+\leqq\mathrm{card}B_-$.

③ $\mathrm{card}A_+\geqq\mathrm{card}A_-$，$\mathrm{card}B_+\leqq\mathrm{card}B_-$，$\mathrm{card}A_++\mathrm{card}B_+\geqq\mathrm{card}A_-+\mathrm{card}B_-$.

④ $\mathrm{card}A_+\geqq\mathrm{card}A_-$，$\mathrm{card}B_+\leqq\mathrm{card}B_-$，$\mathrm{card}A_++\mathrm{card}B_+\leqq\mathrm{card}A_-+\mathrm{card}B_-$.

⑤ $\mathrm{card}A_+\leqq\mathrm{card}A_-$，$\mathrm{card}B_+\geqq\mathrm{card}B_-$，$\mathrm{card}A_++\mathrm{card}B_+\geqq\mathrm{card}A_-+\mathrm{card}B_-$.

⑥ $\mathrm{card}A_+\leqq\mathrm{card}A_-$，$\mathrm{card}B_+\geqq\mathrm{card}B_-$，$\mathrm{card}A_++\mathrm{card}B_+\leqq\mathrm{card}A_-+\mathrm{card}B_-$.

ここで，A_{INT}，B_{INT}は，ともに確定数であるので，

①のときは，$\phi(A_-)\subset A_+$，$\phi(B_-)\subset B_+$ となるようにϕを選べば，

$$(A\cup B)_{INT}=[\{A_+-\phi(A_-)\}\cup\{B_+-\phi(B_-)\}]_{INT}=A_{INT}+B_{INT}.$$

②のときは，$\phi(A_+)\subset A_-$，$\phi(B_+)\subset B_-$ となるようにϕを選べば，

$$(A\cup B)_{INT}=[\{A_--\phi(A_+)\}\cup\{B_--\phi(B_+)\}]_{INT}=A_{INT}+B_{INT}.$$

③のときは，$C\subset B_-$として，

$$\phi(A_-)\subset A_+,\ \phi(C)=B_+,\ \phi(B_--C)\subset A_+-\phi(A_-)$$

となるようにϕを選べば，

$$(A\cup B)_{INT}=[\{A_+-\phi(A_-)\}\cup(B_--C)]_{INT}=A_{INT}+B_{INT}.$$

④のときは，$C\subset A_+$として，

$$\phi(C)=A_-,\ \phi(B_+)\subset B_-,\ \phi(A_+-C)\subset B_--\phi(B_+)$$

となるようにϕを選べば，

$$(A\cup B)_{INT}=[(A_+-C)\cup\{B_--\phi(B_+)\}]_{INT}=A_{INT}+B_{INT}.$$

⑤のときは，$C\subset A_-$として，

$$\phi(C)=A_+,\ \phi(B_-)\subset B_+,\ \phi(A_--C)\subset B_+-\phi(B_-)$$

となるようにϕを選べば，

$$(A\cup B)_{INT}=[(A_--C)\cup\{B_+-\phi(B_-)\}]_{INT}=A_{INT}+B_{INT}.$$

⑥のときは，$C\subset B_+$として，

$$\phi(A_+)\subset A_-,\ \phi(C)=B_-,\ \phi(B_+-C)\subset A_--\phi(A_+)$$

となるようにϕを選べば，

$$(A\cup B)_{INT}=[\{A_--\phi(A_+)\}\cup(B_+-C)]_{INT}=A_{INT}+B_{INT}.$$

（イ）次に，$(A\cup B)_{INT}=\Theta_\alpha$とする．ここで，$A_{INT}$，$B_{INT}$は，ともに確定数であるので，次のいずれかでなくてはならない．

① $\mathrm{card}A_+=\mathrm{card}B_-=\aleph_\alpha$，$\mathrm{card}A_-<\aleph_\alpha$，$\mathrm{card}B_+<\aleph_\alpha$．

② $\mathrm{card}A_-=\mathrm{card}B_+=\aleph_\alpha$，$\mathrm{card}A_+<\aleph_\alpha$，$\mathrm{card}B_-<\aleph_\alpha$．

ここで，

①のときは，$A_{INT}+B_{INT}=\infty_\alpha+(-\infty_\alpha)=\Theta_\alpha=(A\cup B)_{INT}$．

②のときは，$A_{INT}+B_{INT}=(-\infty_\alpha)+\infty_\alpha=\Theta_\alpha=(A\cup B)_{INT}$■

$\boxed{13}$ 定理1-7

a，**b**，**c**$\in U(\Omega)$とすれば，次の式が成り立つ．

（ⅰ）$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$．（加法の交換法則）

（ⅱ）$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$．（加法の結合法則）

（ⅲ）$\mathbf{a}\mathbf{b}=\mathbf{b}\mathbf{a}$．（乗法の交換法則）

（ⅳ）$(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c})$．（乗法の結合法則）

証明　$a\in\mathbf{a}$，$b\in\mathbf{b}$，$c\in\mathbf{c}$として，A，B，Cを，$A_{INT}=a$，$B_{INT}=b$，$C_{INT}=c$となる正規集合（加法の場合は互いに素）とする．

（ⅰ）$A\cup B=B\cup A$であるので，定義1-2の（ⅱ）より，$a+b=b+a$が成り立つ．

ゆえに，定義1-3の（ⅱ）より，$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$が成り立つ■

（ⅱ） 定理1-6より，

$$(a+b)+c=((A\cup B)\cup C)_{INT}=(A\cup(B\cup C))_{INT}=a+(b+c)$$

が成り立つ．ゆえに，定義1-3の（ⅱ）より，$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$が成り立つ■

（ⅲ） 結合集合(A, B)と(B, A)の，それぞれの元(a, b)と(b, a)は同符号であり，card$(A, B)=$card(B, A)であるので，定義1-2の（ⅲ）より，$ab=ba$が成り立つ．

ゆえに，定義1-3の（ⅱ）より，$\mathbf{ab}=\mathbf{ba}$が成り立つ■

（ⅳ） 結合集合$((A, B), C)$と$(A, (B, C))$の，それぞれの元$((a, b), c)$と$(a, (b, c))$は同符号であり，card$((A, B), C)=$card$(A, (B, C))$であるので，$(ab)c=a(bc)$が成り立つ．

ゆえに，定義1-3の（ⅱ）より，$(\mathbf{ab})\mathbf{c}=\mathbf{a}(\mathbf{bc})$が成り立つ■

$\boxed{14}$ 定理1-8（分配法則）

$a, b, c\in\Omega$とする．分配法則$a(b+c)=ab+ac$・・・(＊)は，

（ⅰ） $ab+ac$が確定数ならば，常に成り立つ．

（ⅱ） $ab+ac$が不定数ならば，「$a=1$または$a=-1$」のときのみ成り立つ．

（ⅲ） $b+c$が確定数で，aが有限ならば，常に成り立つ．

証明　aが無限大「∞_αまたは$-\infty_\alpha$」であることを，記号a_αで表す．

（ⅰ）と（ⅱ）を合わせて証明する．a, b, cを次の(ア)～(カ)の場合に分ける．

a, b, cの少なくとも1つが0　・・・(ア)

a, b, cのいずれもが0でなくて，

　　b, cが同符号　・・・(イ)

　　b, cが異符号で，

　　　　a, b, cがすべて有限　・・・(ウ)

　　　　a, b, cのうちの1つだけが無限大　・・・(エ)

　　　　a, b, cのうちの1つだけが有限　・・・(オ)

　　　　a, b, cがすべて無限大　・・・(カ)

ここで，それぞれの場合の，「$ab+ac$が確定数か否か」と「(＊)が成り立つか否か」について調べると次のようになる．

(ア)の場合は，明らかに，$ab+ac$は確定数で，(＊)が成り立つ．

(イ)の場合は，A, B, Cを，$A_{INT}=a$，$B_{INT}=b$，$C_{INT}=c$となる正規集合とする．$B\cap C=\phi$とすれば，

$$(A, B\cup C)=(A, B)\cup(A, C),\qquad (A, B)\cap(A, C)=\phi$$

であり，条件「b, cが同符号」より，$(A, B\cup C)$，(A, B)，(A, C)はすべて同じ符号の正規集合である．したがって，$ab+ac$は確定数で，(＊)が成り立つ．

(ウ)の場合は，明らかに，$ab+ac$は確定数で，(＊)が成り立つ．

(エ)の場合は，

① a_αで，bとcが有限ならば，$a_\alpha b + a_\alpha c = \Theta_\alpha$(不定数)で，$a_\alpha(b + c)$は「$\infty_\alpha$または$-\infty_\alpha$または$0$」となるので，(＊)は成り立たない．

② b_βで，aとcが有限ならば，$a b_\beta + a c = a b_\beta$は確定数で，$a(b_\beta + c) = a b_\beta = a b_\beta + a c$が成り立つ．

③ c_γで，aとbが有限ならば，$a b + a c_\gamma = a c_\gamma$は確定数で，$a(b + c_\gamma) = a c_\gamma = a b + a c_\gamma$が成り立つ．

(オ)の場合は，

① aが有限で，b_β，c_γならば，

$\beta > \gamma$のとき，$a b_\beta + a c_\gamma = a b_\beta$は確定数で，
$a(b_\beta + c_\gamma) = a b_\beta = a b_\beta + a c_\gamma$が成り立つ．

$\beta < \gamma$のとき，$a b_\beta + a c_\gamma = a c_\gamma$は確定数で，
$a(b_\beta + c_\gamma) = a c_\gamma = a b_\beta + a c_\gamma$が成り立つ．

$\beta = \gamma$のとき，$a b_\beta + a c_\gamma = \Theta_\beta$(不定数)で，$a(b_\beta + c_\gamma) = a\Theta_\beta$であるので，
「$a = 1$または$a = -1$」のときのみ$a\Theta_\beta = \Theta_\beta$となり，(＊)が成り立つ．

② bが有限で，a_α，c_γならば，

$\alpha \geqq \gamma$のとき，$a_\alpha b + a_\alpha c_\gamma = \Theta_\alpha$(不定数)で，
$a_\alpha(b + c_\gamma) = a_\alpha c_\gamma$であるので，(＊)は成り立たない．

$\alpha < \gamma$のとき，$a_\alpha b + a_\alpha c_\gamma = a_\alpha c_\gamma$は確定数で，
$a_\alpha(b + c_\gamma) = a_\alpha c_\gamma = a_\alpha b + a_\alpha c_\gamma$が成り立つ．

③ cが有限で，a_α，b_βならば，

$\alpha \geqq \beta$のとき，$a_\alpha b_\beta + a_\alpha c = \Theta_\alpha$(不定数)で，
$a_\alpha(b_\beta + c) = a_\alpha b_\beta$であるので，(＊)は成り立たない．

$\alpha < \beta$のとき，$a_\alpha b_\beta + a_\alpha c = a_\alpha b_\beta$は確定数で，
$a_\alpha(b_\beta + c) = a_\alpha b_\beta = a_\alpha b_\beta + a_\alpha c$が成り立つ．

(カ)の場合は，

$\alpha \geqq \beta$，γのとき，$a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma = \Theta_\alpha$(不定数)で，
$a_\alpha(b_\beta + c_\gamma)$は，「$a_\alpha b_\beta$，$a_\alpha c_\gamma$，$\{-a_\alpha, 0, a_\alpha\}$」のいずれかであるので，(＊)は成り立たない．

$\beta > \alpha$，γのとき，$a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma = a_\alpha b_\beta$は確定数で，
$a_\alpha(b_\beta + c_\gamma) = a_\alpha b_\beta = a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma$が成り立つ．

$\gamma > \alpha$，βのとき，$a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma = a_\alpha c_\gamma$は確定数で，
$a_\alpha(b_\beta + c_\gamma) = a_\alpha c_\gamma = a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma$が成り立つ．

$\beta = \gamma > \alpha$のとき，$a_\alpha b_\beta + a_\alpha c_\gamma = \Theta_\beta$(不定数)で，
$a_\alpha(b_\beta + c_\gamma) = a_\alpha\Theta_\beta \neq \Theta_\beta$であるので，(＊)は成り立たない．

以上(ア)～(カ)により，(＊)は，$ab + ac$が確定数ならば常に成り立ち，$ab + ac$が不定数ならば，「$a = 1$または$a = -1$」のときのみ成り立つ■

（iii） b＋cが確定数で，aが有限ならば，ab＋acが確定数であることを示せばよい．
実際，ab＋acが確定数ならば，(ｉ)より(＊)が成り立つ．
仮定「aが有限」より，a，b，cを次の(ア)～(オ)の場合に分ける．

a，b，cの少なくとも１つが０ ・・・(ア)
a，b，cのいずれもが０でなくて，
b，cが同符号 ・・・(イ)
b，cが異符号で，b，cの両方が有限 ・・・(ウ)
b，cのうちの片方が有限で，他方が無限大 ・・・(エ)
b，cの両方が無限大 ・・・(オ)

ここで，それぞれの場合の，「ab＋acが確定数か否か」を調べると次のようになる．
(ア)の場合は，明らかに，ab＋acは確定数である．
(イ)の場合は，ab，acが同符号であるので，ab＋acは確定数である．
(ウ)の場合は，a，b，cがすべて有限であるので，ab＋acは確定数である．
(エ)の場合は，b_β，cは有限とすれば，$ab_\beta＋ac＝ab_\beta$は確定数である．
bは有限，c_γとすれば，$ab＋ac_\gamma＝ac_\gamma$は確定数である．
(オ)の場合は，b_β，c_γとすれば，
$\beta>\gamma$のとき，$ab_\beta＋ac_\gamma＝ab_\beta$は確定数である．
$\beta<\gamma$のとき，$ab_\beta＋ac_\gamma＝ac_\gamma$は確定数である．
$\beta=\gamma$のとき，$ab_\beta＋ac_\gamma＝\Theta_\beta$(不定数)である．しかし，このときは，
$b＋c＝\Theta_\beta$であるので，仮定「b＋cが確定数」に反する■

$\boxed{15}$ 定理1-9（等式に関する諸性質）
a，b，c∈Ωとすれば，次の関係が成り立つ．
（ｉ） aが有限ならば，「a＝b ⇔ a－b＝０」．
（ii） cが有限ならば，「a＝b ⇔ a＋c＝b＋c」．
（iii） c(≠０)が有限ならば，「a＝b ⇔ ac＝bc」．
（iv） ab＝０ ⇔ 「a＝０ または b＝０」．
（v） a＝bならば，a＋c＝b＋c．
（vi） a＝bならば，ac＝bc．
（vii） a_αならば，「$a＝b ⇔ a－b＝\Theta_\alpha$」．
（viii） c_γならば，「『a，b$\in\Theta_\gamma$でa≠b』でなければ『a＋c＝b＋c ⇒ a＝b』」．
（ix） c_γならば，「『a，b$\in\Theta_\gamma$でa≠b』でなければ『ac＝bc ⇒ a＝b』」．
証明 A，B，Cを，$A_{INT}＝a$，$B_{INT}＝b$，$C_{INT}＝c$となる正規集合とする．
（ｉ）（ア） a＝b ⇒ a－b＝０の証明：
aが有限ならばbも有限であるので，定理1-1の(ii)より明らか．
（イ） a－b＝０ ⇒ a＝bの証明：
aが有限ならばbも有限である．実際，b_βとすれば，$a－b_\beta＝－b_\beta≠０$となり仮定に反する．したがって，定理1-1の(ii)より明らか■

（ⅱ）（ア） $a=b \Rightarrow a+c=b+c$ の証明：
$a=b$ が有限ならば，a，b，c がすべて有限であるので，定理1-1の（ⅱ）より明らか.
$a=b=\infty_\alpha$ ならば，c が有限より，$a+c=\infty_\alpha=b+c$.
$a=b=-\infty_\alpha$ ならば，c が有限より，$a+c=-\infty_\alpha=b+c$.
（イ） $a+c=b+c \Rightarrow a=b$ の証明：
a が有限ならば，a，b，c がすべて有限になるので，定理1-1の（ⅱ）より明らか.
$a=\infty_\alpha$ ならば，c が有限より，$a+c=\infty_\alpha=b+c$ であるので，$b=\infty_\alpha$.
$a=-\infty_\alpha$ ならば，c が有限より，$a+c=-\infty_\alpha=b+c$ であるので，$b=-\infty_\alpha$ ■

（ⅲ）（ア） $a=b \Rightarrow ac=bc$ の証明：
$a=b$ が有限ならば，a，b，c がすべて有限であるので，定理1-1の（ⅱ）より明らか.
$a=b=\infty_\alpha$ ならば，$c\,(\neq 0)$ が有限より，$ac=(\mathrm{sgn}\,c)\infty_\alpha=bc$.
$a=b=-\infty_\alpha$ ならば，$c\,(\neq 0)$ が有限より，$ac=(-\mathrm{sgn}\,c)\infty_\alpha=bc$.
（イ） $ac=bc \Rightarrow a=b$ の証明：
a が有限ならば，a，b，c がすべて有限になるので，定理1-1の（ⅱ）より明らか.
$a=\infty_\alpha$ ならば，$c\,(\neq 0)$ が有限より，$ac=(\mathrm{sgn}\,c)\infty_\alpha=bc$ であるので，$b=\infty_\alpha$.
$a=-\infty_\alpha$ ならば，$c\,(\neq 0)$ が有限より，$ac=(-\mathrm{sgn}\,c)\infty_\alpha=bc$ であるので，
$b=-\infty_\alpha$ ■

（ⅳ） 結合集合（A，B）$=\phi \Leftrightarrow$「$A=\phi$ または $B=\phi$」■

（ⅴ）（ア） $a=b$ が有限の場合：
c が有限ならば，a，b，c がすべて有限であるので，定理1-1の（ⅱ）より明らか.
c_γ ならば，$a+c=c=b+c$.
（イ） $a=b=\infty_\alpha$ の場合：
c が有限ならば，$a+c=\infty_\alpha=b+c$.
$c=\infty_\gamma$ ならば，$a+c=\infty_{\max\{\alpha,\gamma\}}=b+c$.
$c=-\infty_\gamma$，$\alpha>\gamma$ ならば，$a+c=\infty_\alpha=b+c$.
$\alpha=\gamma$ ならば，$a+c=\Theta_\alpha=b+c$.
$\alpha<\gamma$ ならば，$a+c=-\infty_\gamma=b+c$.
（ウ） $a=b=-\infty_\alpha$ の場合：
c が有限ならば，$a+c=-\infty_\alpha=b+c$.
$c=\infty_\gamma$，$\alpha>\gamma$ ならば，$a+c=-\infty_\alpha=b+c$.
$\alpha=\gamma$ ならば，$a+c=\Theta_\alpha=b+c$.
$\alpha<\gamma$ ならば，$a+c=\infty_\gamma=b+c$.
$c=-\infty_\gamma$ ならば，$a+c=-\infty_{\max\{\alpha,\gamma\}}=b+c$ ■

（ⅵ） AとBは同符号または空集合であり，card A＝card B であるので，結合集合（A，C）と（B，C）も同符号または空集合で，card（A，C）＝card（B，C）である■

（ⅶ）（ア） $a=b \Rightarrow a-b=\Theta_\alpha$ の証明：

$a=b=\infty_\alpha$ ならば，$a-b=\infty_\alpha-\infty_\alpha=\Theta_\alpha$.

$a=b=-\infty_\alpha$ ならば，$a-b=-\infty_\alpha-(-\infty_\alpha)=-\infty_\alpha+\infty_\alpha=\infty_\alpha-\infty_\alpha=\Theta_\alpha$.

（イ） $a-b=\Theta_\alpha \Rightarrow a=b$ の証明：

$a-b=\Theta_\alpha$ となるのは，$a=b=\infty_\alpha$ または $a=b=-\infty_\alpha$ の場合だけである■

（ⅷ） $a\in\Theta_\gamma$，$b\in\Theta_\gamma$ で $a+c=b+c$ となるのは，$a=b$ と $a\neq b$ の両方の場合があるが，$a\neq b$ でなければ当然 $a=b$ である.

$a\notin\Theta_\gamma$，$b\in\Theta_\gamma$ ならば $a+c\neq b+c$ であるので仮定に反する.

$a\in\Theta_\gamma$，$b\notin\Theta_\gamma$ ならば $a+c\neq b+c$ であるので仮定に反する.

$a\notin\Theta_\gamma$，$b\notin\Theta_\gamma$ ならば $a+c=a$，$b+c=b$，$a+c=b+c$ より $a=b$■

（ⅸ） $a\in\Theta_\gamma$，$b\in\Theta_\gamma$ で $ac=bc$ となるのは，$a=b$ と $a\neq b$ の両方の場合があるが，$a\neq b$ でなければ当然 $a=b$ である.

$a\notin\Theta_\gamma$，$b\in\Theta_\gamma$ ならば $ac\neq bc$ であるので仮定に反する.

$a\in\Theta_\gamma$，$b\notin\Theta_\gamma$ ならば $ac\neq bc$ であるので仮定に反する.

$a\notin\Theta_\gamma$，$b\notin\Theta_\gamma$ ならば $ac=(\mathrm{sgn}\,c)a$，$bc=(\mathrm{sgn}\,c)b$，$ac=bc$ より $a=b$■

$\boxed{16}$ 定理1-10（不等式に関する諸性質その１）

$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}\in U(\Omega)$，$a\in\mathbf{a}$，$b\in\mathbf{b}$ とすれば，次の関係が成り立つ.

（ⅰ） $a<b \Leftrightarrow b-a>0$.

（ⅱ） $\mathbf{a}<\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b}-\mathbf{a}>0$.

証明（ⅰ） A，Bを，$A_{INT}=a$，$B_{INT}=b$，$A\cap B=\phi$ となる正規集合とする.

（ア） $a<b \Rightarrow b-a>0$ の証明：

仮定 $a<b$ より，$^\forall\phi$，$\{B\cup(-A)\}_\phi$ は正の正規集合である．ここで，

$$\{B\cup(-A)\}\cup(-\phi)=B\cup(-A)$$

であるので，$^\forall\phi$，$[\{B\cup(-A)\}\cup(-\phi)]_\phi$ は正の正規集合である.

（イ） $b-a>0 \Rightarrow a<b$ の証明：

$b-a$ は確定数である．実際，不定数とすれば，$b-a=\Theta_\alpha$ でなくてはならないので，仮定 $b-a>0$ に反する．したがって，

$$^\forall\phi,\ [\{B\cup(-A)\}\cup(-\phi)]_\phi$$

は正の正規集合であるので，$^\forall\phi$，$\{B\cup(-A)\}_\phi$ は正の正規集合である■

（ⅱ） $\mathbf{a}<\mathbf{b}$ は，「$^\forall a\in\mathbf{a}$，$^\forall b\in\mathbf{b}$，$a<b$」のことであり，

$$\mathbf{b}-\mathbf{a}=\bigcup_{a\in\mathbf{a},\,b\in\mathbf{b}}(b-a)$$

であるので，（ⅰ）より，（ⅱ）を得る■

$\boxed{17}$ 定理1-11（不等式に関する諸性質その２）

a，b，c，$d\in\Omega$とすれば，次の関係が成り立つ．

（ⅰ）cが有限ならば，「$a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$」．

（ⅱ）cが正の有限ならば，「$a<b \Leftrightarrow ac<bc$」．

（ⅲ）cが負の有限ならば，「$a<b \Leftrightarrow ac>bc$」．

（ⅳ）c_{γ}ならば，

「$a<b \Rightarrow$『$a+c=b+c$』or『$a+c<b+c$』or『$a+c\leqq b+c$』」．

（ⅴ）c_{γ}ならば，「$a+c<b+c \Rightarrow a<b$」．

（ⅵ）$c=\infty_{\gamma}$ならば，「$a<b \Rightarrow ac\leqq bc$」．

（ⅶ）$c=\infty_{\gamma}$ならば，「$ac<bc \Rightarrow a<b$」．

（ⅷ）$a<b$，$c<d$ならば，$a+c<b+d$．

（ⅸ）$0<a<b$，$0<c<d$ならば，$0<ac<bd$．

証明（ⅰ）仮定「cが有限」より，$a+c$，$b+c$はともに確定数である．

（ア）$a<b \Rightarrow a+c<b+c$の証明：

$$(b+c)-(a+c)=b+c-a-c \quad (\because 定理1\text{-}8の(ⅲ)，定理1\text{-}7の(ⅱ))$$
$$=(b-a)+(c-c) \quad (\because 定理1\text{-}7の(ⅰ)と(ⅱ))$$
$$=b-a \quad (\because c は有限)$$
$$>0 \quad (\because 仮定 a<b，定理1\text{-}10の(ⅰ))$$

であるので，定理1-10の(ⅰ)より，$a+c<b+c$を得る．

（イ）$a+c<b+c \Rightarrow a<b$の証明：

$$(b+c)-(a+c)>0. \quad (\because 仮定 a+c<b+c，定理1\text{-}10の(ⅰ))$$

ここで，

$$(b+c)-(a+c)=b+c-a-c \quad (\because 定理1\text{-}8の(ⅲ)，定理1\text{-}7の(ⅱ))$$
$$=(b-a)+(c-c) \quad (\because 定理1\text{-}7の(ⅰ)と(ⅱ))$$
$$=b-a \quad (\because c は有限)$$

であるので，$b-a>0$，すなわち，$a<b$を得る■

（ⅱ）（ア）$a<b \Rightarrow ac<bc$の証明：

a，bが有限ならば，a，b，cはすべて有限である．

aが有限で$b=\infty_{\alpha}$ならば，cが正の有限より，「acは有限で$bc=\infty_{\alpha}$」である．

aが有限で$b=-\infty_{\alpha}$ならば，$b<a$となるので仮定に反する．

bが有限で$a=\infty_{\alpha}$ならば，$b<a$となるので仮定に反する．

bが有限で$a=-\infty_{\alpha}$ならば，cが正の有限より「$ac=-\infty_{\alpha}$でbcは有限」である．

a，bが無限大ならば，cが正の有限より，「$ac=a$で$bc=b$」である．

したがって，仮定$a<b$が成り立つ場合は，いずれの場合も，$ac<bc$を得る．

（イ）$ac<bc \Rightarrow a<b$の証明：

ac，bcはともに確定数であるので，

$$bc-ac>0 \quad (\because 仮定 ac<bc，定理1\text{-}10の(ⅰ))$$

となり，$bc-ac$も確定数である．したがって，定理1-8の(ⅰ)より，

$$bc-ac=(b-a)c>0$$

と変形できるので，仮定$c>0$より，$b-a>0$，すなわち，$a<b$を得る■

（ⅲ）（ア）$a<b \Rightarrow ac>bc$の証明：

a，bが有限ならば，a，b，cはすべて有限である．

aが有限で$b=\infty_\alpha$ならば，cが負の有限より，「acは有限で$bc=-\infty_\alpha$」である．

aが有限で$b=-\infty_\alpha$ならば，$b<a$となるので仮定に反する．

bが有限で$a=\infty_\alpha$ならば，$b<a$となるので仮定に反する．

bが有限で$a=-\infty_\alpha$ならば，cが負の有限より，「$ac=\infty_\alpha$でbcは有限」である．

a，bが無限大ならば，cが負の有限より，「$ac=-a$で$bc=-b$」である．また，仮定$a<b$と定理1-2の(ⅱ)より，$-a>-b$である．

したがって，仮定$a<b$が成り立つ場合は，いずれの場合も，$ac>bc$を得る．

（イ）$ac>bc \Rightarrow a<b$の証明：

ac，bcはともに確定数であるので，

$$ac-bc>0 \quad (\because \text{仮定}\ ac>bc,\ \text{定理1-10の(i)})$$

となり，$ac-bc$も確定数である．したがって，定理1-8の(ⅰ)より，

$$ac-bc=(a-b)c>0$$

と変形できるので，仮定$c<0$より，$a-b<0$，すなわち，$a<b$を得る■

（ⅳ）次の４つの場合(ア)～(エ)に分けて証明する．

（ア）a，$b\in\Theta_\gamma$の場合は，仮定$a<b$より，

①$c=\infty_\gamma$ならば，次のいずれかが成り立つ．

$$a+c=c=b+c, \qquad a+c=\Theta_\gamma \leqq c=b+c.$$

②$c=-\infty_\gamma$ならば，次のいずれかが成り立つ．

$$a+c=c=b+c, \qquad a+c=c\leqq\Theta_\gamma=b+c.$$

（イ）$a\in\Theta_\gamma$，$b\notin\Theta_\gamma$の場合は，仮定$a<b$より，$\infty_\gamma<b$となるので，仮定c_γより，次のいずれかが成り立つ．

$$a+c=c<b=b+c, \qquad a+c=\Theta_\gamma<b=b+c.$$

（ウ）$a\notin\Theta_\gamma$，$b\in\Theta_\gamma$の場合は，仮定$a<b$より，$a<-\infty_\gamma$となるので，仮定c_γより，次のいずれかが成り立つ．

$$a+c=a<c=b+c, \qquad a+c=a<\Theta_\gamma=b+c.$$

（エ）$a\notin\Theta_\gamma$，$b\notin\Theta_\gamma$の場合は，仮定$a<b$より，

$$\infty_\gamma<a<b, \qquad a<b<-\infty_\gamma, \qquad \text{「}a<-\infty_\gamma,\ \infty_\gamma<b\text{」}$$

のいずれかであるが，仮定c_γより，いずれにおいても，次の式が成り立つ．

$$a+c=a<b=b+c$$ ■

（ⅴ）次の４つの場合(ア)～(エ)に分けて証明する．

（ア）a，$b\in\Theta_\gamma$の場合は，仮定c_γより，仮定$a+c<b+c$は成り立たない．

（イ）$a\in\Theta_\gamma$，$b\notin\Theta_\gamma$の場合は，

$$b<-\infty_\gamma \ \text{または}\ \infty_\gamma<b$$

である．ここで，

① $\infty_\gamma < b$ ならば，$a \in \Theta_\gamma \leqq \infty_\gamma < b$ より，$a < b$ が成り立つ．

② $b < -\infty_\gamma$ ならば，仮定 c_γ より，

「$a + c = c$，$b + c = b < -\infty_\gamma$」または「$a + c = \Theta_\gamma$，$b + c = b < -\infty_\gamma$」

であるので，仮定 $a + c < b + c$ は成り立たない．

（ウ） $a \notin \Theta_\gamma$，$b \in \Theta_\gamma$ の場合は，

$$a < -\infty_\gamma \text{ または } \infty_\gamma < a$$

である．ここで，

① $\infty_\gamma < a$ ならば，仮定 c_γ より，

「$\infty_\gamma < a = a + c$，$b + c = c$」または「$\infty_\gamma < a = a + c$，$b + c = \Theta_\gamma$」

であるので，仮定 $a + c < b + c$ は成り立たない．

② $a < -\infty_\gamma$ ならば，$b \in \Theta_\gamma \geqq -\infty_\gamma > a$ より，$b > a$ が成り立つ．

（エ） $a \notin \Theta_\gamma$，$b \notin \Theta_\gamma$ の場合は，次のいずれかである．

① $\infty_\gamma < a$，$\infty_\gamma < b$． ② $\infty_\gamma < a$，$b < -\infty_\gamma$．

③ $a < -\infty_\gamma$，$\infty_\gamma < b$． ④ $a < -\infty_\gamma$，$b < -\infty_\gamma$．

仮定 c_γ より，いずれも，$a + c = a$，$b + c = b$ である．したがって，

①のときは，仮定 $a + c < b + c$ より，$a < b$．

②のときは，$b + c = b < -\infty_\gamma < \infty_\gamma < a = a + c$ となるので，仮定 $a + c < b + c$ は成り立たない．

③のときは，仮定 $a + c < b + c$ より，$a < b$．

④のときは，仮定 $a + c < b + c$ より，$a < b$．

以上(ア)～(エ)により，仮定 $a + c < b + c$ が成り立てば，定理は成り立つ■

（vi） 仮定 $a < b$ より，次の５つの場合(ア)～(オ)に分けて証明する．

（ア） $0 \leqq a < b$ ならば，a，b は非負の整数で，仮定 $c = \infty_\gamma > 0$ である．したがって，定理1-1の(ⅰ)より，$ac < bc$ である．

（イ） $a < 0 \leqq b$ ならば，仮定 $c = \infty_\gamma$ より，$ac < 0 \leqq bc$ である．

（ウ） $-\infty_\gamma \leqq a < b < 0$ ならば，仮定 $c = \infty_\gamma$ より，$ac = -\infty_\gamma = bc$ である．

（エ） $a < -\infty_\gamma \leqq b < 0$ ならば，仮定 $c = \infty_\gamma$ より，$ac = a < -\infty_\gamma = bc$ である．

（オ） $a < b \leqq -\infty_\gamma$ ならば，仮定 $c = \infty_\gamma$ より，$ac = a < b = bc$ である■

（vii） 仮定 $ac < bc$ より，次の５つの場合(ア)～(オ)に分けて証明する．

（ア） $0 \leqq ac$，bc ならば，仮定 $c = \infty_\gamma > 0$ より，a，b は非負の整数になる．したがって，定理1-1の(ⅰ)より，$ac < bc$ ならば，$a < b$ である．

（イ） $ac < 0 \leqq bc$ ならば，仮定 $c = \infty_\gamma$ より，a は負の整数，b は非負の整数になるので，$a < b$ である．

（ウ） $-\infty_\gamma \leqq ac$，$bc < 0$ ならば，仮定 $c = \infty_\gamma$ より，仮定 $ac < bc$ は成り立たない．

（エ） $ac < -\infty_\gamma \leqq bc < 0$ ならば，仮定 $c = \infty_\gamma$ より，$a < -\infty_\gamma \leqq b < 0$ である．

（オ） ac，$bc \leqq -\infty_\gamma$ ならば，

$$(-a)c,\ (-b)c \geqq \infty_\gamma,$$

$$\text{仮定 } c = \infty_\gamma > 0,$$

仮定ａｃ＜ｂｃより，(－ａ)ｃ＞(－ｂ)ｃ

であるので，(ア)より，－ａ＞－ｂ，すなわち，ａ＜ｂを得る．

以上(ア)～(オ)により，仮定ａｃ＜ｂｃが成り立てば，定理は成り立つ■

(ⅷ) 仮定ａ＜ｂ，ｃ＜ｄより，

ｂ－ａ＞０，　ｄ－ｃ＞０ (∵定理1-10の(ｉ))

であるので，ｂ－ａ，ｄ－ｃは，ともに確定数である．したがって，

(ｂ－ａ)＋(ｄ－ｃ)＞０ (∵定理1-1の(ｉ))

である．ここで，左辺を変形すれば，

(ｂ－ａ)＋(ｄ－ｃ) ＝ｂ－ａ＋ｄ－ｃ (∵定理1-7の(ⅱ))

＝(ｂ＋ｄ)－(ａ＋ｃ)．

(∵定理1-7の(ｉ)と(ⅱ)，定理1-8の(ｉ)と(ⅱ))

したがって，(ｂ＋ｄ)－(ａ＋ｃ)＞０であるので

ａ＋ｃ＜ｂ＋ｄ (∵定理1-10の(ⅱ))

が成り立つ■

(ⅸ) 定理1-1の(ｉ)より明らか■

第２章　有理数

1 分数

初めに，若干の用語と記号を定める．

（ｉ）**ａ**，**ｂ**∈Ｕ(Ω)，**ａ**＞０とするとき，**ｂ**／**ａ**を分数という．

（ⅱ）分数**ｂ**／**ａ**と**ｄ**／**ｃ**は「**ａ**＝**ｃ**，**ｂ**＝**ｄ**」のとき等しいといい，**ｂ**／**ａ**＝**ｄ**／**ｃ**または**ｄ**／**ｃ**＝**ｂ**／**ａ**で表す．

（ⅲ）分数**ｂ**／**ａ**は，**ｂ**＞０のとき正の分数，**ｂ**＜０のとき負の分数，**ｂ**＝０のとき零の分数(または単に零)といい，その他の分数の符号は考えないものとする．

（ⅳ）分数(－**ｂ**)／**ａ**を，－**ｂ**／**ａ**で表す．

（ⅴ）ａ，ｂ，ｃ，ｄ∈Ωのとき，ｂｃ＝ａｄならば，分数ｂ／ａとｄ／ｃは同値であるといい，ｂ／ａ～ｄ／ｃ　または　ｄ／ｃ～ｂ／ａで表す．

（ⅵ）ａ，ｂ，ｃ∈Ω，ａ＞０，ｃ＞０のとき，分数ｂｃ／ａｃから分数ｂ／ａを得ることを約分といい，１以外に約す値ｃが存在しない分数を既約分数という．

（ⅶ）分数ｂ／ａから得られる既約分数を，ｂ∥ａで表す．

2 定義2-1（分数の分類）

分数を次のように分類する．

（ｉ）第１種分数：分母，分子が確定数で，約分の仕方によらず，得られる既約分数が一定の分数．

（ⅱ）第２種分数：分母，分子が確定数で，約分の仕方により，得られる既約分数が２つ以上ある分数．

（ⅲ）第３種分数：分母，分子の少なくとも片方が不定数の分数．

例：４∥６＝２／３であり，これ以外の既約分数は存在しないので，４／６は第１種分数である．

例：∞_0／∞_1＝∞_0／$\infty_1\infty_0$より，∞_0∥∞_1＝１／∞_1であり，これ以外の既約分数は存在しないので，∞_0／∞_1は第１種分数である．

例：∞_α∥∞_α＝１／２，　∞_α∥∞_α＝１／３がともに成り立ち，１／２と１／３は異なる既約分数であるので，∞_α／∞_αは第２種分数である．

3 定理2-1

分母，分子が確定数である分数ｂ／ａは，

（ｉ）ａ，ｂの少なくとも片方が有限整数ならば，第１種分数である．

（ⅱ）a_α，b_βならば，$\alpha\neq\beta$のとき第１種分数で，$\alpha=\beta$のとき第２種分数である．

証明　ａ，ｂの両方が有限整数ならば，ｂ／ａは従来の分数と同じである．片方だけが有限整数ならば，定理1-5の(ⅱ)より，ｂ∥ａは一定である．したがって，(ｉ)は明らかであるので(ⅱ)を証明する．

$\alpha<\beta$ ならば，

分数の定義より $a>0$ であり，$b/a=ba/a$ であるので，$b/\!/a=b/1$．

$\alpha>\beta$ ならば，

$b>0$ のときは，$b/a=b/ab$ であるので，$b/\!/a=1/a$．

$b<0$ のときは，$b/a=(-1)(-b)/a(-b)$ であるので，$b/\!/a=-1/a$．

したがって，$\alpha\neq\beta$ ならば，第１種分数である．

$\alpha=\beta$ ならば，

$b/a=\infty_\alpha/\infty_\alpha$，$b/a=-\infty_\alpha/\infty_\alpha$ のいずれかであるので，第２種分数である■

$\boxed{4}$ 定理2-2

第１種分数における同値関係は，同値律を満たす．

証明　反射律「$b/a\sim b/a$」は明らか．実際，$ba=ab$ が成り立つ．

対称律「$b/a\sim d/c$ ならば $d/c\sim b/a$」も明らか．実際，「$bc=ad$ ならば $da=cb$」が成り立つ．次に，

推移律「$b/a\sim d/c$，$d/c\sim f/e$ ならば $b/a\sim f/e$」を証明する．

初めに，$d=0$ とすれば，仮定「$b/a\sim d/c$」より $b=0$，仮定「$d/c\sim f/e$」より $f=0$ であるので，明らかに，$be=af$ が成り立つ．以下，$d\neq0$ とする．

仮定「$b/a\sim d/c$，$d/c\sim f/e$」より，

$$bc=ad,\ de=cf,\ a>0,\ c>0,\ e>0. \qquad (*1)$$

ここで，$bc=ad$ の両辺に e を掛け，$de=cf$ の両辺に a を掛ければ，

$$bce=ade,\quad ade=acf.\ (\because 定理1\text{-}9の(\mathrm{vi}))$$

したがって，

$$bce=acf \qquad (*2)$$

となる．

また，$bc=ad$ の両辺に f を掛け，$de=cf$ の両辺に b を掛ければ，

$$bcf=adf,\quad bde=bcf.\ (\because 定理1\text{-}9の(\mathrm{vi}))$$

したがって，

$$bde=adf \qquad (*3)$$

となる．ここで，

（ⅰ）$c>0$ が有限整数ならば，$(*2)$ と定理1-9の(ⅲ)より，$be=af$ を得る．

（ⅱ）$c=\infty_\alpha$ で，$d\notin\Theta_\alpha$（すなわち，d_β，$\alpha<\beta$）ならば，$(*1)$ と，今考えている分数がすべて第１種分数であることより，

$$0<a<\infty_\beta,\ 0<e<\infty_\beta,\ b_\beta,\ f_\beta,\ \alpha<\beta$$

でなくてはならないので，$(be)_\beta$，$(af)_\beta$ となる．

また，$(*2)$ より，b と f は同符号であるので，$be=af$ を得る．

（ⅲ）$c=\infty_\alpha$ で，$d\in\Theta_\alpha$ $(d\neq0)$ ならば，$(*1)$ と，今考えている分数がすべて第１種分数であることより，

$$-\infty_\alpha<b\ (\neq0)<\infty_\alpha,\ -\infty_\alpha<f\ (\neq0)<\infty_\alpha,\ a_\alpha,\ e_\alpha$$

でなくてはならないので，$(be)_\alpha$，$(af)_\alpha$ となる．

また，$(*3)$ より，b と f は同符号であるので，$be=af$ を得る■

$\boxed{5}$ 定理2-3

第１種分数の各同値類には，ただ１つの既約分数が存在する．その既約分数をｖ／ｕとし，その同値類をη（ｖ／ｕ）とすれば，η（ｖ／ｕ）は，次のように表すことができる．

$\eta(v/u)=\{vm/um : 0<m<\infty_{\alpha},\ \alpha=\min\{\xi : |um|=|vm|=\infty_{\xi}\}\}$.

ここで，記号｜｜は絶対値（｜ａ｜＝max{ａ，－ａ}）を表す．

証明　第１種分数ｂ／ａを，次のグループに分ける．

（ｉ）無限大分数・・・$|b|\geqq\infty_0$，$0<a<|b|$．

（ii）有限分数　・・・「$0<a<\infty_0$，$|b|<\infty_0$」または「$a\geqq\infty_0$，$b=0$」．

（iii）無限小分数・・・$a\geqq\infty_0$，$0<|b|<a$．

このとき，異なるグループに属する２つの分数が同じ同値類に属することはない．実際，

（ア）ｂ／ａを無限大分数，ｄ／ｃを有限分数とすれば，次の①，②のいずれかである．

① $|b|\geqq\infty_0$，$0<a<|b|$，$0<c<\infty_0$，$|d|<\infty_0$.

② $|b|\geqq\infty_0$，$0<a<|b|$，$c\geqq\infty_0$，$d=0$.

ここで，①と②は，いずれの場合も，$|bc|>|ad|$となる．

（イ）ｂ／ａを無限大分数，ｄ／ｃを無限小分数とすれば，

$|b|\geqq\infty_0$，$0<a<|b|$，$c\geqq\infty_0$，$0<|d|<c$

であるので，$|bc|>|ad|$となる．

（ウ）ｂ／ａを有限分数，ｄ／ｃを無限小分数とすれば，次の①，②のいずれかである．

① $0<a<\infty_0$，$|b|<\infty_0$，$c\geqq\infty_0$，$0<|d|<c$.

② $a\geqq\infty_0$，$b=0$，$c\geqq\infty_0$，$0<|d|<c$.

ここで，

①の場合は，$b\neq 0$ ならば$|bc|>|ad|$.

$b=0$ ならば$|bc|<|ad|$.

②の場合は，$|bc|<|ad|$.

ゆえに，(ア)～(ウ)のいずれの場合も，ｂ／ａとｄ／ｃは同値にはならない．

したがって，各同値類は，それぞれ，同じグループに属する分数の集まりである．

（ｉ）無限大分数からなる同値類の場合：

ｂ／ａとｄ／ｃを，ともに無限大分数とすれば，次の式が成り立つ．

$|b|\geqq\infty_0$，$0<a<|b|$.

$|d|\geqq\infty_0$，$0<c<|d|$.

ゆえに，

$b /\!/ a=b/1$.

$d /\!/ c=d/1$.

ここで，ｂ／１～ｄ／１とすれば，ｂ＝ｄであるので，同じ同値類に属する既約分数は，ただ１つである．

したがって，既約分数ｂ／１と同じ同値類に属する無限大分数は，すべてｂｍ／ｍの形で表される．そして，第２種分数を排除するための次の条件は，必要十分である．

$0<m<\infty_{\alpha}$，　$\alpha=\min\{\xi : |bm|=|m|=\infty_{\xi}\}$.

（ⅱ）有限分数からなる同値類の場合：

$b=0$ ならば，$b /\!\!/ a=0/1$ より，$b/a=0m/m$ と表されるが，$0m/m$ は，常に第１種分数である．また，m の条件として，$0<m<\infty_\alpha$ となる α も存在しない．

$0<a<\infty_0$，$0<|b|<\infty_0$，$b /\!\!/ a=v/u$ ならば，$b/a=vm/um$ と表される．そして，第２種分数を排除するための条件 $0<m<\infty_0$ は，必要十分である．

（ⅲ）無限小分数からなる同値類の場合：

b/a と d/c を，ともに無限小分数とすれば，次の式が成り立つ．

$$a \geqq \infty_0,\ 0<|b|<a.$$
$$c \geqq \infty_0,\ 0<|d|<c.$$

ゆえに，

$$b /\!\!/ a=(\mathrm{sgn}\, b)/a.$$
$$d /\!\!/ c=(\mathrm{sgn}\, d)/c.$$

ここで，$(\mathrm{sgn}\, b)/a \sim (\mathrm{sgn}\, d)/c$ とすれば，次の式が成り立たなくてはならない．

$$a=c,\ \mathrm{sgn}\, b=\mathrm{sgn}\, d.\ (\because a \geqq \infty_0,\ c \geqq \infty_0)$$

ゆえに，同じ同値類に属する既約分数は，ただ１つであるので，既約分数 $(\mathrm{sgn}\, b)/a$ と同じ同値類に属する無限小分数は，すべて $\{(\mathrm{sgn}\, b)m\}/am$ の形で表される．そして，第２種分数を排除するための次の条件は，必要十分である．

$$0<m<\infty_\alpha,\quad \alpha=\min\{\xi : |(\mathrm{sgn}\, b)m|=|am|=\infty_\xi\}$$ ■

$\boxed{6}$ 定義2-2（有理数）

（ⅰ）第１種分数 b/a と d/c が同値のとき，b/a と d/c は同じ有理数を表すといい，$(b/a)_{RAT}=(d/c)_{RAT}$ または $(d/c)_{RAT}=(b/a)_{RAT}$ で表す．

（ⅱ）第１種分数を元とする領域を S とするとき，

$$S_{RAT}=\{(b/a)_{RAT} : b/a \in S\}$$

とする．ただし，右辺が，ただ１つの元からなる領域 $\{x\}$ ならば，$S_{RAT}=x$ とする．

（ⅲ）正の第１種分数が表す有理数を，正の有理数という．

負の第１種分数が表す有理数を，負の有理数という．

零の第１種分数が表す有理数を，零の有理数(または単に零)という．

無限大分数が表す有理数を，無限大有理数という．

有限分数が表す有理数を，有限有理数という．

無限小分数が表す有理数を，無限小有理数という．

無限大有理数と有限有理数を合わせて，左有理数という．

無限小有理数と零の有理数を合わせて，右有理数という．

（注）零の有理数は，左右両方の有理数に含まれる．

（ⅳ）$(b/a)_{RAT}=x$ とするとき，$(-b/a)_{RAT}$ を，$-x$ で表す．

例：$1/2 \sim 2/4$ より，$(1/2)_{RAT}=(2/4)_{RAT}$.

例：$1/\infty_1 \sim \infty_0/\infty_1$ より，$(1/\infty_1)_{RAT}=(\infty_0/\infty_1)_{RAT}$.

例：$(-1/\infty_0)_{RAT}=-(1/\infty_0)_{RAT}$.

7 定理2-4

同値類η(v／u)に属する分数は，すべて同じ有理数$(v/u)_{RAT}$を表す．すなわち，

$$S=\eta(v/u)\text{とすれば，}S_{RAT}=(v/u)_{RAT}.$$

証明　定義2-2の(ⅰ)と(ⅱ)，定理2-3より明らか■

8 定義2-3 (有理数の大小関係)

x，yを有理数とし，x，yを表す第1種分数を，それぞれ，b／a，d／cとするとき，分数(bc－ad)／acが正の分数，すなわち，bc－ad＞0ならば，xはyより大であるといい，x＞y または y＜xで表す．

例：$b/a=\infty_\alpha/1$，$d/c=\infty_\beta/1$，$\alpha>\beta$ならば，$bc-ad=\infty_\alpha-\infty_\beta>0$であるので，$(\infty_\alpha/1)_{RAT}>(\infty_\beta/1)_{RAT}$.

例：$b/a=\infty_\alpha/1$，$d/c=1/\infty_\beta$ならば，$bc-ad=\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}-1>0$であるので，$(\infty_\alpha/1)_{RAT}>(1/\infty_\beta)_{RAT}$.

例：$b/a=1/\infty_\alpha$，$d/c=1/\infty_\beta$，$\alpha<\beta$ならば，$bc-ad=\infty_\beta-\infty_\alpha>0$であるので，$(1/\infty_\alpha)_{RAT}>(1/\infty_\beta)_{RAT}$.

9 定理2-5

有理数の大小関係は，その有理数を表す分数の選び方によらず，一意的に定まる．

すなわち，

$$b_1/a_1,\ b_2/a_2\in\eta(v/u);\quad d_1/c_1,\ d_2/c_2\in\eta(t/s)$$

とするとき，次の関係が成り立つ．

$$b_1c_1-a_1d_1>0 \text{ ならば } b_2c_2-a_2d_2>0.$$

証明　定理2-3より，次のように表すことができる．

$$^{\exists}m_1>0,\ b_1/a_1=vm_1/um_1.$$
$$^{\exists}m_2>0,\ b_2/a_2=vm_2/um_2.$$
$$^{\exists}n_1>0,\ d_1/c_1=tn_1/sn_1.$$
$$^{\exists}n_2>0,\ d_2/c_2=tn_2/sn_2.$$

このとき，次の式が成り立つ．

$$b_1c_1-a_1d_1=vm_1sn_1-um_1tn_1=m_1n_1vs-m_1n_1ut.$$
$$b_2c_2-a_2d_2=vm_2sn_2-um_2tn_2=m_2n_2vs-m_2n_2ut.$$

したがって，

$$m_1n_1vs-m_1n_1ut>0 \text{ ならば } m_2n_2vs-m_2n_2ut>0$$

を証明すればよい．

$m_1n_1vs-m_1n_1ut>0$ならば，$m_1n_1vs-m_1n_1ut$は確定数であるので，定理1-8の(ⅰ)より，

$$m_1n_1(vs-ut)>0$$

と変形することができる．また，$m_1n_1>0$であるので，

$$vs-ut>0 \quad (\because \text{定理1-11の(ii)と(vii)})$$
であり，定理1-10の(i)より，
$$vs>ut \qquad (*)$$
となる．ここで，$m_2n_2>0$より，
$$m_2n_2vs \geqq m_2n_2ut \quad (\because \text{定理1-11の(ii)と(vi)})$$
であるが，
$$m_2n_2vs=m_2n_2ut$$
とすれば，
$$b_2c_2=a_2d_2$$
であるので，
$$b_2/a_2 \sim d_2/c_2$$
となる．また，
$$b_2/a_2 \sim v/u, \quad d_2/c_2 \sim t/s$$
であるので，定理2-2より，$v/u \sim t/s$であり，
$$vs=ut$$
となるが，これは(*)に反するので，
$$m_2n_2vs>m_2n_2ut$$
でなくてはならない．したがって，定理1-10の(i)より，
$$m_2n_2vs-m_2n_2ut>0$$
を得る■

$\boxed{10}$ 定理2-6

任意の有理数x，yの間には，次のうちの１つだけが成り立つ．
$$x=y, \qquad x<y, \qquad x>y.$$
証明　有理数x，yを表す第１種分数を，それぞれ，b/a，d/cとして，分数
$$(bc-ad)/ac$$
を考える．ここで，$bc-ad$の値は，次のうちの１つだけが成り立つ．

(i) $bc-ad>0$の場合は，定理2-5より，$x>y$．

(ii) $bc-ad<0$の場合は，$da-cb>0$となるので，定理2-5より，$x<y$．

(iii) $bc-ad=0$ または $bc-ad=\Theta_\alpha$の場合は，定理1-9の(i)と(vii)より，$bc=ad$であるので，$b/a \sim d/c$，すなわち，$x=y$である■

$\boxed{11}$ 定理2-7

(i) x，y，zを左有理数とすれば，「$x<y$，$y<z$ ならば $x<z$」が成り立つ．

(ii) x，y，zを右有理数とすれば，「$x<y$，$y<z$ ならば $x<z$」が成り立つ．

証明 (i) $b/a \in \eta(x)$，$d/c \in \eta(y)$，$f/e \in \eta(z)$とすれば，定理2-5より，
$$0<a<\infty_0, \quad 0<c<\infty_0, \quad 0<e<\infty_0$$
としてよい．このとき，
$$\text{仮定}\ x<y\ \text{より，}\ da-cb>0 \quad \cdots(\text{ア})$$
$$\text{仮定}\ y<z\ \text{より，}\ fc-ed>0 \quad \cdots(\text{イ})$$

であるので，定理1-10の(ⅰ)より，

$$da > cb \quad \cdots(ウ)$$

$$fc > ed \quad \cdots(エ)$$

である．ここで，(ウ)の両辺にeを掛けて，(エ)の両辺にaを掛ければ，定理1-11の(ⅱ)より，

$$dae > cbe \quad \cdots(オ)$$

$$afc > aed \quad \cdots(カ)$$

であるので，定理1-4より，

$$afc > cbe$$

となる．したがって，定理1-11の(ⅱ)より，

$$af > be$$

であり，定理1-10の(ⅰ)より，

$$fa - eb > 0$$

であるので，$x < z$を得る■

(ⅱ) 定理2-5より，次のようにすることができる．

$x = (b / \infty_{\alpha})_{RAT}$とすれば，bは1，0，−1のいずれかである．

$y = (d / \infty_{\beta})_{RAT}$とすれば，dは1，0，−1のいずれかである．

$z = (f / \infty_{\gamma})_{RAT}$とすれば，fは1，0，−1のいずれかである．

このとき，

仮定$x < y$より，$d\infty_{\alpha} - \infty_{\beta} b > 0 \quad \cdots(ア)$

仮定$y < z$より，$f\infty_{\beta} - \infty_{\gamma} d > 0 \quad \cdots(イ)$

であるので，

(ア)より，

「$b = 1$，$d = 1$，$\alpha > \beta$」，「$b = -1$，$d = -1$，$\alpha < \beta$」，

「$b = 0$，$d = 1$」，「$b = -1$，$d = 1$」，「$b = -1$，$d = 0$」

の5通りのうちのいずれかが成り立つ．

(イ)より，

「$d = 1$，$f = 1$，$\beta > \gamma$」，「$d = -1$，$f = -1$，$\beta < \gamma$」，

「$d = 0$，$f = 1$」，「$d = -1$，$f = 1$」，「$d = -1$，$f = 0$」

の5通りのうちのいずれかが成り立つ．

ここで，(ア)と(イ)が同時に成り立つのは，dの値に留意すると，次の7通りが考えられる．

①「$b = 1$，$d = 1$，$\alpha > \beta$」と「$d = 1$，$f = 1$，$\beta > \gamma$」．

②「$b = -1$，$d = -1$，$\alpha < \beta$」と「$d = -1$，$f = -1$，$\beta < \gamma$」．

③「$b = -1$，$d = -1$，$\alpha < \beta$」と「$d = -1$，$f = 1$」．

④「$b = -1$，$d = -1$，$\alpha < \beta$」と「$d = -1$，$f = 0$」．

⑤「$b = 0$，$d = 1$」と「$d = 1$，$f = 1$，$\beta > \gamma$」．

⑥「$b = -1$，$d = 1$」と「$d = 1$，$f = 1$，$\beta > \gamma$」．

⑦「$b = -1$，$d = 0$」と「$d = 0$，$f = 1$」．

そして，①～⑦のいずれの場合も，容易に，$f\infty_\alpha - \infty_\gamma b > 0$を得る■

$\boxed{12}$ 定理2-8

（ｉ） xを正の無限小有理数，yを正の有限有理数，zを正の無限大有理数とすれば，$x < y < z$が成り立つ．

（ⅱ） xを正の右有理数，yを正の左有理数とすれば，$x < y$が成り立つ．

証明（ｉ）次のように表すことができる．

xを表す分数を $1/\infty_\alpha$．

yを表す分数を d/c，$0 < c < \infty_0$，$0 < d < \infty_0$．

zを表す分数を $\infty_\beta/1$．

ここで，$d\infty_\alpha - c > 0$，$\infty_\beta c - d > 0$，$\infty_\beta\infty_\alpha - 1 > 0$となるので，定理2-5より，$x < y$，$y < z$，$x < z$の３つの不等式を得る．

（ⅱ） 正の右有理数 と 正の左有理数の定義を考えれば，(ｉ)より明らか■

$\boxed{13}$ 定理2-9

x，y，zを正の有理数とすれば，「$x < y$，$y < z$ ならば $x < z$」が成り立つ．

証明 x，y，zを，それぞれ，左有理数と右有理数に分ければ，定理2-8の(ⅱ)と，仮定「$x < y$，$y < z$」より，(x，y，z)は，(左，左，左)，(右，左，左)，(右，右，左)，(右，右，右)のいずれかである．

（ｉ）(左，左，左)の場合は，定理2-7の(ｉ)と同じ．

（ⅱ）(右，左，左)，(右，右，左)の場合は，定理2-8の(ⅱ)による．

（ⅲ）(右，右，右)の場合は，定理2-7の(ⅱ)と同じ■

$\boxed{14}$ 定理2-10

（ｉ） xを負の有理数，yを正の有理数とすれば，$x < 0 < y$が成り立つ．

（ⅱ） x，yを有理数とすれば，「$x < y$ ならば $-x > -y$」が成り立つ．

（ⅲ） x，y，zを有理数とすれば，「$x < y$，$y < z$ ならば $x < z$」が成り立つ．

証明（ｉ）次のように表すことができる．

xを表す分数を b/a，$a > 0$，$b < 0$．

0を表す分数を $0/1$．

yを表す分数を d/c，$c > 0$，$d > 0$．

このとき，$0 \cdot a - 1 \cdot b = -b > 0$，$d \cdot 1 - c \cdot 0 = d > 0$，$da - cb > 0$となるので，定理2-5より，$x < 0$，$0 < y$，$x < y$の３つの不等式を得る■

（ⅱ）次のように表すことができる．

xを表す分数を b/a，$a > 0$．

yを表す分数を d/c，$c > 0$．

このときは，それぞれ，次のようにしてよい．

$-x$を表す分数は $-b/a$，$a > 0$．

$-y$を表す分数は $-d/c$，$c > 0$．

ここで，仮定$x<y$より，$da-cb>0$であるので，

$$
\begin{aligned}
(-b)c-a(-d) &= -bc+ad \\
&= da-cb \quad (\because 定理1\text{-}7の(\mathrm{i})) \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

したがって，定理2-5より，$-x>-y$を得る■

（iii）仮定「$x<y$，$y<z$」と(i)より，x，y，zの符号のこの順の組は，

$(+,+,+)$，$(0,+,+)$，$(-,+,+)$，$(-,0,+)$，
$(-,-,+)$，$(-,-,0)$，$(-,-,-)$

のいずれかである．

（ア）$(+,+,+)$の場合は定理2-9と同じ．

（イ）$(0,+,+)$，$(-,+,+)$，$(-,0,+)$，$(-,-,+)$，$(-,-,0)$の場合は，xとzの符号を比べれば，(i)より$x<z$を得る．

（ウ）$(-,-,-)$の場合は，$-x$，$-y$，$-z$の符号を考えれば，$(+,+,+)$である．

仮定「$x<y$，$y<z$」と(ii)より，$-x>-y$，$-y>-z$となるので，(ア)より，$-x>-z$，すなわち，$x<z$を得る■

15 定理2-11（不等式に関する諸性質その１）

（i）有限有理数は，従来の有理数と同じ大小関係を有する．

（ii）$\alpha<\beta$とすれば，$(\infty_\alpha/1)_{RAT}<(\infty_\beta/1)_{RAT}$．

（iii）$\alpha<\beta$とすれば，$(1/\infty_\alpha)_{RAT}>(1/\infty_\beta)_{RAT}$．

（iv）xを正の有限有理数とすれば，$(1/\infty_\alpha)_{RAT}<x<(\infty_\beta/1)_{RAT}$．

証明（i）定理2-5より，既約分数を比較すればよい．そして，有限有理数の大小関係の定義は，従来の有理数の大小関係の定義と同じである．

(ii)と(iii)は，定理2-5より，既約分数を比較すれば容易に証明される．

(iv)は，定理2-8の(i)と同じ■

16 x^+を正の有限有理数，x^-を負の有限有理数，$\alpha<\beta$とすれば，有理数の並び方は，定理2-10，定理2-11より，次のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
&\cdots<-(\infty_\beta/1)_{RAT}<\cdots<-(\infty_\alpha/1)_{RAT}<\cdots<x^-<\cdots \\
&<-(1/\infty_\alpha)_{RAT}<\cdots<-(1/\infty_\beta)_{RAT}<\cdots<0<\cdots \\
&<(1/\infty_\beta)_{RAT}<\cdots<(1/\infty_\alpha)_{RAT}<\cdots<x^+<\cdots \\
&<(\infty_\alpha/1)_{RAT}<\cdots<(\infty_\beta/1)_{RAT}<\cdots
\end{aligned}
$$

$\boxed{17}$ 定義2-4（第２種分数，第３種分数が表す有理数）

（ｉ）第２種分数$\infty_\alpha/\infty_\alpha$と同値な第１種分数すべての集合をＳとするとき，

$$(\infty_\alpha/\infty_\alpha)_{RAT}=S_{RAT}$$

とする．

（ⅱ）第２種分数$-\infty_\alpha/\infty_\alpha$と同値な第１種分数すべての集合をＳとするとき，

$$(-\infty_\alpha/\infty_\alpha)_{RAT}=S_{RAT}$$

とする．

（ⅲ）第３種分数$\mathbf{b}/\mathbf{a}$において，$a\in\mathbf{a}$，$b\in\mathbf{b}$とするとき，

$$(\mathbf{b}/\mathbf{a})_{RAT}=\bigcup_{a\in\mathbf{a},\ b\in\mathbf{b}}(b/a)_{RAT}$$

とする．

例：$(\infty_\alpha/\infty_\alpha)_{RAT}=\{r : (1/\infty_\alpha)_{RAT}\leqq r\leqq(\infty_\alpha/1)_{RAT}$，$r$は有理数$\}$．

$(-\infty_\alpha/\infty_\alpha)_{RAT}=\{r : -(\infty_\alpha/1)_{RAT}\leqq r\leqq-(1/\infty_\alpha)_{RAT}$，$r$は有理数$\}$

であるが，ここで，

$$(\infty_\alpha/\infty_\alpha)_{RAT}=\underline{\Sigma}_\alpha$$

と表せば，

$$(-\infty_\alpha/\infty_\alpha)_{RAT}=\{-r : r\in\underline{\Sigma}_\alpha\}=-\underline{\Sigma}_\alpha$$

である．

例：Θ_0/∞_0は，第３種分数である．ここで，

（ｉ）$-\infty_0<b<\infty_0$ならば，$(b/\infty_0)_{RAT}$は，

$$-(1/\infty_0)_{RAT},\quad (0/1)_{RAT},\quad (1/\infty_0)_{RAT}$$

のいずれかである．

（ⅱ）$b=\infty_0$ならば，$(b/\infty_0)_{RAT}=\underline{\Sigma}_0$．

（ⅲ）$b=-\infty_0$ならば，$(b/\infty_0)_{RAT}=-\underline{\Sigma}_0$．

したがって，$(\Theta_0/\infty_0)_{RAT}=(-\underline{\Sigma}_0)\cup\{(0/1)_{RAT}\}\cup\underline{\Sigma}_0$である．

$\boxed{18}$ 定理2-12

b/aとd/cの，少なくとも片方が第２種分数の場合でも，次の関係が成り立つ．

$$bc-ad>0\Leftrightarrow(b/a)_{RAT}>(d/c)_{RAT}.$$

証明（ｉ）b/aとd/cの両方が第２種分数の場合：

$$b/a=\infty_\alpha/\infty_\alpha,\quad d/c=\infty_\beta/\infty_\beta\quad\cdots(ア)$$
$$b/a=\infty_\alpha/\infty_\alpha,\quad d/c=-\infty_\beta/\infty_\beta\quad\cdots(イ)$$
$$b/a=-\infty_\alpha/\infty_\alpha,\quad d/c=\infty_\beta/\infty_\beta\quad\cdots(ウ)$$
$$b/a=-\infty_\alpha/\infty_\alpha,\quad d/c=-\infty_\beta/\infty_\beta\quad\cdots(エ)$$

の４通りが考えられる．

(ア)のときは，$bc-ad=\infty_\alpha\infty_\beta-\infty_\alpha\infty_\beta=\Theta_{\max\{\alpha,\beta\}}$であるので，$bc-ad>0$は定義されていない．$\underline{\Sigma}_\alpha$と$\underline{\Sigma}_\beta$の大小関係も定義されていない．

(イ)のときは，$bc-ad=\infty_\alpha\infty_\beta+\infty_\alpha\infty_\beta=\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}$であるので，$bc-ad>0$が成り立つ．$\underline{\Sigma}_\alpha>-\underline{\Sigma}_\beta$も成り立つ．

(ウ)のときは，$bc-ad=-\infty_\alpha\infty_\beta-\infty_\alpha\infty_\beta=-\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$であるので，$bc-ad>0$は成り立たない．$-\underline{\Sigma}_\alpha>\underline{\Sigma}_\beta$も成り立たない．

(エ)のときは，$bc-ad=-\infty_\alpha\infty_\beta+\infty_\alpha\infty_\beta=\Theta_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$であるので，$bc-ad>0$は定義されていない．$-\underline{\Sigma}_\alpha$と$-\underline{\Sigma}_\beta$の大小関係も定義されていない．

したがって，「$bc-ad>0$」と「$(b/a)_{RAT}>(d/c)_{RAT}$」は，同時に成り立ち，同時に成り立たない．

（ⅱ） b/aが第２種分数で，d/cが第１種分数の場合：

$$b/a=\infty_\alpha/\infty_\alpha \quad \cdots(\text{ア})$$

$$b/a=-\infty_\alpha/\infty_\alpha \quad \cdots(\text{イ})$$

の２通りが考えられる．

(ア)の場合は，

① $bc-ad>0 \Rightarrow (b/a)_{RAT}>(d/c)_{RAT}$の証明：

仮定より，$bc-ad=\infty_\alpha c-\infty_\alpha d>0$．分数の定義より，$c>0$であるので，

(①の１) $c>0$，$d\leqq 0$　　(①の２) $c=\infty_\beta$，$0<d<\infty_\beta$，$\alpha<\beta$

のいずれかでなくてはならない．

(①の１)ならば，$(d/c)_{RAT}\leqq 0$であるので，

$$(b/a)_{RAT}=(\infty_\alpha/\infty_\alpha)_{RAT}=\underline{\Sigma}_\alpha>(d/c)_{RAT}.$$

(①の２)ならば，$(d/c)_{RAT}=(1/\infty_\beta)_{RAT}$であり，$\alpha<\beta$であるので，

$$(d/c)_{RAT}=(1/\infty_\beta)_{RAT}<(1/\infty_\alpha)_{RAT}\leqq\underline{\Sigma}_\alpha=(b/a)_{RAT}.$$

② $(b/a)_{RAT}>(d/c)_{RAT} \Rightarrow bc-ad>0$の証明：

仮定より，$\underline{\Sigma}_\alpha>(d/c)_{RAT}$であるので，

(②の１) $(d/c)_{RAT}\leqq 0$　　(②の２) $0<(d/c)_{RAT}<(1/\infty_\alpha)_{RAT}$

のいずれかでなくてはならない．

(②の１)ならば，「$d\leqq 0$，$c>0$」であるので，$bc-ad=\infty_\alpha c-\infty_\alpha d>0$．

(②の２)ならば，「$c=\infty_\beta$，$0<d<\infty_\beta$，$\alpha<\beta$」であるので，

$$bc-ad=\infty_\alpha c-\infty_\alpha d>0.$$

(イ)の場合は，

① $bc-ad>0 \Rightarrow (b/a)_{RAT}>(d/c)_{RAT}$の証明：

仮定より，$bc-ad=-\infty_\alpha c-\infty_\alpha d>0$．分数の定義より，$c>0$であるので，

$$0<c<\infty_\beta,\ d=-\infty_\beta,\ \alpha<\beta$$

でなくてはならない．したがって，

$$(d/c)_{RAT}=(-\infty_\beta/1)_{RAT}<(-\infty_\alpha/1)_{RAT}\leqq-\underline{\Sigma}_\alpha=(b/a)_{RAT}.$$

② $(b/a)_{RAT}>(d/c)_{RAT} \Rightarrow bc-ad>0$の証明：

仮定より，$-\underline{\Sigma}_\alpha>(d/c)_{RAT}$であるので，

$$(-\infty_\alpha/1)_{RAT}>(d/c)_{RAT}$$

でなくてはならない．したがって，

$$0<c<\infty_\beta,\ d=-\infty_\beta,\ \alpha<\beta$$

であるので，

$$bc-ad=-\infty_\alpha c-\infty_\alpha d>0.$$

（ⅲ） b/a が第１種分数で，d/c が第２種分数の場合：

$$d/c=\infty_\alpha/\infty_\alpha \quad \cdots(\text{ア})$$

$$d/c=-\infty_\alpha/\infty_\alpha \quad \cdots(\text{イ})$$

の２通りが考えられる．

（ア）の場合は，

① $bc-ad>0 \Rightarrow (b/a)_{RAT}>(d/c)_{RAT}$ の証明：

仮定より，$bc-ad=b\infty_\alpha-a\infty_\alpha>0$．分数の定義より，$a>0$ であるので，

$$b=\infty_\beta,\ 0<a<\infty_\beta,\ \alpha<\beta$$

でなくてはならない．したがって，

$$(b/a)_{RAT}=(\infty_\beta/1)_{RAT}>\underline{\Sigma}_\alpha=(d/c)_{RAT}.$$

② $(b/a)_{RAT}>(d/c)_{RAT} \Rightarrow bc-ad>0$ の証明：

仮定より，$(b/a)_{RAT}>\underline{\Sigma}_\alpha$ であるので，

$$(b/a)_{RAT}>(\infty_\alpha/1)_{RAT}$$

でなくてはならない．したがって，

$$b=\infty_\beta,\ 0<a<\infty_\beta,\ \alpha<\beta$$

であるので，

$$bc-ad=b\infty_\alpha-a\infty_\alpha>0.$$

（イ）の場合は，

① $bc-ad>0 \Rightarrow (b/a)_{RAT}>(d/c)_{RAT}$ の証明：

仮定より，$bc-ad=b\infty_\alpha+a\infty_\alpha>0$．分数の定義より，$a>0$ であるので，

（①の１） $a>0,\ b\geqq 0$ 　（①の２） $a=\infty_\beta,\ -\infty_\beta<b<0,\ \alpha<\beta$

のいずれかでなくてはならない．

（①の１）ならば，$(b/a)_{RAT}\geqq 0$ であるので，

$$(b/a)_{RAT}>-\underline{\Sigma}_\alpha=(d/c)_{RAT}.$$

（①の２）ならば，$(b/a)_{RAT}=(-1/\infty_\beta)_{RAT}$ であり，$\alpha<\beta$ であるので，

$$(b/a)_{RAT}=(-1/\infty_\beta)_{RAT}>-\underline{\Sigma}_\alpha=(d/c)_{RAT}.$$

② $(b/a)_{RAT}>(d/c)_{RAT} \Rightarrow bc-ad>0$ の証明：

仮定より，$(b/a)_{RAT}>-\underline{\Sigma}_\alpha$ であるので，

（②の１） $(b/a)_{RAT}\geqq 0$，　（②の２） $(-1/\infty_\alpha)_{RAT}<(b/a)_{RAT}<0$

のいずれかでなくてはならない．

（②の１）ならば，「$a>0,\ b\geqq 0$」であるので，$bc-ad=b\infty_\alpha+a\infty_\alpha>0$．

（②の２）ならば，「$a=\infty_\beta,\ -\infty_\beta<b<0,\ \alpha<\beta$」であるので，

$$bc-ad=b\infty_\alpha+a\infty_\alpha>0 \ ■$$

19 定義2-5（有理数の乗法）

b/a，d/c を第１種分数とするとき，有理数の乗法を次のように定める．

$$(b/a)_{RAT}(d/c)_{RAT}=(bd/ac)_{RAT}.$$

例：$(\infty_1/1)_{RAT}(1/\infty_0)_{RAT}=(\infty_1/\infty_0)_{RAT}=(\infty_1/1)_{RAT}$.

例：$(\infty_0/1)_{RAT}(1/\infty_0)_{RAT}=(\infty_0/\infty_0)_{RAT}=\underline{\Sigma}_0$.

$\boxed{20}$ 定理2-13（有理数の乗法の一意性）

有理数の乗法は，その有理数を表す分数の選び方によらず一意的に定まる．すなわち，

$$b_1/a_1,\ b_2/a_2 \in \eta(v/u);\quad d_1/c_1,\ d_2/c_2 \in \eta(t/s)$$

とすれば，

b_1d_1/a_1c_1が第１種分数ならば，b_2d_2/a_2c_2も第１種分数で，

$$b_1d_1/a_1c_1 \sim b_2d_2/a_2c_2.$$

b_1d_1/a_1c_1が第２種分数ならば，b_2d_2/a_2c_2も第２種分数で，

$$b_1d_1/a_1c_1 \sim b_2d_2/a_2c_2.$$

証明（ｉ）v/u，t/sの少なくとも片方が零の分数ならば，次の３通りの場合がある．

$v/u=0/1$，t/sは零の分数ではない　・・・(ア)

v/uは零の分数ではない，$t/s=0/1$　・・・(イ)

$v/u=0/1$，$t/s=0/1$　・・・(ウ)

ここで，定理2-3より，次のように表すことができる．

(ア)の場合は，

$$b_1/a_1=0m_1/m_1.$$
$$b_2/a_2=0m_2/m_2.$$
$$d_1/c_1=tn_1/sn_1.$$
$$d_2/c_2=tn_2/sn_2.$$

(イ)の場合は，

$$b_1/a_1=vm_1/um_1.$$
$$b_2/a_2=vm_2/um_2.$$
$$d_1/c_1=0n_1/n_1.$$
$$d_2/c_2=0n_2/n_2.$$

(ウ)の場合は，

$$b_1/a_1=0m_1/m_1.$$
$$b_2/a_2=0m_2/m_2.$$
$$d_1/c_1=0n_1/n_1.$$
$$d_2/c_2=0n_2/n_2.$$

ゆえに，(ア)ならば，

$$b_1d_1/a_1c_1=0tm_1n_1/sm_1n_1.$$
$$b_2d_2/a_2c_2=0tm_2n_2/sm_2n_2.$$

（イ）ならば，

$$b_1d_1/a_1c_1=0vm_1n_1/um_1n_1.$$
$$b_2d_2/a_2c_2=0vm_2n_2/um_2n_2.$$

（ウ）ならば，

$$b_1d_1/a_1c_1=0m_1n_1/m_1n_1.$$
$$b_2d_2/a_2c_2=0m_2n_2/m_2n_2.$$

したがって，(ア)～(ウ)のいずれの場合も，b_1d_1/a_1c_1，b_2d_2/a_2c_2は，ともに第１種分数である．また，いずれの場合も，

$$b_1 d_1 a_2 c_2 = 0 = a_1 c_1 b_2 d_2$$

となるので，

$$b_1 d_1 / a_1 c_1 \sim b_2 d_2 / a_2 c_2$$

を得る．

（ⅱ）v/u，t/s が，ともに零の分数でないならば，v/u，t/s を，それぞれ，無限大分数，有限分数，無限小分数に分けて考えるが，ともに正の場合だけを証明すれば十分であろう．

（ア）$v/u = \infty_\alpha/1$，$t/s = \infty_\beta/1$ の場合：

次のように表すことができる．

$$b_1/a_1 = \infty_\alpha m_1/m_1 \quad (0 < m_1 < \infty_\alpha).$$
$$b_2/a_2 = \infty_\alpha m_2/m_2 \quad (0 < m_2 < \infty_\alpha).$$
$$d_1/c_1 = \infty_\beta n_1/n_1 \quad (0 < n_1 < \infty_\beta).$$
$$d_2/c_2 = \infty_\beta n_2/n_2 \quad (0 < n_2 < \infty_\beta).$$

ゆえに，

$$b_1 d_1/a_1 c_1 = \infty_{\max\{\alpha,\beta\}} m_1 n_1/m_1 n_1 \quad (0 < m_1 n_1 < \infty_{\max\{\alpha,\beta\}}).$$
$$b_2 d_2/a_2 c_2 = \infty_{\max\{\alpha,\beta\}} m_2 n_2/m_2 n_2 \quad (0 < m_2 n_2 < \infty_{\max\{\alpha,\beta\}}).$$

したがって，$b_1 d_1/a_1 c_1$，$b_2 d_2/a_2 c_2$は，ともに第１種分数である．また，

$$b_1 d_1 a_2 c_2 = \infty_{\max\{\alpha,\beta\}} m_1 m_2 n_1 n_2 = a_1 c_1 b_2 d_2$$

となるので，

$$b_1 d_1 / a_1 c_1 \sim b_2 d_2 / a_2 c_2$$

を得る．

（イ）$v/u = \infty_\alpha/1$，t/s が正の有限分数の場合：

次のように表すことができる．

$$b_1/a_1 = \infty_\alpha m_1/m_1 \quad (0 < m_1 < \infty_\alpha).$$
$$b_2/a_2 = \infty_\alpha m_2/m_2 \quad (0 < m_2 < \infty_\alpha).$$
$$d_1/c_1 = t n_1/s n_1 \quad (0 < n_1 < \infty_0).$$
$$d_2/c_2 = t n_2/s n_2 \quad (0 < n_2 < \infty_0).$$

ゆえに，

$$b_1 d_1/a_1 c_1 = \infty_\alpha t m_1 n_1/s m_1 n_1$$
$$= \infty_\alpha s m_1 n_1/s m_1 n_1.$$
$$(\because 0 < t m_1 n_1 < \infty_\alpha,\ 0 < s m_1 n_1 < \infty_\alpha)$$
$$b_2 d_2/a_2 c_2 = \infty_\alpha t m_2 n_2/s m_2 n_2$$
$$= \infty_\alpha s m_2 n_2/s m_2 n_2.$$
$$(\because 0 < t m_2 n_2 < \infty_\alpha,\ 0 < s m_2 n_2 < \infty_\alpha)$$

したがって，$b_1 d_1/a_1 c_1$，$b_2 d_2/a_2 c_2$は，ともに第１種分数であり，

$$b_1 d_1 a_2 c_2 = \infty_\alpha s s m_1 m_2 n_1 n_2 = a_1 c_1 b_2 d_2$$

となるので，

$$b_1 d_1 / a_1 c_1 \sim b_2 d_2 / a_2 c_2$$

を得る．

（ウ）$v/u=\infty_\alpha/1$， $t/s=1/\infty_\beta$ の場合：
次のように表すことができる．

$$b_1/a_1=\infty_\alpha m_1/m_1 \quad (0<m_1<\infty_\alpha).$$
$$b_2/a_2=\infty_\alpha m_2/m_2 \quad (0<m_2<\infty_\alpha).$$
$$d_1/c_1=n_1/\infty_\beta n_1 \quad (0<n_1<\infty_\beta).$$
$$d_2/c_2=n_2/\infty_\beta n_2 \quad (0<n_2<\infty_\beta).$$

ゆえに，

$$b_1d_1/a_1c_1=\infty_\alpha m_1n_1/\infty_\beta m_1n_1 \quad (0<m_1n_1<\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}).$$
$$b_2d_2/a_2c_2=\infty_\alpha m_2n_2/\infty_\beta m_2n_2 \quad (0<m_2n_2<\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}).$$

したがって，

$\alpha\neq\beta$ ならば，b_1d_1/a_1c_1，b_2d_2/a_2c_2 は，ともに第１種分数．

$\alpha=\beta$ ならば，b_1d_1/a_1c_1，b_2d_2/a_2c_2 は，ともに第２種分数．

また，

$$b_1d_1a_2c_2=\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}m_1m_2n_1n_2=a_1c_1b_2d_2$$

となるので，

$$b_1d_1/a_1c_1\sim b_2d_2/a_2c_2$$

を得る．

（エ）v/u が正の有限分数，$t/s=\infty_\beta/1$ の場合は(イ)と同様である．

（オ）v/u，t/s が，ともに正の有限分数の場合：
次のように表すことができる．

$$b_1/a_1=vm_1/um_1 \quad (0<m_1<\infty_0).$$
$$b_2/a_2=vm_2/um_2 \quad (0<m_2<\infty_0).$$
$$d_1/c_1=tn_1/sn_1 \quad (0<n_1<\infty_0).$$
$$d_2/c_2=tn_2/sn_2 \quad (0<n_2<\infty_0).$$

ゆえに，

$$b_1d_1/a_1c_1=vtm_1n_1/usm_1n_1 \quad (0<m_1n_1<\infty_0).$$
$$b_2d_2/a_2c_2=vtm_2n_2/usm_2n_2 \quad (0<m_2n_2<\infty_0).$$

したがって，b_1d_1/a_1c_1，b_2d_2/a_2c_2 は，ともに第１種分数であり，

$$b_1d_1a_2c_2=vtusm_1m_2n_1n_2=a_1c_1b_2d_2$$

となるので，

$$b_1d_1/a_1c_1\sim b_2d_2/a_2c_2$$

を得る．

（カ）v/u が正の有限分数，$t/s=1/\infty_\beta$ の場合：
次のように表すことができる．

$$b_1/a_1=vm_1/um_1 \quad (0<m_1<\infty_0).$$
$$b_2/a_2=vm_2/um_2 \quad (0<m_2<\infty_0).$$
$$d_1/c_1=n_1/\infty_\beta n_1 \quad (0<n_1<\infty_\beta).$$
$$d_2/c_2=n_2/\infty_\beta n_2 \quad (0<n_2<\infty_\beta).$$

ゆえに，

$$b_1 d_1 / a_1 c_1 = v m_1 n_1 / \infty_\beta u m_1 n_1$$
$$= u m_1 n_1 / \infty_\beta u m_1 n_1.$$
$$(\because 0 < v m_1 n_1 < \infty_\beta,\ 0 < u m_1 n_1 < \infty_\beta)$$
$$b_2 d_2 / a_2 c_2 = v m_2 n_2 / \infty_\beta u m_2 n_2$$
$$= u m_2 n_2 / \infty_\beta u m_2 n_2.$$
$$(\because 0 < v m_2 n_2 < \infty_\beta,\ 0 < u m_2 n_2 < \infty_\beta)$$

したがって，$b_1 d_1 / a_1 c_1$，$b_2 d_2 / a_2 c_2$は，ともに第１種分数であり，

$$b_1 d_1 a_2 c_2 = \infty_\beta u u m_1 m_2 n_1 n_2 = a_1 c_1 b_2 d_2$$

となるので，

$$b_1 d_1 / a_1 c_1 \sim b_2 d_2 / a_2 c_2$$

を得る．

（キ）$v / u = 1 / \infty_\alpha$，$t / s = \infty_\beta / 1$の場合は(ウ)と同様である．

（ク）$v / u = 1 / \infty_\alpha$，$t / s$が正の有限分数の場合は(カ)と同様である．

（ケ）$v / u = 1 / \infty_\alpha$，$t / s = 1 / \infty_\beta$の場合：

次のように表すことができる．

$$b_1 / a_1 = m_1 / \infty_\alpha m_1 \quad (0 < m_1 < \infty_\alpha).$$
$$b_2 / a_2 = m_2 / \infty_\alpha m_2 \quad (0 < m_2 < \infty_\alpha).$$
$$d_1 / c_1 = n_1 / \infty_\beta n_1 \quad (0 < n_1 < \infty_\beta).$$
$$d_2 / c_2 = n_2 / \infty_\beta n_2 \quad (0 < n_2 < \infty_\beta).$$

ゆえに，

$$b_1 d_1 / a_1 c_1 = m_1 n_1 / \infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}} m_1 n_1 \quad (0 < m_1 n_1 < \infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}).$$
$$b_2 d_2 / a_2 c_2 = m_2 n_2 / \infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}} m_2 n_2 \quad (0 < m_2 n_2 < \infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}).$$

したがって，$b_1 d_1 / a_1 c_1$，$b_2 d_2 / a_2 c_2$は，ともに第１種分数であり，

$$b_1 d_1 a_2 c_2 = \infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}} m_1 m_2 n_1 n_2 = a_1 c_1 b_2 d_2$$

となるので，

$$b_1 d_1 / a_1 c_1 \sim b_2 d_2 / a_2 c_2$$

を得る■

$\boxed{21}$ 定理2-14

b / aとd / cの，少なくとも片方が第２種分数の場合でも，次の式が成り立つ．

$$(b / a)_{RAT} (d / c)_{RAT} = (bd / ac)_{RAT}.$$

証明　b / a，d / cが，ともに正の分数の場合だけを証明すれば十分であろう．

（ｉ）$b / a = \infty_\alpha / \infty_\alpha$，$d / c$が正の無限大分数の場合：

$d / c = \infty_\beta / m$ $(0 < m < \infty_\beta)$とすることができる．

このとき，$\alpha < \beta$ならば，

$$(b / a)_{RAT} (d / c)_{RAT} = \underline{\Sigma}_\alpha (\infty_\beta / 1)_{RAT} = (\infty_\beta / 1)_{RAT} = (bd / ac)_{RAT}.$$

$\alpha = \beta$ならば，

$$(b / a)_{RAT} (d / c)_{RAT} = \underline{\Sigma}_\alpha (\infty_\alpha / 1)_{RAT} = \underline{\Sigma}_\alpha = (bd / ac)_{RAT}.$$

$\alpha > \beta$ ならば,

$(b/a)_{RAT}(d/c)_{RAT} = \underline{\Sigma}_{\alpha}(\infty_{\beta}/1)_{RAT} = \underline{\Sigma}_{\alpha} = (bd/ac)_{RAT}$

である.

（ⅱ） $b/a = \infty_{\alpha}/\infty_{\alpha}$, d/c が正の有限分数の場合：

$0 < c < \infty_0$, $0 < d < \infty_0$ であるので,

$(b/a)_{RAT}(d/c)_{RAT} = \underline{\Sigma}_{\alpha}(d/c)_{RAT} = \underline{\Sigma}_{\alpha} = (bd/ac)_{RAT}$

である.

（ⅲ） $b/a = \infty_{\alpha}/\infty_{\alpha}$, d/c が正の無限小分数の場合：

$d/c = m/\infty_{\beta}$ $(0 < m < \infty_{\beta})$ とすることができる.

このとき, $\alpha < \beta$ ならば,

$(b/a)_{RAT}(d/c)_{RAT} = \underline{\Sigma}_{\alpha}(1/\infty_{\beta})_{RAT} = (1/\infty_{\beta})_{RAT} = (bd/ac)_{RAT}$.

$\alpha = \beta$ ならば,

$(b/a)_{RAT}(d/c)_{RAT} = \underline{\Sigma}_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})_{RAT} = \underline{\Sigma}_{\alpha} = (bd/ac)_{RAT}$.

$\alpha > \beta$ ならば,

$(b/a)_{RAT}(d/c)_{RAT} = \underline{\Sigma}_{\alpha}(1/\infty_{\beta})_{RAT} = \underline{\Sigma}_{\alpha} = (bd/ac)_{RAT}$

である.

（ⅳ） $b/a = \infty_{\alpha}/\infty_{\alpha}$, $d/c = \infty_{\beta}/\infty_{\beta}$ の場合：

$$\begin{aligned}(b/a)_{RAT}(d/c)_{RAT} &= \underline{\Sigma}_{\alpha}\underline{\Sigma}_{\beta} = \underline{\Sigma}_{\max\{\alpha,\beta\}} \\ &= (\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}/\infty_{\max\{\alpha,\beta\}})_{RAT} = (bd/ac)_{RAT}\end{aligned}$$

である.

（ⅴ） b/a が正の無限大分数, $d/c = \infty_{\beta}/\infty_{\beta}$ の場合は（ⅰ）と同様である.

（ⅵ） b/a が正の有限分数, $d/c = \infty_{\beta}/\infty_{\beta}$ の場合は（ⅱ）と同様である.

（ⅶ） b/a が正の無限小分数, $d/c = \infty_{\beta}/\infty_{\beta}$ の場合は（ⅲ）と同様である■

$\boxed{22}$ 定理2-15

p, q, r を有理数とすれば, 次の式が成り立つ.

（ⅰ） $pq = qp$. (乗法の交換法則)

（ⅱ） $(pq)r = p(qr)$. (乗法の結合法則)

証明　$p = (b/a)_{RAT}$, $q = (d/c)_{RAT}$, $r = (f/e)_{RAT}$ とする.

（ⅰ） 定理2-13, 定理1-7の(ⅲ)より,

$$\begin{aligned}(b/a)_{RAT}(d/c)_{RAT} &= (bd/ac)_{RAT} = (db/ca)_{RAT} \\ &= (d/c)_{RAT}(b/a)_{RAT}\end{aligned}$$ ■

（ⅱ） 定理2-13, 定理2-14, 定理1-7の(ⅳ)より,

$$\begin{aligned}\{(b/a)_{RAT}(d/c)_{RAT}\}(f/e)_{RAT} &= (bd/ac)_{RAT}(f/e)_{RAT} \\ &= (bdf/ace)_{RAT} \\ &= (b/a)_{RAT}(df/ce)_{RAT} \\ &= (b/a)_{RAT}\{(d/c)_{RAT}(f/e)_{RAT}\}\end{aligned}$$ ■

$\boxed{23}$ 有理数の欠陥

有理数は加法について閉じていない. 実際, 有理数の和は次のようになるのが自然である.

(ⅰ) 無限大有理数と無限大有理数の和は, 無限大有理数または不定数.

(ⅱ) 無限大有理数と有限有理数の和は, 無限大有理数.

(ⅲ) 無限大有理数と無限小有理数の和は, 無限大有理数.

(ⅳ) 有限有理数と有限有理数の和は, 従来の有理数の和と同じ.

(ⅴ) 無限小有理数と無限小有理数の和は, 無限小有理数または不定数.

しかし, 有限有理数と無限小有理数の和に相当する有理数は存在しない. 例えば,

$$\mu = (1/2)_{RAT} + (1/\infty_{\alpha})_{RAT}$$

とすれば, μ は, 任意の正の有限有理数を ε とするとき,

$$(1/2)_{RAT} < \mu < (1/2)_{RAT} + \varepsilon$$

となるべき数であるが, このような数は有理数の中には存在しない.

したがって, 実数への拡張の前に, 有理数そのものの拡張を考えなくてはならないが, 拡張の具体的な方法については第3章で述べることにして, ここでは, その準備をする.

$\boxed{24}$ 定義2-6

(ⅰ) x を左有理数とするとき, 同値類 $\eta(x)$ に属して, 分母が有限整数である分数すべての集合を $\eta[x]$ で表す. 当然, $\eta[x] \subset \eta(x)$ である.

(ⅱ) x, y を左有理数, $b/a \in \eta[x]$, $d/c \in \eta[y]$ とするとき,
分数 $(bc+ad)/ac$ の既約分数すべての集合を $\{(bc+ad) /\!/ ac\}$ で表す.

$\boxed{25}$ 定義2-7 (左有理数の加法)

左有理数 x, y の加法を, 次のように定める.

$$x + y = \bigcup_{b/a \in \eta[x],\ d/c \in \eta[y]} \{(bc+ad) /\!/ ac\}_{RAT}.$$

ただし, 右辺が, ただ1つの元からなる集合の場合は, その元を $x+y$ の値とする.

例: $x = (1/2)_{RAT}$, $y = (1/3)_{RAT}$ のとき,

$$b/a \in \eta[x],\ d/c \in \eta[y]$$

とすれば, 次のように表すことができる.

$$b/a = m/2m \quad (0 < m < \infty_0).$$

$$d/c = n/3n \quad (0 < n < \infty_0).$$

ここで,

$$(bc+ad)/ac = 5mn/6mn$$

であり, $5mn /\!/ 6mn$ は, $5/6$ だけであるので,

$$(1/2)_{RAT} + (1/3)_{RAT} = (5/6)_{RAT}$$

である.

例：$x=(\infty_1/1)_{RAT}$，$y=(2/3)_{RAT}$のとき，

$$b/a\in\eta[x],\ d/c\in\eta[y]$$

とすれば，次のように表すことができる．

$$b/a=\infty_1/m\quad(0<m<\infty_0).$$

$$d/c=2n/3n\quad(0<n<\infty_0).$$

ここで，

$$(bc+ad)/ac=\infty_1/3mn$$

であり，$\infty_1/\!/3mn$は，$\infty_1/1$だけであるので，

$$(\infty_1/1)_{RAT}+(2/3)_{RAT}=(\infty_1/1)_{RAT}$$

である．

例：$x=(\infty_\alpha/1)_{RAT}$，$y=(\infty_\beta/1)_{RAT}$のとき，

$$b/a\in\eta[x],\ d/c\in\eta[y]$$

とすれば，次のように表すことができる．

$$b/a=\infty_\alpha/m\quad(0<m<\infty_0).$$

$$d/c=\infty_\beta/n\quad(0<n<\infty_0).$$

ここで，

$$(bc+ad)/ac=\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}/mn$$

であり，$\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}/\!/mn$は，$\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}/1$だけであるので，

$$(\infty_\alpha/1)_{RAT}+(\infty_\beta/1)_{RAT}=(\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}/1)_{RAT}$$

である．

例：$x=(-\infty_\alpha/1)_{RAT}$，$y=(-\infty_\beta/1)_{RAT}$のとき，

$$b/a\in\eta[x],\ d/c\in\eta[y]$$

とすれば，次のように表すことができる．

$$b/a=-\infty_\alpha/m\quad(0<m<\infty_0).$$

$$d/c=-\infty_\beta/n\quad(0<n<\infty_0).$$

ここで，

$$(bc+ad)/ac=-\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}/mn$$

であり，$-\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}/\!/mn$は，$-\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}/1$だけであるので，

$$(-\infty_\alpha/1)_{RAT}+(-\infty_\beta/1)_{RAT}=(-\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}/1)_{RAT}$$

である．

例：$x=(\infty_\alpha/1)_{RAT}$，$y=(-\infty_\beta/1)_{RAT}$のとき，

$$b/a\in\eta[x],\ d/c\in\eta[y]$$

とすれば，次のように表すことができる．

$$b/a=\infty_\alpha/m\quad(0<m<\infty_0).$$

$$d/c=-\infty_\beta/n\quad(0<n<\infty_0).$$

ここで，

（ⅰ）$\alpha>\beta$ならば，$(bc+ad)/ac=\infty_\alpha/mn$であり，$\infty_\alpha \mathbin{/\!/} mn$は，$\infty_\alpha/1$だけであるので，$(\infty_\alpha/1)_{RAT}+(-\infty_\beta/1)_{RAT}=(\infty_\alpha/1)_{RAT}$.

（ⅱ）$\alpha<\beta$ならば，$(bc+ad)/ac=-\infty_\alpha/mn$であり，$-\infty_\alpha \mathbin{/\!/} mn$は，$-\infty_\alpha/1$だけであるので，$(\infty_\alpha/1)_{RAT}+(-\infty_\beta/1)_{RAT}=(-\infty_\beta/1)_{RAT}$.

（ⅲ）$\alpha=\beta$ならば，$(bc+ad)/ac=\Theta_\alpha/mn$であり，$\{h \mathbin{/\!/} mn : h\in\Theta_\alpha\}$は，「$h\in\Theta_\alpha$，$0<k<\infty_0$」である既約分数$h/k$すべての集合である.

この集合に属する既約分数が表す有理数すべての集合を$\underline{\Theta}_\alpha$で表せば，次の式を得る.

$$(\infty_\alpha/1)_{RAT}+(-\infty_\alpha/1)_{RAT}=\underline{\Theta}_\alpha.$$

$$\underline{\Theta}_\alpha=\{z : -(\infty_\alpha/1)_{RAT}\leqq z\leqq(\infty_\alpha/1)_{RAT},\ z\text{は左有理数}\}.$$

補足：有理数の加法の手段として用いる通分は，分母に無限大整数を含む分数には必ずしも有効ではない．実際，$b/a=1/2$，$d/c=1/\infty_0$とすれば，

$$(bc+ad)/ac=\infty_0/\infty_0$$

であるが，$(1/2)_{RAT}$と$(1/\infty_0)_{RAT}$の和を$\underline{\Sigma}_0$とするのは不自然である.

このことを避けるために，通分を用いて有理数の和を求める場合の分数は，分母が有限整数のものだけに限るが，以後においも，特に支障が生じることはない.

$\boxed{26}$ 定理2-16

x，yを左有理数として，

$$b_1/a_1,\ b_2/a_2\in\eta[x];\quad d_1/c_1,\ d_2/c_2\in\eta[y]$$

とすれば，次の関係が成り立つ.

$(b_1c_1+a_1d_1)/a_1c_1$が第1種分数ならば，$(b_2c_2+a_2d_2)/a_2c_2$も第1種分数で，

$$(b_1c_1+a_1d_1)/a_1c_1\sim(b_2c_2+a_2d_2)/a_2c_2.$$

証明　v/u，t/sを，それぞれ，$x=(v/u)_{RAT}$，$y=(t/s)_{RAT}$となる既約分数とすれば，定理2-3より，次のように表すことができる.

$$b_1/a_1=vm_1/um_1\quad(0<m_1<\infty_0).$$
$$b_2/a_2=vm_2/um_2\quad(0<m_2<\infty_0).$$
$$d_1/c_1=tn_1/sn_1\quad(0<n_1<\infty_0).$$
$$d_2/c_2=tn_2/sn_2\quad(0<n_2<\infty_0).$$

ゆえに，

（ⅰ）$(b_1c_1+a_1d_1)/a_1c_1=(vsm_1n_1+utm_1n_1)/usm_1n_1$.

（ⅱ）$(b_2c_2+a_2d_2)/a_2c_2=(vsm_2n_2+utm_2n_2)/usm_2n_2$.

ここで，仮定より，（ⅰ）は第1種分数であるので，

$vsm_1n_1+utm_1n_1$は確定数，　m_1n_1は有限整数

である．したがって，定理1-8の（ⅲ）より，

$$vsm_1n_1+utm_1n_1=(vs+ut)m_1n_1$$

と変形できるので，$vs+ut$も確定数である.

また，$m_2 n_2$は有限整数であるので，定理1-8の(ⅲ)より，

$$(vs+ut)m_2 n_2 = vsm_2 n_2 + utm_2 n_2 \quad \cdots (*)$$

が成り立つことを考えれば，「(＊)の右辺が確定数で，$usm_2 n_2$が有限整数」であることは明らかであるので，(ⅱ)は第１種分数である．また，次の式が成り立つ．

$$(vsm_1 n_1 + utm_1 n_1)usm_2 n_2 = (vs+ut)usm_1 m_2 n_1 n_2.$$

$$usm_1 n_1(vsm_2 n_2 + utm_2 n_2) = (vs+ut)usm_1 m_2 n_1 n_2.$$

ゆえに，

$$(vsm_1 n_1 + utm_1 n_1)usm_2 n_2 = usm_1 n_1(vsm_2 n_2 + utm_2 n_2)$$

となるので，(ⅰ)と(ⅱ)より，

$$(b_1 c_1 + a_1 d_1)/a_1 c_1 \sim (b_2 c_2 + a_2 d_2)/a_2 c_2$$

を得る■

$\boxed{27}$ 定理2-17

x，yを左有理数として，

$$b_1/a_1,\ b_2/a_2 \in \eta[x];\quad d_1/c_1,\ d_2/c_2 \in \eta[y]$$

とすれば，次の関係が成り立つ．

$$b_1 c_1 + a_1 d_1 = \Theta_\alpha \text{ ならば } b_2 c_2 + a_2 d_2 = \Theta_\alpha.$$

証明　v/u，t/sを，それぞれ，$x=(v/u)_{RAT}$，$y=(t/s)_{RAT}$となる既約分数とすれば，定理2-3より，次のように表すことができる．

$$b_1/a_1 = vm_1/um_1 \quad (0<m_1<\infty_0).$$

$$b_2/a_2 = vm_2/um_2 \quad (0<m_2<\infty_0).$$

$$d_1/c_1 = tn_1/sn_1 \quad (0<n_1<\infty_0).$$

$$d_2/c_2 = tn_2/sn_2 \quad (0<n_2<\infty_0).$$

ゆえに，条件より，

$$b_1 c_1 + a_1 d_1 = vsm_1 n_1 + utm_1 n_1 = \Theta_\alpha,\quad m_1 n_1 \text{は有限整数}$$

である．ここで，u，sが有限整数より，

$$「v=\infty_\alpha,\ t=-\infty_\alpha」,\ 「v=-\infty_\alpha,\ t=\infty_\alpha」$$

のいずれかでなくてはならないが，いずれの場合も，

$$b_2 c_2 + a_2 d_2 = vsm_2 n_2 + utm_2 n_2 = \Theta_\alpha$$

を得る■

$\boxed{28}$ 定理2-18（左有理数の加法の一意性）

x，yを左有理数として，$b/a \in \eta[x]$，$d/c \in \eta[y]$とすれば，

(ⅰ) $bc+ad$が確定数ならば，b/a，d/cの選び方によらず，

$$x+y=\{(bc+ad)/ac\}_{RAT}.$$

(ⅱ) $bc+ad=\Theta_\alpha$ならば，b/a，d/cの選び方によらず，

$$x+y=\underline{\Theta}_\alpha.$$

証明 (ⅰ) 定義2-7，定理2-16より明らか．

(ⅱ) 定義2-7，定理2-17より明らか■

$\boxed{29}$ 定理2-19

２つの数ｘとｙの，絶対値が小さくない方をＡmax{ｘ，ｙ}で表せば，左有理数の加法に関して，次の式が成り立つ．

（ｉ） ｘ，ｙが無限大有理数とすれば，

ｘ≠－ｙならば，ｘ＋ｙ＝Ａmax{ｘ，ｙ}．

ｘ＝－ｙで「$x=(\infty_\alpha/1)_{RAT}$または$x=-(\infty_\alpha/1)_{RAT}$」ならば，$x+y=\underline{\Theta}_\alpha$．

（ii） ｘを無限大有理数，ｙを有限有理数とすれば，ｘ＋ｙ＝ｘ．

（iii） 有限有理数と有限有理数の加法は，従来の有理数の加法と同じである．

（iv） $x\in\underline{\Theta}_\alpha$ならば，$\underline{\Theta}_\alpha+x=\underline{\Theta}_\alpha$．

$x\notin\underline{\Theta}_\alpha$ならば，$\underline{\Theta}_\alpha+x=x$．

（ｖ） $\underline{\Theta}_\alpha+\underline{\Theta}_\beta=\underline{\Theta}_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$．

証明 （ｉ），（ii），（iii）は定理2-18より容易に得られる．

（iv）は（ｉ），（ii），（iii）により，（ｖ）は（iv）による■

$\boxed{30}$ 定理2-20（左有理数の加法の交換法則）

ｘ，ｙを左有理数とすれば，ｘ＋ｙ＝ｙ＋ｘが成り立つ．

証明 $b/a\in\eta[x]$，$d/c\in\eta[y]$とすれば，定理1-7の（ｉ）と（iii）より，

$$(b/a)+(d/c)=(bc+ad)/ac$$
$$=(da+cb)/ca=(d/c)+(b/a)$$

であるので，定理2-18より明らか■

$\boxed{31}$ 定理2-21（左有理数の加法の結合法則）

ｘ，ｙ，ｚを左有理数とすれば，（ｘ＋ｙ）＋ｚ＝ｘ＋（ｙ＋ｚ）が成り立つ．

証明 （ｉ） ｘ，ｙ，ｚがすべて有限有理数ならば，ｘ，ｙ，ｚは従来の有理数と同じであるので，加法の結合法則が成り立つ．

（ii） ｘ，ｙ，ｚのうちの１つだけが無限大有理数ならば，定理2-19の（ii）より，両辺の値はともに，その無限大有理数に等しい．

（iii） ｘ，ｙ，ｚのうちの１つだけが有限有理数ならば，定理2-19の（ii）より，両辺の値はともに，残りの２つの無限大有理数の和に等しい．

（iv） x_α，y_β，z_γ（x_αは，ｘが「$(\infty_\alpha/1)_{RAT}$または$-(\infty_\alpha/1)_{RAT}$」であることを表す）ならば，

（ア） α，β，γがすべて異なる順序数のときは，両辺の値はともに，Ａmax{ｘ，ｙ，ｚ}に等しい．

（イ） $\alpha=\beta<\gamma$，$\alpha=\gamma<\beta$，$\beta=\gamma<\alpha$のときは，両辺の値はともに，それぞれ，ｚ，ｙ，ｘに等しい．

（ウ） $\gamma<\alpha=\beta$，$\beta<\alpha=\gamma$，$\alpha<\beta=\gamma$のときは，両辺の値はともに，それぞれ，ｘ＋ｙ，ｘ＋ｚ，ｙ＋ｚに等しい．

（エ） $\alpha=\beta=\gamma$のときは，

① ｘ，ｙ，ｚがすべて同符号ならば，両辺の値はともに，ｘに等しい．

② その他の場合は，両辺の値はともに，$\underline{\Theta}_\alpha$に等しい■

32 定義2-8

領域$\{x : -(1/\infty_\alpha)_{RAT} \leqq x \leqq (1/\infty_\alpha)_{RAT}\}$を，$\Pi_\alpha$で表す．

33 定義2-9（右有理数の加法）

右有理数x，yの加法を，次のように定める．

（ⅰ） $x \neq -y$ならば，$x+y = \mathrm{Amax}\{x, y\}$とする．

（ⅱ） $x=-y$で，x_α（x_αは，xが「$(1/\infty_\alpha)_{RAT}$または$-(1/\infty_\alpha)_{RAT}$」であることを表す）ならば，$x+y=\Pi_\alpha$とする．

（ⅲ） $x=-y$で，$x=(0/1)_{RAT}$ならば，$x+y=(0/1)_{RAT}$とする．

例：$x=(1/\infty_0)_{RAT}$，$y=(1/\infty_1)_{RAT}$とすれば，

$$x \neq -y,\ \mathrm{Amax}\{x, y\}=x$$

であるので，

$$(1/\infty_0)_{RAT}+(1/\infty_1)_{RAT}=(1/\infty_0)_{RAT}.$$

例：$x=(1/\infty_0)_{RAT}$，$y=-(1/\infty_0)_{RAT}$とすれば，

$$x=-y$$

であるので，

$$(1/\infty_0)_{RAT}+\{-(1/\infty_0)_{RAT}\}=\Pi_0.$$

補足：無限小有理数と無限小有理数の和を定義するとき，通分は使えない．そこで，演算結果がどのようになるのが自然であるかを考える．

無限小有理数$(1/\infty_\alpha)_{RAT}$は，$(\infty_\alpha/1)_{RAT}$の逆数であり，∞_αは$\aleph_\alpha$と同じ量の数である．すなわち，$(1/\infty_\alpha)_{RAT}$は量的には，1を$\aleph_\alpha$等分割して得られる量である．

このとき，$\alpha<\beta$として，$\aleph_\alpha$と$\aleph_\beta$を比較すれば，$\aleph_\alpha$は$\aleph_\beta$に吸収されてしまうほど小さい数であるので，その逆数である$(1/\infty_\alpha)_{RAT}$は$(1/\infty_\beta)_{RAT}$を吸収するほど大きい数であると考えるのが自然である．定義2-9は，この考え方に従って定めた定義である．

34 定理2-22

右有理数の加法に関して，次の式が成り立つ．

（ⅰ） $x \in \Pi_\alpha$ならば，$\Pi_\alpha + x = \Pi_\alpha$.

$x \notin \Pi_\alpha$ならば，$\Pi_\alpha + x = x$.

（ⅱ） $\Pi_\alpha + \Pi_\beta = \Pi_{\min\{\alpha, \beta\}}$.

証明 （ⅰ）は定義2-9より容易に得られる．（ⅱ）は（ⅰ）による■

35 定理2-23（右有理数の加法の交換法則）

x，yを右有理数とすれば，$x+y=y+x$が成り立つ．

証明　定義2-9に従う．

（ⅰ） $x \neq -y$と$y \neq -x$は同値である．このとき，$x+y=\mathrm{Amax}\{x, y\}=y+x$.

（ⅱ） $x=-y$と$y=-x$は同値で，このとき，x_αであることとy_αであることも同値であるので，$x+y=\Pi_\alpha=y+x$.

（iii） $x=-y$ と $y=-x$ は同値で，このとき，$x=(0/1)_{RAT}$ と $y=(0/1)_{RAT}$ も同値であるので，$x+y=(0/1)_{RAT}=y+x$ ■

$\boxed{36}$ 定理2-24（右有理数の加法の結合法則）

x，y，z を右有理数とすれば，$(x+y)+z=x+(y+z)$ が成り立つ．

証明（i） x，y，z の少なくとも１つが $(0/1)_{RAT}$ ならば明らかである．

（ii） x_{α}，y_{β}，z_{γ} ならば，

（ア） α，β，γ がすべて異なる順序数のときは，両辺の値はともに，$A\max\{x, y, z\}$ に等しい．

（イ） $\alpha=\beta<\gamma$，$\alpha=\gamma<\beta$，$\beta=\gamma<\alpha$ のときは，両辺の値はともに，それぞれ，$x+y$，$x+z$，$y+z$ に等しい．

（ウ） $\gamma<\alpha=\beta$，$\beta<\alpha=\gamma$，$\alpha<\beta=\gamma$ のときは，両辺の値はともに，それぞれ，z，y，x に等しい．

（エ） $\alpha=\beta=\gamma$ のときは，

① x，y，z がすべて同符号ならば，両辺の値はともに，x に等しい．

② その他の場合は，両辺の値はともに，Π_{α} に等しい■

$\boxed{37}$ 定理2-25

y_1，y_2，v_1，v_2 を右有理数とすれば，

$$y_1<y_2,\ v_1<v_2 \text{ ならば } y_1+v_1<y_2+v_2.$$

証明　y_1，y_2，v_1，v_2 を，それぞれ，正の無限小有理数，零の有理数，負の無限小有理数の場合に分けて証明する．

定理2-23，仮定「$y_1<y_2$，$v_1<v_2$」より，次の７つの場合を調べれば十分であろう．

（i） y_1，y_2，v_1，v_2 が全て正．
（ii） y_1 が負で，y_2，v_1，v_2 が正．
（iii） y_1，y_2 が負で，v_1，v_2 が正．
（iv） y_1，v_1 が負で，y_2，v_2 が正．
（v） y_1，v_1，v_2 が負で，y_2 が正．
（vi） y_1，y_2，v_1，v_2 が全て負．
（vii） y_1，y_2 の片方が零．

（i） y_1，y_2，v_1，v_2 がすべて正の場合：

$$y_1=(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT},\quad y_2=(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT},$$
$$v_1=(1/\infty_{\beta 1})_{RAT},\quad v_2=(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$$

とすれば，

$$y_1+v_1=(1/\infty_{\min\{\alpha 1,\ \beta 1\}})_{RAT},\quad y_2+v_2=(1/\infty_{\min\{\alpha 2,\ \beta 2\}})_{RAT}$$

である．また，

$$y_1<y_2 \text{ より } \alpha_1>\alpha_2,\qquad v_1<v_2 \text{ より } \beta_1>\beta_2$$

でなくてはならないので，

$$\min\{\alpha_1,\ \beta_1\} > \min\{\alpha_2,\ \beta_2\}.$$

したがって，

$$y_1+v_1=(1/\infty_{\min\{\alpha_1,\ \beta_1\}})_{RAT}<(1/\infty_{\min\{\alpha_2,\ \beta_2\}})_{RAT}=y_2+v_2.$$

（ⅱ）y_1が負で，y_2，v_1，v_2が正の場合：

$$y_1=-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT},\qquad y_2=(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT},$$
$$v_1=(1/\infty_{\beta 1})_{RAT},\qquad v_2=(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$$

とすれば，

$$y_1+v_1=\begin{cases}-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT} & (\alpha_1<\beta_1),\\ \Pi_{\alpha 1} & (\alpha_1=\beta_1),\\ (1/\infty_{\beta 1})_{RAT} & (\alpha_1>\beta_1).\end{cases}$$

$$y_2+v_2=(1/\infty_{\min\{\alpha_2,\ \beta_2\}})_{RAT}=\begin{cases}(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT} & (\alpha_2<\beta_2),\\ (1/\infty_{\alpha 2})_{RAT} & (\alpha_2=\beta_2),\\ (1/\infty_{\beta 2})_{RAT} & (\alpha_2>\beta_2).\end{cases}$$

また，

$$v_1<v_2 \text{ より } \beta_1>\beta_2$$

でなくてはならない．したがって，

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1<\beta_1$，$\alpha_2<\beta_2$ならば，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}<(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1<\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2$ならば，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}<(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1<\beta_1$，$\alpha_2>\beta_2$ならば，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}<(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2<\beta_2$ならば，$\alpha_2<\alpha_1$であるので，

$$y_1+v_1=\Pi_{\alpha 1}<(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2$ならば，$\alpha_2<\alpha_1$であるので，

$$y_1+v_1=\Pi_{\alpha 1}<(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2>\beta_2$ならば，$\beta_2<\alpha_1$であるので，

$$y_1+v_1=\Pi_{\alpha 1}<(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1>\beta_1$，$\alpha_2<\beta_2$ならば，$\alpha_2<\beta_1$であるので，

$$y_1+v_1=(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}<(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1>\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2$ならば，$\alpha_2<\beta_1$であるので，

$$y_1+v_1=(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}<(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1>\beta_1$，$\alpha_2>\beta_2$ならば，

$$y_1+v_1=(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}<(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

（ⅲ）y_1，y_2が負で，v_1，v_2が正の場合：

$$y_1=-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT},\qquad y_2=-(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT},$$
$$v_1=(1/\infty_{\beta 1})_{RAT},\qquad v_2=(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$$

とすれば，

$$y_1+v_1=\begin{cases}-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT} & (\alpha_1<\beta_1),\\ \Pi_{\alpha 1} & (\alpha_1=\beta_1),\\ (1/\infty_{\beta 1})_{RAT} & (\alpha_1>\beta_1).\end{cases}$$

$$y_2+v_2=\begin{cases}-(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT} & (\alpha_2<\beta_2),\\ \Pi_{\alpha 2} & (\alpha_2=\beta_2),\\ (1/\infty_{\beta 2})_{RAT} & (\alpha_2>\beta_2).\end{cases}$$

また，

$$y_1<y_2 \text{ より } \alpha_1<\alpha_2, \qquad v_1<v_2 \text{ より } \beta_1>\beta_2$$

でなくてはならない．したがって，

$\alpha_1<\alpha_2$，$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1<\beta_1$，$\alpha_2<\beta_2$ならば，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}<-(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\alpha_1<\alpha_2$，$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1<\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2$ならば，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}<\Pi_{\alpha 2}=y_2+v_2.$$

$\alpha_1<\alpha_2$，$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1<\beta_1$，$\alpha_2>\beta_2$ならば，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}<(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\alpha_1<\alpha_2$，$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2<\beta_2$となる場合はあり得ない．

$\alpha_1<\alpha_2$，$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2$となる場合はあり得ない．

$\alpha_1<\alpha_2$，$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1=\beta_1$，$\alpha_2>\beta_2$ならば，$\beta_2<\alpha_1$であるので，

$$y_1+v_1=\Pi_{\alpha 1}<(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\alpha_1<\alpha_2$，$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1>\beta_1$，$\alpha_2<\beta_2$となる場合はあり得ない．

$\alpha_1<\alpha_2$，$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1>\beta_1$，$\alpha_2=\beta_2$となる場合はあり得ない．

$\alpha_1<\alpha_2$，$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1>\beta_1$，$\alpha_2>\beta_2$ならば，

$$y_1+v_1=(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}<(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

（ⅳ）y_1，v_1が負で，y_2，v_2が正の場合：

$$y_1=-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}, \qquad y_2=(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT},$$
$$v_1=-(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}, \qquad v_2=(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$$

とすれば，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\min\{\alpha 1,\ \beta 1\}})_{RAT}, \qquad y_2+v_2=(1/\infty_{\min\{\alpha 2,\ \beta 2\}})_{RAT}$$

であり，明らかに，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\min\{\alpha 1,\ \beta 1\}})_{RAT}<(1/\infty_{\min\{\alpha 2,\ \beta 2\}})_{RAT}=y_2+v_2.$$

（ⅴ）y_1，v_1，v_2が負で，y_2が正の場合は（ⅱ）と同様である．

（ⅵ）y_1，y_2，v_1，v_2が全て負の場合は（ⅰ）と同様である．

（ⅶ）y_1，y_2の片方が零の場合：

① y_1を零とすれば，y_2は正であるので，

（①の１）v_1，v_2がともに正ならば，

$$y_2=(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}, \qquad v_1=(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}, \qquad v_2=(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$$

とすることができる．ここで，$v_1<v_2$より$\beta_1>\beta_2$であるので，

$$\beta_1>\min\{\alpha_2,\ \beta_2\}.$$

したがって，

$$y_1+v_1=(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}<(1/\infty_{\min\{\alpha 2,\ \beta 2\}})_{RAT}=y_2+v_2.$$

（①の２）v_1が負で，v_2が正ならば，

$$y_2=(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}, \qquad v_1=-(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}, \qquad v_2=(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$$

とすることができる．したがって，

$y_1+v_1=-(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}<(1/\infty_{\min\{\alpha 2,\ \beta 2\}})_{RAT}=y_2+v_2$.

（①の３） v_1が零で，v_2が正ならば，

$$y_2=(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT},\qquad v_2=(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$$

とすることができる．したがって，

$y_1+v_1=(0/1)_{RAT}<(1/\infty_{\min\{\alpha 2,\ \beta 2\}})_{RAT}=y_2+v_2$.

（①の４） v_1が負で，v_2が零ならば，

$$y_2=(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT},\qquad v_1=-(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}$$

とすることができる．したがって，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}<(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

（①の５） v_1，v_2がともに負ならば，

$y_2=(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}$，$v_1=-(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}$，$v_2=-(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$

とすることができる．ここで，$v_1<v_2$より$\beta_1<\beta_2$である．

また，

$$y_2+v_2=\begin{cases}(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT} & (\alpha_2<\beta_2),\\ \Pi_{\alpha 2} & (\alpha_2=\beta_2),\\ -(1/\infty_{\beta 2})_{RAT} & (\alpha_2>\beta_2).\end{cases}$$

したがって，

$\beta_1<\beta_2$，$\alpha_2<\beta_2$ならば，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}<(1/\infty_{\alpha 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\beta_1<\beta_2$，$\alpha_2=\beta_2$ならば，$\beta_1<\alpha_2$であるので，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}<\Pi_{\alpha 2}=y_2+v_2.$$

$\beta_1<\beta_2$，$\alpha_2>\beta_2$ならば，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}<-(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

② y_2を零とすれば，y_1は負であるので，

（②の１） v_1，v_2がともに正ならば，

$y_1=-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}$，　$v_1=(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}$，　$v_2=(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$

とすることができる．ここで，$v_1<v_2$より$\beta_1>\beta_2$である．

また，

$$y_1+v_1=\begin{cases}-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT} & (\alpha_1<\beta_1),\\ \Pi_{\alpha 1} & (\alpha_1=\beta_1),\\ (1/\infty_{\beta 1})_{RAT} & (\alpha_1>\beta_1).\end{cases}$$

したがって，

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1<\beta_1$ならば，

$$y_1+v_1=-(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}<(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1=\beta_1$ならば，$\alpha_1>\beta_2$であるので，

$$y_1+v_1=\Pi_{\alpha 1}<(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

$\beta_1>\beta_2$，$\alpha_1>\beta_1$ならば，

$$y_1+v_1=(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}<(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}=y_2+v_2.$$

（②の２）v_1が負で，v_2が正ならば，

$$y_1 = -(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}, \quad v_1 = -(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}, \quad v_2 = (1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$$

とすることができる．したがって，

$$y_1 + v_1 = -(1/\infty_{\min\{\alpha 1, \beta 1\}})_{RAT} < (1/\infty_{\beta 2})_{RAT} = y_2 + v_2.$$

（②の３）v_1が零で，v_2が正ならば，

$$y_1 = -(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}, \quad v_2 = (1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$$

とすることができる．したがって，

$$y_1 + v_1 = -(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT} < (1/\infty_{\beta 2})_{RAT} = y_2 + v_2.$$

（②の４）v_1が負で，v_2が零ならば，

$$y_1 = -(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}, \quad v_1 = -(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}$$

とすることができる．したがって，

$$y_1 + v_1 = -(1/\infty_{\min\{\alpha 1, \beta 1\}})_{RAT} < (0/1)_{RAT} = y_2 + v_2.$$

（②の５）v_1，v_2がともに負ならば，

$$y_1 = -(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT}, \quad v_1 = -(1/\infty_{\beta 1})_{RAT}, \quad v_2 = -(1/\infty_{\beta 2})_{RAT}$$

とすることができる．ここで，$v_1 < v_2$より$\beta_1 < \beta_2$である．

また，

$$y_1 + v_1 = \begin{cases} -(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT} & (\alpha_1 < \beta_1), \\ -(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT} & (\alpha_1 = \beta_1), \\ -(1/\infty_{\beta 1})_{RAT} & (\alpha_1 > \beta_1). \end{cases}$$

したがって，

$\beta_1 < \beta_2$，$\alpha_1 < \beta_1$ならば，$\alpha_1 < \beta_2$あるので，

$$y_1 + v_1 = -(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT} < -(1/\infty_{\beta 2})_{RAT} = y_2 + v_2.$$

$\beta_1 < \beta_2$，$\alpha_1 = \beta_1$ならば，$\alpha_1 < \beta_2$であるので，

$$y_1 + v_1 = -(1/\infty_{\alpha 1})_{RAT} < -(1/\infty_{\beta 2})_{RAT} = y_2 + v_2.$$

$\beta_1 < \beta_2$，$\alpha_1 > \beta_1$ならば，

$$y_1 + v_1 = -(1/\infty_{\beta 1})_{RAT} < -(1/\infty_{\beta 2})_{RAT} = y_2 + v_2 \blacksquare$$

第３章　拡大有理数

有理数$(b/a)_{RAT}$を表す記号を，今後，必要に応じて簡略化する．その方法は，有理数$(b/a)_{RAT}$を，b/aで表し，特に，$a=1$のときは，単にbで表す．

これは，従来のように，分数は有理数を表し，有理整数と整数を同一視することを意味する．

例：$(0/1)_{RAT}$を，0で表す．

例：$(\infty_{\alpha}/1)_{RAT}$を，$\infty_{\alpha}$で表す．

例：$-(1/\infty_{\alpha})_{RAT}$を，$-1/\infty_{\alpha}$で表す．

$\boxed{1}$ 有理数の拡張

初めに，若干の用語と記号を定める．

（ｉ）xを左有理数，yを右有理数として，

（ア）xが有限有理数，

（イ）xが無限大有理数で，$y=0$

のいずれかを満たす順序対(x, y)を考え，この順序対を拡大有理数という．

（ii）$(x, 0)$，$(0, y)$を拡大有理数とすれば，

$$(x, 0)=x,\ (0, y)=y$$

とする．すなわち，$(x, 0)$，$(0, y)$は，それぞれ，x，yと同一視する．

（iii）拡大有理数(x, y)において，

（ア）xが無限大有理数ならば，(x, y)を無限大拡大有理数という．

（イ）xが有限有理数ならば，(x, y)を有界拡大有理数という．

（ウ）「xが0でない有限有理数」または「$x=y=0$」ならば，(x, y)を有限拡大有理数という．

（エ）「$x=0$，$y\neq 0$」ならば，(x, y)を無限小拡大有理数という．

（iv）拡大有理数$(-x, -y)$を，$-(x, y)$で表す．

$\boxed{2}$ 定義3-1（拡大有理数の相等関係・大小関係）

拡大有理数(x_1, y_1)，(x_2, y_2)の相等関係・大小関係を，次のように定める．

（ｉ）相等関係

「$x_1=x_2$，$y_1=y_2$」のとき，(x_1, y_1)と(x_2, y_2)は等しいといい，

$$(x_1, y_1)=(x_2, y_2)\ \text{または}\ (x_2, y_2)=(x_1, y_1)$$

で表す．

（ii）大小関係

「$x_1>x_2$」または「$x_1=x_2$，$y_1>y_2$」のとき，(x_1, y_1)は(x_2, y_2)より大であるといい，

$$(x_1, y_1)>(x_2, y_2)\ \text{または}\ (x_2, y_2)<(x_1, y_1)$$

で表す．

$\boxed{3}$ 定理3-1

（ⅰ）任意の拡大有理数μ，νの間には，次のうちの１つだけが成り立つ．

$$\mu = \nu, \qquad \mu < \nu, \qquad \mu > \nu.$$

（ⅱ）μ，ν，ξを拡大有理数とすれば，次の関係が成り立つ．

$$\mu < \nu,\ \nu < \xi \text{ ならば } \mu < \xi.$$

証明　$\mu = (x_\mu,\ y_\mu)$，$\nu = (x_\nu,\ y_\nu)$，$\xi = (x_\xi,\ y_\xi)$とおく．

（ⅰ）定理2-6より，

$x_\mu = x_\nu$，$x_\mu < x_\nu$，$x_\mu > x_\nu$のうちの１つだけが成り立つ．

$y_\mu = y_\nu$，$y_\mu < y_\nu$，$y_\mu > y_\nu$のうちの１つだけが成り立つ．

したがって，定理が成り立つことは，容易に示すことができる■

（ⅱ）定理2-7より，

「$x_\mu < x_\nu$，$x_\nu < x_\xi$ ならば $x_\mu < x_\xi$」が成り立つ．

「$y_\mu < y_\nu$，$y_\nu < y_\xi$ ならば $y_\mu < y_\xi$」が成り立つ．

したがって，定理が成り立つことは，容易に示すことができる■

$\boxed{4}$ 定義3-2

拡大有理数μの符号は，$\mu > 0$のとき正，$\mu < 0$のとき負とする．

$\boxed{5}$ 定義3-3（拡大有理数の原始加法）

次の２種類の加法を拡大有理数の原始加法といい，演算記号は$\oplus$を用いる．ただし，拡大有理数μと$-\nu$の原始加法$\mu \oplus (-\nu)$は，$\mu \ominus \nu$と表すこともある．

（ⅰ）左有理数と左有理数の加法．（定義2-7を用いる）

（ⅱ）$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$を有界拡大有理数とすれば，

$$(x_1,\ y_1) \oplus (x_2,\ y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$$

とする．（定義2-7，定義2-9を用いる）

例：$(1/2,\ 1/\infty_0) \oplus (1/3,\ 1/\infty_1) = (5/6,\ 1/\infty_0)$．

例：$(1/2,\ 1/\infty_0) \oplus (1/3,\ -1/\infty_0) = (5/6,\ \Pi_0)$

$$= \{(5/6,\ y) : y \in \Pi_0\}.$$

例：$\infty_\alpha \ominus \infty_\alpha = \underline{\boldsymbol{\Theta}}_\alpha$．

例：$\infty_\alpha \oplus (1/\infty_\beta)$は定義されていない．

補足：定義3-3は，xとyを有限有理数とすれば，xとyの原始加法を（ⅰ）で定義して，有界拡大有理数$(x,\ 0)$と$(y,\ 0)$の原始加法を（ⅱ）で定義している．

ここで，$(x,\ 0)$，$(y,\ 0)$は，それぞれ，x，yと同一視する約束であるので，同じ数を，（ⅰ）と（ⅱ）の両方で定義していることになる．

しかし，「$x \oplus y = x + y$」と「$(x,\ 0) \oplus (y,\ 0) = (x + y,\ 0)$」を同一視しても矛盾は生じない．

$\boxed{6}$ 定義3-4（拡大有理数の加法）

μ, νを拡大有理数とするとき,

$$\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\quad \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\quad \sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$$

となる拡大有理数σ_1, σ_2, τ_1, τ_2が存在するならば,

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \oplus \tau_1) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \oplus \tau_1),\ \chi\text{は拡大有理数}\}$$

を, μとνの和といい, 次のように表す：

$$\mu + \nu = \{\chi : \min(\sigma_1 \oplus \tau_1) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \oplus \tau_1),\ \chi\text{は拡大有理数}\}.$$

例：$\mu = \infty_\alpha$, $\nu = 1/\infty_\beta$において,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \infty_\alpha,\qquad \tau_1 = 0,\qquad \tau_2 = 1$$

とすれば,

$$\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\qquad \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\qquad \sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2 = \infty_\alpha$$

であり,

$$\min(\sigma_1 \oplus \tau_1) = \max(\sigma_1 \oplus \tau_1) = \infty_\alpha$$

であるので,

$$\infty_\alpha + (1/\infty_\beta) = \infty_\alpha.$$

例：$\mu = \infty_\alpha$, $\nu = -\infty_\alpha$において,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \infty_\alpha,\qquad \tau_1 = \tau_2 = -\infty_\alpha$$

とすれば,

$$\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\qquad \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\qquad \sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2 = \underline{\Theta}_\alpha$$

であり,

$$\min(\sigma_1 \oplus \tau_1) = -\infty_\alpha,\qquad \max(\sigma_1 \oplus \tau_1) = \infty_\alpha$$

であるので,

$$\infty_\alpha - \infty_\alpha = \{\chi : -\infty_\alpha \leqq \chi \leqq \infty_\alpha,\ \chi\text{は拡大有理数}\}$$

である.

以後, 領域$\{\chi : -\infty_\alpha \leqq \chi \leqq \infty_\alpha,\ \chi\text{は拡大有理数}\}$を$\underline{\underline{\Theta}}_\alpha$で表し,

$$\infty_\alpha - \infty_\alpha = \underline{\underline{\Theta}}_\alpha$$

と記す.

$\boxed{7}$ 定理3-2（拡大有理数の加法の一意性を証明するための予備定理１）

「$\sigma_1 < \sigma_2$, $\tau_1 < \tau_2$ ならば $\sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$」となることはない.

証明　$\sigma_1 \oplus \tau_1$, $\sigma_2 \oplus \tau_2$が同時に定義されているのは, 次のいずれかの場合である.

σ_1, σ_2, τ_1, τ_2がすべて左有理数.　（＊１）

σ_1, τ_1が左有理数で, σ_2, τ_2が有界拡大有理数.　（＊２）

σ_1, τ_1が有界拡大有理数で, σ_2, τ_2が左有理数.　（＊３）

σ_1, σ_2, τ_1, τ_2がすべて有界拡大有理数.　（＊４）

（＊１）の場合は,

σ_1, σ_2, τ_1, τ_2を, それぞれ, 無限大有理数と有限有理数の場合に分けて考えれば, 容易に$\sigma_1 \oplus \tau_1 < \sigma_2 \oplus \tau_2$を得る.

(＊２)の場合は,
σ_1, τ_1が左有理数であるので, $\sigma_1 \oplus \tau_1$は「左有理数 または $\underline{\Theta}_\alpha$」である. ここで, $\sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$と仮定すれば, σ_2, τ_2は有界拡大有理数より, σ_2, τ_2は有限有理数でなくてはならないので, $\sigma_2 \oplus \tau_2$は有限有理数である.

したがって, $\sigma_1 \oplus \tau_1$も有限有理数であるので, σ_1, τ_1は有限有理数であり, σ_1, σ_2, τ_1, τ_2はすべて有限有理数となるので, $\sigma_1 \oplus \tau_1 < \sigma_2 \oplus \tau_2$を得る. これは, 仮定に反するので, $\sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$は成り立たない.

(＊３)の場合は,
σ_2, τ_2が左有理数であるので, $\sigma_2 \oplus \tau_2$は「左有理数 または $\underline{\Theta}_\alpha$」である. ここで, $\sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$と仮定すれば, σ_1, τ_1は有界拡大有理数より, σ_1, τ_1は有限有理数でなくてはならないので, $\sigma_1 \oplus \tau_1$は有限有理数である.

したがって, $\sigma_2 \oplus \tau_2$も有限有理数であるので, σ_2, τ_2は有限有理数であり, σ_1, σ_2, τ_1, τ_2はすべて有限有理数となるので, $\sigma_1 \oplus \tau_1 < \sigma_2 \oplus \tau_2$を得る. これは, 仮定に反するので, $\sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$は成り立たない.

(＊４)の場合は,

$$\sigma_1 = (x_1,\ y_1),\quad \sigma_2 = (x_2,\ y_2),\quad \tau_1 = (u_1,\ v_1),\quad \tau_2 = (u_2,\ v_2)$$

とすると, x_1, x_2, u_1, u_2はすべて有限有理数である. ここで, $x_1 < x_2$, $u_1 < u_2$の少なくとも片方が成り立てば, $x_1 + u_1 < x_2 + u_2$であるので, y_1, y_2, v_1, v_2の値によらず$\sigma_1 \oplus \tau_1 < \sigma_2 \oplus \tau_2$を得る.

また, $x_1 = x_2$, $u_1 = u_2$とすれば, $y_1 < y_2$, $v_1 < v_2$であるので, 定理2-25より, $y_1 + v_1 < y_2 + v_2$である. したがって, $\sigma_1 \oplus \tau_1 < \sigma_2 \oplus \tau_2$を得る.

以上により, (＊１)～(＊４)のいずれの場合も$\sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$とはならない■

$\boxed{8}$ 定理3-3（拡大有理数の加法の一意性を証明するための予備定理２）

$\sigma_1 = \sigma_2$, $\tau_1 < \tau_2$, $\sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$ならば, 次のいずれかが成り立つ.

(ⅰ) $\sigma_1 = \sigma_2 = \infty_\alpha$ かつ τ_1, $\tau_2 \in (\underline{\Theta}_\alpha]$.
(ⅱ) $\sigma_1 = \sigma_2 = -\infty_\alpha$ かつ τ_1, $\tau_2 \in [\underline{\Theta}_\alpha)$.
(ⅲ) $\sigma_1 = \sigma_2 = (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$ かつ τ_1, $\tau_2 \in (x_\tau,\ (\Pi_\alpha])$.
(ⅳ) $\sigma_1 = \sigma_2 = (x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$ かつ τ_1, $\tau_2 \in (x_\tau,\ [\Pi_\alpha))$.

ただし,

x_σ, x_τは有限有理数.
$(\underline{\Theta}_\alpha] = \underline{\Theta}_\alpha - \{-\infty_\alpha\}$, $\quad [\underline{\Theta}_\alpha) = \underline{\Theta}_\alpha - \{\infty_\alpha\}$.
$(\Pi_\alpha] = \Pi_\alpha - \{-1/\infty_\alpha\}$, $\quad [\Pi_\alpha) = \Pi_\alpha - \{1/\infty_\alpha\}$

とする. そして,

$$(\underline{\Theta}_\alpha],\quad [\underline{\Theta}_\alpha),\quad (x_\tau,\ (\Pi_\alpha]),\quad (x_\tau,\ [\Pi_\alpha))$$

を, それぞれ,

$$\infty_\alpha,\quad -\infty_\alpha,\quad (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha),\quad (x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$$

の原始加法に関する吸収範囲という.

証明（ⅰ）$\sigma_1=\sigma_2=\infty_\alpha$の場合：

（ア）τ_1，$\tau_2\in(\underline{\Theta}_\alpha]$ならば，$\sigma_1\oplus\tau_1=\infty_\alpha=\sigma_2\oplus\tau_2$.

（イ）$\tau_1\in(\underline{\Theta}_\alpha]$，$\tau_2\notin(\underline{\Theta}_\alpha]$ならば，$\tau_1<\tau_2$より，$\infty_\alpha<\tau_2$であるので，

$$\sigma_1\oplus\tau_1=\infty_\alpha<\tau_2=\sigma_2\oplus\tau_2.$$

（ウ）$\tau_1\notin(\underline{\Theta}_\alpha]$，$\tau_2\in(\underline{\Theta}_\alpha]$ならば，$\tau_1<\tau_2$より，$\tau_1\leqq-\infty_\alpha$であるので，

$$\sigma_1\oplus\tau_1=「\underline{\Theta}_\alpha\text{または}\tau_1」\neq\infty_\alpha=\sigma_2\oplus\tau_2.$$

（エ）τ_1，$\tau_2\notin(\underline{\Theta}_\alpha]$ならば，

$$\tau_1<\tau_2\leqq-\infty_\alpha,$$
$$\infty_\alpha<\tau_1<\tau_2,$$
$$\tau_1\leqq-\infty_\alpha \text{ かつ } \infty_\alpha<\tau_2$$

の３通りのいずれかであるが，いずれにおいても$\sigma_1\oplus\tau_1\neq\sigma_2\oplus\tau_2$である.

（ⅱ）$\sigma_1=\sigma_2=-\infty_\alpha$の場合：

（ア）τ_1，$\tau_2\in[\underline{\Theta}_\alpha)$ならば，$\sigma_1\oplus\tau_1=-\infty_\alpha=\sigma_2\oplus\tau_2$.

（イ）$\tau_1\in[\underline{\Theta}_\alpha)$，$\tau_2\notin[\underline{\Theta}_\alpha)$ならば，$\tau_1<\tau_2$より，$\infty_\alpha\leqq\tau_2$であるので，

$$\sigma_1\oplus\tau_1=-\infty_\alpha\neq「\underline{\Theta}_\alpha\text{または}\tau_2」=\sigma_2\oplus\tau_2.$$

（ウ）$\tau_1\notin[\underline{\Theta}_\alpha)$，$\tau_2\in[\underline{\Theta}_\alpha)$ならば，$\tau_1<\tau_2$より，$\tau_1<-\infty_\alpha$であるので，

$$\sigma_1\oplus\tau_1=\tau_1<-\infty_\alpha=\sigma_2\oplus\tau_2.$$

（エ）τ_1，$\tau_2\notin[\underline{\Theta}_\alpha)$ならば，

$$\tau_1<\tau_2<-\infty_\alpha,$$
$$\infty_\alpha\leqq\tau_1<\tau_2,$$
$$\tau_1<-\infty_\alpha \text{ かつ } \infty_\alpha\leqq\tau_2$$

の３通りのいずれかであるが，いずれにおいても$\sigma_1\oplus\tau_1\neq\sigma_2\oplus\tau_2$である.

（ⅲ）$\sigma_1=\sigma_2=(x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$の場合：

$\sigma_1\oplus\tau_1$，$\sigma_2\oplus\tau_2$が定義されているのは，τ_1，τ_2が有界拡大有理数のときだけであるので，

$$\tau_1=(x_{\tau 1},\ y_{\tau 1}),\qquad \tau_2=(x_{\tau 2},\ y_{\tau 2})$$

とおけば，$x_{\tau 1}$，$x_{\tau 2}$は有限有理数である.

また，$\tau_1<\tau_2$であるので，

$$x_{\tau 1}<x_{\tau 2} \text{ または「} x_{\tau 1}=x_{\tau 2},\ y_{\tau 1}<y_{\tau 2}\text{」}$$

であるが，

$x_{\tau 1}<x_{\tau 2}$ならば，$x_\sigma+x_{\tau 1}<x_\sigma+x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1\oplus\tau_1<\sigma_2\oplus\tau_2$である.

「$x_{\tau 1}=x_{\tau 2}$，$y_{\tau 1}<y_{\tau 2}$」ならば，

$$\sigma_1\oplus\tau_1=(x_\sigma+x_{\tau 1},\ (1/\infty_\alpha)+y_{\tau 1}),$$
$$\sigma_2\oplus\tau_2=(x_\sigma+x_{\tau 2},\ (1/\infty_\alpha)+y_{\tau 2})$$

において，$x_\sigma+x_{\tau 1}=x_\sigma+x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1\oplus\tau_1=\sigma_2\oplus\tau_2$となるのは，

$$(1/\infty_\alpha)+y_{\tau 1}=(1/\infty_\alpha)+y_{\tau 2}$$

のときだけであるが，$y_{\tau 1}<y_{\tau 2}$より，$y_{\tau 1}$，$y_{\tau 2}\in(\Pi_\alpha]$でなくてはならない.

（ⅳ） $\sigma_1=\sigma_2=(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$の場合：

$\sigma_1\oplus\tau_1$，$\sigma_2\oplus\tau_2$が定義されているのは，τ_1，τ_2が有界拡大有理数のときだけであるので，

$$\tau_1=(x_{\tau 1},\ y_{\tau 1}),\qquad \tau_2=(x_{\tau 2},\ y_{\tau 2})$$

とおけば，$x_{\tau 1}$，$x_{\tau 2}$は有限有理数である．

また，$\tau_1<\tau_2$であるので，

$$x_{\tau 1}<x_{\tau 2}\ \text{または「}x_{\tau 1}=x_{\tau 2},\ y_{\tau 1}<y_{\tau 2}\text{」}$$

であるが，

$x_{\tau 1}<x_{\tau 2}$ならば，$x_\sigma+x_{\tau 1}<x_\sigma+x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1\oplus\tau_1<\sigma_2\oplus\tau_2$である．

「$x_{\tau 1}=x_{\tau 2}$，$y_{\tau 1}<y_{\tau 2}$」ならば，

$$\sigma_1\oplus\tau_1=(x_\sigma+x_{\tau 1},\ (-1/\infty_\alpha)+y_{\tau 1}),$$
$$\sigma_2\oplus\tau_2=(x_\sigma+x_{\tau 2},\ (-1/\infty_\alpha)+y_{\tau 2})$$

において，$x_\sigma+x_{\tau 1}=x_\sigma+x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1\oplus\tau_1=\sigma_2\oplus\tau_2$となるのは，

$$(-1/\infty_\alpha)+y_{\tau 1}=(-1/\infty_\alpha)+y_{\tau 2}$$

のときだけであるが，$y_{\tau 1}<y_{\tau 2}$より，$y_{\tau 1}$，$y_{\tau 2}\in[\Pi_\alpha)$でなくてはならない．

（ⅴ） $\sigma_1=\sigma_2=x_\sigma$の場合：

$\sigma_1\oplus\tau_1$，$\sigma_2\oplus\tau_2$が定義されているのは，次のいずれかである．

（ア） τ_1，τ_2が有界拡大有理数．

（イ） τ_1が有界拡大有理数で，τ_2が無限大有理数．

（ウ） τ_1が無限大有理数で，τ_2が有界拡大有理数．

（エ） τ_1，τ_2が無限大有理数．

（ア）ならば，

$$\tau_1=(x_{\tau 1},\ y_{\tau 1}),\qquad \tau_2=(x_{\tau 2},\ y_{\tau 2})$$

とおけば，$x_{\tau 1}$，$x_{\tau 2}$は有限有理数である．

また，条件$\tau_1<\tau_2$より，

$$x_{\tau 1}<x_{\tau 2}\ \text{または「}x_{\tau 1}=x_{\tau 2},\ y_{\tau 1}<y_{\tau 2}\text{」}$$

であるが，

$x_{\tau 1}<x_{\tau 2}$ならば，$x_\sigma+x_{\tau 1}<x_\sigma+x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1\oplus\tau_1<\sigma_2\oplus\tau_2$である．

「$x_{\tau 1}=x_{\tau 2}$，$y_{\tau 1}<y_{\tau 2}$」ならば，

$$\sigma_1\oplus\tau_1=(x_\sigma+x_{\tau 1},\ y_{\tau 1}),$$
$$\sigma_2\oplus\tau_2=(x_\sigma+x_{\tau 2},\ y_{\tau 2})$$

において，$x_\sigma+x_{\tau 1}=x_\sigma+x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1\oplus\tau_1<\sigma_2\oplus\tau_2$となる．

（イ）ならば，

条件$\tau_1<\tau_2$より，τ_2は正の無限大有理数となるので，$\tau_2=\infty_\alpha$とする．このとき，$\sigma_1\oplus\tau_1<\infty_0\leqq\infty_\alpha=\sigma_2\oplus\tau_2$となる．

（ウ）ならば，

条件$\tau_1<\tau_2$より，τ_1は負の無限大有理数となるので，$\tau_1=-\infty_\alpha$とする．このとき，$\sigma_1\oplus\tau_1=-\infty_\alpha\leqq-\infty_0<\sigma_2\oplus\tau_2$となる．

（エ）ならば，

条件$\tau_1<\tau_2$より，$\sigma_1\oplus\tau_1=\tau_1<\tau_2=\sigma_2\oplus\tau_2$となる■

$\boxed{9}$ 定理3-4（拡大有理数の加法の一意性を証明するための予備定理３）

μ，νを拡大有理数として，次の(＊１)～(＊３)が成り立つとする．

$\sigma_{11} \leqq \mu \leqq \sigma_{12}$，$\tau_{11} \leqq \nu \leqq \tau_{12}$で，$\sigma_{11} \oplus \tau_{11} = \sigma_{12} \oplus \tau_{12}$．　(＊１)

$\sigma_{21} \leqq \mu \leqq \sigma_{22}$，$\tau_{21} \leqq \nu \leqq \tau_{22}$で，$\sigma_{21} \oplus \tau_{21} = \sigma_{22} \oplus \tau_{22}$．　(＊２)

$\sigma_{11} = \sigma_{12}$，$\tau_{11} < \tau_{12}$．　(＊３)

このとき，

（ア）$\mu = \nu = \infty_{\alpha}$，

（イ）$\mu = \nu = -\infty_{\alpha}$，

（ウ）$\mu = (x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})$ かつ $\nu = (x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$，

（エ）$\mu = (x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha})$ かつ $\nu = (x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha})$

の４通りの場合（この４通りの場合を(＊４)で表す）以外の場合で，

$\sigma_{21} < \sigma_{22}$，$\tau_{21} = \tau_{22}$　(＊５)

となることはない．ただし，x_{σ}，x_{τ}は有限有理数とする．

証明　背理法を用いる．(＊４)の場合以外に，(＊１)，(＊２)，(＊３)，(＊５)が同時に成り立つと仮定する．このとき，(＊５)と定理3-3より，次のいずれかが成り立たなくてはならない．

（ｉ）$\tau_{21} = \tau_{22} = \infty_{\alpha}$ かつ σ_{21}，$\sigma_{22} \in (\underline{\Theta}_{\alpha}]$．

（ⅱ）$\tau_{21} = \tau_{22} = -\infty_{\alpha}$ かつ σ_{21}，$\sigma_{22} \in [\underline{\Theta}_{\alpha})$．

（ⅲ）$\tau_{21} = \tau_{22} = (x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$ かつ σ_{21}，$\sigma_{22} \in (x_{\sigma},\ (\Pi_{\alpha}])$．

（ⅳ）$\tau_{21} = \tau_{22} = (x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha})$ かつ σ_{21}，$\sigma_{22} \in (x_{\sigma},\ [\Pi_{\alpha}))$．

しかし，いずれの場合も矛盾を生じる．実際，

(ｉ)の場合は，$\tau_{21} = \tau_{22} = \infty_{\alpha}$より，$\nu = \infty_{\alpha}$である．

また，σ_{21}，$\sigma_{22} \in (\underline{\Theta}_{\alpha}]$より，

$$-\infty_{\alpha} < \mu \leqq \infty_{\alpha}$$

であるが，$\mu = \infty_{\alpha}$とすれば(ア)の場合になるので，

$$-\infty_{\alpha} < \mu < \infty_{\alpha}$$

とする．このとき，(＊３)より，

$$-\infty_{\alpha} < \sigma_{11} = \mu = \sigma_{12} < \infty_{\alpha}$$

であるので，定理3-3より，

$$-\infty_{\alpha} < \tau_{11},\quad \tau_{12} < \infty_{\alpha}$$

を得るが，これは，

$$-\infty_{\alpha} < \nu < \infty_{\alpha}$$

を意味するので，$\nu = \infty_{\alpha}$であることに矛盾する．

(ⅱ)の場合は，$\tau_{21} = \tau_{22} = -\infty_{\alpha}$より，$\nu = -\infty_{\alpha}$である．

また，σ_{21}，$\sigma_{22} \in [\underline{\Theta}_{\alpha})$より，

$$-\infty_{\alpha} \leqq \mu < \infty_{\alpha}$$

であるが，$\mu = -\infty_{\alpha}$とすれば(イ)の場合になるので，

$$-\infty_{\alpha} < \mu < \infty_{\alpha}$$

とする．このとき，(＊３)より，

$$-\infty_{\alpha} < \sigma_{11} = \mu = \sigma_{12} < \infty_{\alpha}$$

であるので，定理3-3より，

$$-\infty_{\alpha} < \tau_{11},\ \tau_{12} < \infty_{\alpha}$$

を得るが，これは，

$$-\infty_{\alpha} < \nu < \infty_{\alpha}$$

を意味するので，$\nu = -\infty_{\alpha}$であることに矛盾する．

(iii)の場合は，$\tau_{21} = \tau_{22} = (x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$より，$\nu = (x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$である．

また，σ_{21}，$\sigma_{22} \in (x_{\sigma},\ (\Pi_{\alpha}])$より，

$$(x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha}) < \mu \leqq (x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})$$

であるが，$\mu = (x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})$とすれば(ウ)の場合になるので，

$$(x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha}) < \mu < (x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})$$

とする．このとき，(＊３)より，

$$(x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha}) < \sigma_{11} = \mu = \sigma_{12} < (x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})$$

であるので，定理3-3より，

$$(x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha}) < \tau_{11},\ \tau_{12} < (x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$$

を得るが，これは，

$$(x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha}) < \nu < (x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$$

を意味するので，$\nu = (x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$であることに矛盾する．

(iv)の場合は，$\tau_{21} = \tau_{22} = (x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha})$より，$\nu = (x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha})$である．

また，σ_{21}，$\sigma_{22} \in (x_{\sigma},\ [\Pi_{\alpha}))$より，

$$(x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha}) \leqq \mu < (x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})$$

であるが，$\mu = (x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha})$とすれば(エ)の場合になるので，

$$(x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha}) < \mu < (x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})$$

とする．このとき，(＊３)より，

$$(x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha}) < \sigma_{11} = \mu = \sigma_{12} < (x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})$$

であるので，定理3-3より，

$$(x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha}) < \tau_{11},\ \tau_{12} < (x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$$

を得るが，これは，

$$(x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha}) < \nu < (x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$$

を意味するので，$\nu = (x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha})$であることに矛盾する■

$\boxed{10}$ 定理3-5（拡大有理数の加法の一意性）

μ，νを拡大有理数として，次の(＊１)，(＊２)が成り立つとする．

$\sigma_{11} \leqq \mu \leqq \sigma_{12}$，$\tau_{11} \leqq \nu \leqq \tau_{12}$で，$\sigma_{11} \oplus \tau_{11} = \sigma_{12} \oplus \tau_{12}$．　(＊１)

$\sigma_{21} \leqq \mu \leqq \sigma_{22}$，$\tau_{21} \leqq \nu \leqq \tau_{22}$で，$\sigma_{21} \oplus \tau_{21} = \sigma_{22} \oplus \tau_{22}$．　(＊２)

このとき，$\sigma_{11} \oplus \tau_{11} = \sigma_{21} \oplus \tau_{21}$が成り立つ．

証明　定理3-2より，σ_{11}，σ_{12}，τ_{11}，τ_{12}は，次のいずれかである．

（ｉ）$\sigma_{11} = \sigma_{12}$，$\tau_{11} < \tau_{12}$．

（ii）$\sigma_{11} = \sigma_{12}$，$\tau_{11} = \tau_{12}$．

（iii）$\sigma_{11} < \sigma_{12}$，$\tau_{11} = \tau_{12}$．

σ_{21}，σ_{22}，τ_{21}，τ_{22}についても同様に，次のいずれかである．

$$(\text{iv})\quad \sigma_{21}=\sigma_{22},\ \tau_{21}<\tau_{22}.$$
$$(\text{v})\quad \sigma_{21}=\sigma_{22},\ \tau_{21}=\tau_{22}.$$
$$(\text{vi})\quad \sigma_{21}<\sigma_{22},\ \tau_{21}=\tau_{22}.$$

したがって，考えられる組み合わせは次の９通りである．

(ア)「$\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$\tau_{11}<\tau_{12}$」かつ「$\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$\tau_{21}<\tau_{22}$」．
(イ)「$\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$\tau_{11}<\tau_{12}$」かつ「$\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$\tau_{21}=\tau_{22}$」．
(ウ)「$\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$\tau_{11}<\tau_{12}$」かつ「$\sigma_{21}<\sigma_{22}$，$\tau_{21}=\tau_{22}$」．
(エ)「$\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$\tau_{21}<\tau_{22}$」．
(オ)「$\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$\tau_{21}=\tau_{22}$」．
(カ)「$\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$\sigma_{21}<\sigma_{22}$，$\tau_{21}=\tau_{22}$」．
(キ)「$\sigma_{11}<\sigma_{12}$，$\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$\tau_{21}<\tau_{22}$」．
(ク)「$\sigma_{11}<\sigma_{12}$，$\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$\tau_{21}=\tau_{22}$」．
(ケ)「$\sigma_{11}<\sigma_{12}$，$\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$\sigma_{21}<\sigma_{22}$，$\tau_{21}=\tau_{22}$」．

(ア)の場合は，

定理3-3より，τ_{11}，τ_{21}が，$\sigma_{11}=\mu=\sigma_{21}$の原始加法に関する吸収範囲に属する数であるので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

(イ)の場合は，

定理3-3より，τ_{11}，τ_{12}が，$\sigma_{11}=\mu=\sigma_{21}$の原始加法に関する吸収範囲に属する数であり，

$$\tau_{11}\leqq\nu=\tau_{21}<\tau_{12}\ \text{または}\ \tau_{11}<\nu=\tau_{21}=\tau_{12}$$

であるので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

(ウ)の場合は，

考えられるのは定理3-4の(＊４)の場合だけである．

① $\mu=\nu=\infty_{\alpha}$とすれば，定理3-3より，

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=\infty_{\alpha}\ \text{かつ}\ \tau_{11},\ \tau_{12}\in(\underline{\Theta}_{\alpha}],$$
$$\sigma_{21},\ \sigma_{22}\in(\underline{\Theta}_{\alpha}]\ \text{かつ}\ \tau_{21}=\tau_{22}=\infty_{\alpha}$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

② $\mu=\nu=-\infty_{\alpha}$とすれば，定理3-3より，

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=-\infty_{\alpha}\ \text{かつ}\ \tau_{11},\ \tau_{12}\in[\underline{\Theta}_{\alpha}),$$
$$\sigma_{21},\ \sigma_{22}\in[\underline{\Theta}_{\alpha})\ \text{かつ}\ \tau_{21}=\tau_{22}=-\infty_{\alpha}$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

③ $\mu=(x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})$，$\nu=(x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$とすれば，定理3-3より，

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=(x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})\ \text{かつ}\ \tau_{11},\ \tau_{12}\in(x_{\tau},\ (\Pi_{\alpha}]),$$
$$\sigma_{21},\ \sigma_{22}\in(x_{\sigma},\ (\Pi_{\alpha}])\ \text{かつ}\ \tau_{21}=\tau_{22}=(x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

④　$\mu=(x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha})$，$\nu=(x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha})$とすれば，定理3-3より，

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=(x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha})\ かつ\ \tau_{11},\ \tau_{12}\in(x_{\tau},\ [\Pi_{\alpha})),$$

$$\sigma_{21},\ \sigma_{22}\in(x_{\sigma},\ [\Pi_{\alpha}))\ かつ\ \tau_{21}=\tau_{22}=(x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha})$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

(エ)の場合は，

定理3-3より，τ_{21}，τ_{22}が，$\sigma_{11}=\mu=\sigma_{21}$の原始加法に関する吸収範囲に属する数であり，

$$\tau_{21}\leqq\nu=\tau_{11}<\tau_{22}\ または\ \tau_{21}<\nu=\tau_{11}=\tau_{22}$$

であるので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

(オ)の場合は，

$$\sigma_{11}=\mu=\sigma_{12},\ \tau_{11}=\nu=\tau_{12},\ \sigma_{21}=\mu=\sigma_{22},\ \tau_{21}=\nu=\tau_{22}$$

であるので，$\sigma_{11}=\sigma_{21}$，$\tau_{11}=\tau_{21}$となり，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

(カ)の場合は，

定理3-3より，σ_{21}，σ_{22}が，$\tau_{11}=\nu=\tau_{21}$の原始加法に関する吸収範囲に属する数であり，

$$\sigma_{21}\leqq\mu=\sigma_{11}<\sigma_{22}\ または\ \sigma_{21}<\mu=\sigma_{11}=\sigma_{22}$$

であるので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

(キ)の場合は，

考えられるのは定理3-4の(＊４)の場合だけである．

①　$\mu=\nu=\infty_{\alpha}$とすれば，定理3-3より，

$$\sigma_{11},\ \sigma_{12}\in(\underline{\Theta}_{\alpha}]\ かつ\ \tau_{11}=\tau_{12}=\infty_{\alpha},$$

$$\sigma_{21}=\sigma_{22}=\infty_{\alpha}\ かつ\ \tau_{21},\ \tau_{22}\in(\underline{\Theta}_{\alpha}]$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

②　$\mu=\nu=-\infty_{\alpha}$とすれば，定理3-3より，

$$\sigma_{11},\ \sigma_{12}\in[\underline{\Theta}_{\alpha})\ かつ\ \tau_{11}=\tau_{12}=-\infty_{\alpha},$$

$$\sigma_{21}=\sigma_{22}=-\infty_{\alpha}\ かつ\ \tau_{21},\ \tau_{22}\in[\underline{\Theta}_{\alpha})$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

③　$\mu=(x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})$，$\nu=(x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha})$とすれば，定理3-3より，

$$\sigma_{11},\ \sigma_{12}\in(x_{\sigma},\ (\Pi_{\alpha}])\ かつ\ \tau_{11}=\tau_{12}=(x_{\tau},\ 1/\infty_{\alpha}),$$

$$\sigma_{21}=\sigma_{22}=(x_{\sigma},\ 1/\infty_{\alpha})\ かつ\ \tau_{21},\ \tau_{22}\in(x_{\tau},\ (\Pi_{\alpha}])$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

④　$\mu=(x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha})$，$\nu=(x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha})$とすれば，定理3-3より，

$$\sigma_{11},\ \sigma_{12}\in(x_{\sigma},\ [\Pi_{\alpha}))\ かつ\ \tau_{11}=\tau_{12}=(x_{\tau},\ -1/\infty_{\alpha}),$$

$$\sigma_{21}=\sigma_{22}=(x_{\sigma},\ -1/\infty_{\alpha})\ かつ\ \tau_{21},\ \tau_{22}\in(x_{\tau},\ [\Pi_{\alpha}))$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

(ク)の場合は，

定理3-3より，σ_{11}，σ_{12}が，$\tau_{11}=\nu=\tau_{21}$の原始加法に関する吸収範囲に属する数であり，

$$\sigma_{11}\leqq\mu=\sigma_{21}<\sigma_{12}\ または\ \sigma_{11}<\mu=\sigma_{21}=\sigma_{12}$$

であるので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る．

（ケ）の場合は，

定理3-3より，σ_{11}，σ_{21}が，$\tau_{11}=\nu=\tau_{21}$の原始加法に関する吸収範囲に属する数であるので，$\sigma_{11}\oplus\tau_{11}=\sigma_{21}\oplus\tau_{21}$を得る■

補足：μ，νを拡大有理数として，

$$\sigma_1\leqq\mu\leqq\sigma_2,\quad \tau_1\leqq\nu\leqq\tau_2,\quad \sigma_1\oplus\tau_1=\sigma_2\oplus\tau_2$$

となるならば，

$$\sigma_1\oplus\tau_1=\sigma_1\oplus\tau_2=\sigma_2\oplus\tau_1=\sigma_2\oplus\tau_2 \qquad (*)$$

である．

実際，定理3-2より，$\sigma_1=\sigma_2$，$\tau_1=\tau_2$の少なくとも片方は成り立つ．どちらでも同じことであるので$\sigma_1=\sigma_2$とする．

ここで，$\tau_1=\tau_2$ならば明らかに(＊)が成り立ち，$\tau_1<\tau_2$ならば定理3-3より(＊)が成り立つ．

補足：拡大有理数の加法は，拡大有理数の原始加法の拡張である．

実際，$\mu\leqq\mu\leqq\mu$，$\nu\leqq\nu\leqq\nu$で，$\mu\oplus\nu$が存在する場合を考えると，$\mu\oplus\nu$は，

$$\text{確定数},\quad (x, \Pi_\alpha),\quad \underline{\mathbf{\Theta}}_\alpha$$

のいずれかである（xは有限有理数）が，$\mu\oplus\nu\neq\underline{\mathbf{\Theta}}_\alpha$ならば，

$$\mu+\nu=\{\chi : \min(\mu\oplus\nu)\leqq\chi\leqq\max(\mu\oplus\nu),\ \chi\text{は拡大有理数}\}=\mu\oplus\nu$$

である．そして，$\mu\oplus\nu=\underline{\mathbf{\Theta}}_\alpha$ならば，

$$\mu+\nu=\{\chi : \min(\mu\oplus\nu)\leqq\chi\leqq\max(\mu\oplus\nu),\ \chi\text{は拡大有理数}\}=\underline{\underline{\mathbf{\Theta}}}_\alpha$$

であるが，これは数の拡張にともなう変化であるので，拡大有理数の原始加法は，拡大有理数の加法の特殊な場合と考えることができる．

$\boxed{11}$ 定義3-5（拡大有理数の原始乗法）

次の２種類の乗法を拡大有理数の原始乗法といい，演算記号は⊗を用いる．

（ⅰ）「正の有理数」と「正の有理数」の乗法．（定義2-5を用いる）

（ⅱ）(x_1, y_1)，(x_2, y_2)を正の有限拡大有理数とすれば，

$$(x_1, y_1)\otimes(x_2, y_2)=(x_1x_2, y_1+y_2)$$

とする．（定義2-5，定義2-9を用いる）

例：$\infty_0\otimes(1/\infty_1)=1/\infty_1$．

例：$\infty_\alpha\otimes(1/\infty_\alpha)=\underline{\Sigma}_\alpha$．

例：$(1/2, 1/\infty_0)\otimes(1/3, -1/\infty_1)=(1/6, 1/\infty_0)$．

例：$\infty_\alpha\otimes(1, 1/\infty_\beta)$は定義されていない．

補足：定義3-5は，x，yを正の有限有理数とすれば，xとyの原始乗法を(ⅰ)で定義して，有限拡大有理数$(x, 0)$と$(y, 0)$の原始乗法を(ⅱ)で定義している．

ここで，$(x, 0)$，$(y, 0)$は，それぞれ，x，yと同一視する約束であるので，同じ数を，(ⅰ)と(ⅱ)の両方で定義していることになる．

しかし，「$x \otimes y = xy$」と「$(x, 0) \otimes (y, 0) = (xy, 0)$」を同一視しても矛盾は生じない．

補足：定義3-5の(ⅱ)は，x_1，x_2を正の有限有理数とすれば，

$$(x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 + y_2) \quad \cdots (*)$$

であると定義している．従来の乗法の基本からすれば，

$$(x_1, y_1) \otimes (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2)$$

とするべきであるが，あえて(＊)と定義するのは，

$$x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2 = y_1 + y_2$$

が成り立つからである．実際に確かめると，

(ⅰ)「$y_1 = 1/\infty_\alpha$，$y_2 = 1/\infty_\beta$」の場合は，

$\alpha < \beta$ならば，$x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2 = 1/\infty_\beta + 1/\infty_\alpha + 1/\infty_\beta$
$= 1/\infty_\alpha$
$= y_1 + y_2$.

$\alpha = \beta$ならば，$x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2 = 1/\infty_\beta + 1/\infty_\alpha + 1/\infty_\beta$
$= 1/\infty_\alpha$
$= y_1 + y_2$.

$\alpha > \beta$ならば，$x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2 = 1/\infty_\beta + 1/\infty_\alpha + 1/\infty_\alpha$
$= 1/\infty_\beta$
$= y_1 + y_2$.

(ⅱ)「$y_1 = 1/\infty_\alpha$，$y_2 = -1/\infty_\beta$」の場合は，

$\alpha < \beta$ならば，$x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2 = -1/\infty_\beta + 1/\infty_\alpha - 1/\infty_\beta$
$= 1/\infty_\alpha$
$= y_1 + y_2$.

$\alpha = \beta$ならば，$x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2 = -1/\infty_\beta + 1/\infty_\alpha - 1/\infty_\beta$
$= \Pi_\alpha$
$= y_1 + y_2$.

$\alpha > \beta$ならば，$x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2 = -1/\infty_\beta + 1/\infty_\alpha - 1/\infty_\alpha$
$= -1/\infty_\beta$
$= y_1 + y_2$.

(ⅲ)「$y_1 = 1/\infty_\alpha$，$y_2 = 0$」の場合は，

$$x_1 y_2 + y_1 x_2 + y_1 y_2 = 1/\infty_\alpha = y_1 + y_2.$$

である．他の場合も容易に確かめることができる．

$\boxed{12}$ 定義3-6（拡大有理数の乗法）

μ，νを正の拡大有理数とするとき，

$$0<\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\quad 0<\tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\quad \sigma_1 \otimes \tau_1=\sigma_2 \otimes \tau_2$$

となる正の拡大有理数σ_1，σ_2，τ_1，τ_2が存在するならば，

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \otimes \tau_1) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \otimes \tau_1),\ \chi \text{は拡大有理数}\}$$

を，μとνの積といい，

$$\mu\nu=\{\chi : \min(\sigma_1 \otimes \tau_1) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \otimes \tau_1),\ \chi \text{は拡大有理数}\}$$

とする．また，

$$\mu(-\nu)=(-\mu)\nu=-(\mu\nu),$$

$$(-\mu)(-\nu)=\mu\nu,$$

任意の拡大有理数をξとすれば，$\xi 0=0\xi=0$

とする．

例：$\mu=\infty_\alpha$，$\nu=1/\infty_\alpha$において，

$$\sigma_1=\sigma_2=\infty_\alpha,\quad \tau_1=\tau_2=1/\infty_\alpha$$

とすれば，

$$\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\quad \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\quad \sigma_1 \otimes \tau_1=\sigma_2 \otimes \tau_2=\underline{\Sigma}_\alpha$$

であり，

$$\min(\sigma_1 \otimes \tau_1)=1/\infty_\alpha,\quad \max(\sigma_1 \otimes \tau_1)=\infty_\alpha$$

であるので，

$$\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)=\{\chi : 1/\infty_\alpha \leqq \chi \leqq \infty_\alpha,\ \chi \text{は拡大有理数}\}$$

である．

以後，領域$\{\chi : 1/\infty_\alpha \leqq \chi \leqq \infty_\alpha,\ \chi \text{は拡大有理数}\}$を$\underline{\underline{\Sigma}}_\alpha$で表し，

$$\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)=\underline{\underline{\Sigma}}_\alpha$$

と記す．

例：$\mu=\infty_\alpha$，$\nu=(1,\ 1/\infty_\beta)$において，

$$\sigma_1=\sigma_2=\infty_\alpha,\quad \tau_1=1,\quad \tau_2=2$$

とすれば，

$$\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\quad \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\quad \sigma_1 \otimes \tau_1=\sigma_2 \otimes \tau_2=\infty_\alpha$$

であり，

$$\min(\sigma_1 \otimes \tau_1)=\infty_\alpha,\quad \max(\sigma_1 \otimes \tau_1)=\infty_\alpha$$

であるので，

$$\infty_\alpha(1,\ 1/\infty_\beta)=\infty_\alpha.$$

例：$\mu=\infty_\alpha$，$\nu=(-1,\ -1/\infty_\beta)$とすれば，

$$\mu\nu=\infty_\alpha\{-(1,\ 1/\infty_\beta)\}=-\{\infty_\alpha(1,\ 1/\infty_\beta)\}=-\infty_\alpha.$$

例：$\mu=0$，$\nu=(1,\ 1/\infty_\beta)$とすれば，

$$\mu\nu=0.$$

$\boxed{13}$ 定理3-6（拡大有理数の乗法の一意性を証明するための予備定理１）

「$0<\sigma_1<\sigma_2$，$0<\tau_1<\tau_2$ ならば $\sigma_1\otimes\tau_1=\sigma_2\otimes\tau_2$」となることはない．

証明　$\sigma_1\otimes\tau_1$，$\sigma_2\otimes\tau_2$が同時に定義されているのは，次のいずれかの場合である．

σ_1，σ_2，τ_1，τ_2がすべて正の有理数．　（＊１）

σ_1，τ_1が正の有理数で，σ_2，τ_2が正の有限拡大有理数．　（＊２）

σ_1，τ_1が正の有限拡大有理数で，σ_2，τ_2が正の有理数．　（＊３）

σ_1，σ_2，τ_1，τ_2がすべて正の有限拡大有理数．　（＊４）

（＊１）の場合は，

σ_1，σ_2，τ_1，τ_2を，それぞれ，無限小有理数，有限有理数，無限大有理数の場合に分けて考えれば，容易に$\sigma_1\otimes\tau_1<\sigma_2\otimes\tau_2$を得る．

（＊２）の場合は，

σ_2，τ_2が両方とも有理数ならば，（＊１）と同じである．また，少なくとも片方が有理数でない有限拡大有理数ならば，$\sigma_2\otimes\tau_2$は，

「$(x\quad y)$，xは有限有理数，$y\neq 0$」または「(x, Π_α)，xは有限有理数」

のいずれかの形の数であるが，$\sigma_1\otimes\tau_1$は，「有理数または$\underline{\Sigma}_\alpha$」である．

（＊３）の場合は，

σ_1，τ_1が両方とも有理数ならば，（＊１）と同じである．また，少なくとも片方が有理数でない有限拡大有理数ならば，$\sigma_1\otimes\tau_1$は，

「$(x\quad y)$，xは有限有理数，$y\neq 0$」または「(x, Π_α)，xは有限有理数」

のいずれかの形の数であるが，$\sigma_2\otimes\tau_2$は，「有理数または$\underline{\Sigma}_\alpha$」である．

（＊４）の場合は，

$$\sigma_1=(x_{11}, y_{11}),\qquad \sigma_2=(x_{12}, y_{12}),$$
$$\tau_1=(x_{21}, y_{21}),\qquad \tau_2=(x_{22}, y_{22})$$

とおけば，x_{11}，x_{12}，x_{21}，x_{22}は正の有限有理数であり，$\sigma_1<\sigma_2$，$\tau_1<\tau_2$であるので，次のいずれかである．

（ア）$0<x_{11}<x_{12}$，$0<x_{21}<x_{22}$．

（イ）$0<x_{11}<x_{12}$，$0<x_{21}=x_{22}$，$y_{21}<y_{22}$．

（ウ）$0<x_{11}=x_{12}$，$0<x_{21}<x_{22}$，$y_{11}<y_{12}$．

（エ）$0<x_{11}=x_{12}$，$0<x_{21}=x_{22}$，$y_{11}<y_{12}$，$y_{21}<y_{22}$．

ここで，（ア），（イ），（ウ）の場合は，$x_{11}x_{21}<x_{12}x_{22}$となる．

（エ）の場合は，$x_{11}x_{21}=x_{12}x_{22}$であるが，定理2-25より，

$$y_{11}<y_{12},\ y_{21}<y_{22} \text{ ならば } y_{11}+y_{21}<y_{12}+y_{22}.$$

したがって，（ア）～（エ）のいずれの場合も $\sigma_1\otimes\tau_1<\sigma_2\otimes\tau_2$となる．

以上により，（＊１）～（＊４）のいずれの場合も$\sigma_1\otimes\tau_1=\sigma_2\otimes\tau_2$とはならない■

$\boxed{14}$ 定理3-7（拡大有理数の乗法の一意性を証明するための予備定理２）

$0<\sigma_1=\sigma_2$，$0<\tau_1<\tau_2$，$\sigma_1\otimes\tau_1=\sigma_2\otimes\tau_2$ならば，次のいずれかが成り立つ．

（ｉ）$\sigma_1=\sigma_2=\infty_\alpha$ かつ $\tau_1,\ \tau_2\in(\underline{\Sigma}_\alpha]$.

（ⅱ）$\sigma_1=\sigma_2=1/\infty_\alpha$ かつ $\tau_1,\ \tau_2\in[\underline{\Sigma}_\alpha)$.

（ⅲ）$\sigma_1=\sigma_2=(x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$ かつ $\tau_1,\ \tau_2\in(x_\tau,\ (\Pi_\alpha])$.

（ⅳ）$\sigma_1=\sigma_2=(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$ かつ $\tau_1,\ \tau_2\in(x_\tau,\ [\Pi_\alpha))$.

ただし，　　　x_σ，x_τは正の有限有理数．

$$(\underline{\Sigma}_\alpha]=\underline{\Sigma}_\alpha-\{1/\infty_\alpha\},\qquad [\underline{\Sigma}_\alpha)=\underline{\Sigma}_\alpha-\{\infty_\alpha\}$$

とする．そして，

$$(\underline{\Sigma}_\alpha],\quad [\underline{\Sigma}_\alpha),\quad (x_\tau,\ (\Pi_\alpha]),\quad (x_\tau,\ [\Pi_\alpha))$$

を，それぞれ，

$$\infty_\alpha,\quad 1/\infty_\alpha,\quad (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha),\quad (x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$$

の原始乗法に関する吸収範囲という．

証明（ｉ）$\sigma_1=\sigma_2=\infty_\alpha$の場合：

（ア）$\tau_1,\ \tau_2\in(\underline{\Sigma}_\alpha]$ならば，$\sigma_1\otimes\tau_1=\infty_\alpha=\sigma_2\otimes\tau_2$.

（イ）$\tau_1\in(\underline{\Sigma}_\alpha]$，$\tau_2\notin(\underline{\Sigma}_\alpha]$ならば，$0<\tau_1<\tau_2$より，$\infty_\alpha<\tau_2$であるので，

$$\sigma_1\otimes\tau_1=\infty_\alpha<\tau_2=\sigma_2\otimes\tau_2.$$

（ウ）$\tau_1\notin(\underline{\Sigma}_\alpha]$，$\tau_2\in(\underline{\Sigma}_\alpha]$ならば，$0<\tau_1<\tau_2$より，$0<\tau_1\leqq 1/\infty_\alpha$であるので，

$$\sigma_1\otimes\tau_1=「\underline{\Sigma}_\alpha または \tau_1」\neq\infty_\alpha=\sigma_2\otimes\tau_2.$$

（エ）$\tau_1,\ \tau_2\notin(\Sigma_\alpha]$ならば，

$$0<\tau_1<\tau_2\leqq 1/\infty_\alpha,$$
$$\infty_\alpha<\tau_1<\tau_2,$$
$$0<\tau_1\leqq 1/\infty_\alpha \text{ かつ } \infty_\alpha<\tau_2$$

の３通りのいずれかであるが，いずれにおいても$\sigma_1\otimes\tau_1\neq\sigma_2\otimes\tau_2$である．

（ⅱ）$\sigma_1=\sigma_2=1/\infty_\alpha$の場合：

（ア）$\tau_1,\ \tau_2\in[\underline{\Sigma}_\alpha)$ならば，$\sigma_1\otimes\tau_1=1/\infty_\alpha=\sigma_2\otimes\tau_2$.

（イ）$\tau_1\in[\underline{\Sigma}_\alpha)$，$\tau_2\notin[\underline{\Sigma}_\alpha)$ならば，$0<\tau_1<\tau_2$より，$\infty_\alpha\leqq\tau_2$であるので，

$$\sigma_1\otimes\tau_1=1/\infty_\alpha\neq「\underline{\Sigma}_\alpha または \tau_2」=\sigma_2\otimes\tau_2.$$

（ウ）$\tau_1\notin[\underline{\Sigma}_\alpha)$，$\tau_2\in[\underline{\Sigma}_\alpha)$ならば，$0<\tau_1<\tau_2$より，$0<\tau_1<1/\infty_\alpha$であるので，

$$\sigma_1\otimes\tau_1=\tau_1<1/\infty_\alpha=\sigma_2\otimes\tau_2.$$

（エ）$\tau_1,\ \tau_2\notin[\underline{\Sigma}_\alpha)$ならば，

$$0<\tau_1<\tau_2<1/\infty_\alpha,$$
$$\infty_\alpha\leqq\tau_1<\tau_2,$$
$$0<\tau_1<1/\infty_\alpha \text{ かつ } \infty_\alpha\leqq\tau_2$$

の３通りのいずれかであるが，いずれにおいても$\sigma_1\otimes\tau_1\neq\sigma_2\otimes\tau_2$である．

（iii） $\sigma_1=\sigma_2=(x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$の場合：

$\sigma_1\otimes\tau_1$，$\sigma_2\otimes\tau_2$が定義されているのは，τ_1，τ_2が正の有限拡大有理数のときだけであるので，

$$\tau_1=(x_{\tau 1},\ y_{\tau 1}),\quad \tau_2=(x_{\tau 2},\ y_{\tau 2})$$

とおけば，$x_{\tau 1}$，$x_{\tau 2}$は正の有限有理数である．

また，$0<\tau_1<\tau_2$であるので，

$$x_{\tau 1}<x_{\tau 2}\ \text{または「}x_{\tau 1}=x_{\tau 2},\ y_{\tau 1}<y_{\tau 2}\text{」}$$

であるが，

$x_{\tau 1}<x_{\tau 2}$ならば，$x_\sigma x_{\tau 1}<x_\sigma x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1\otimes\tau_1<\sigma_2\otimes\tau_2$である．

「$x_{\tau 1}=x_{\tau 2}$，$y_{\tau 1}<y_{\tau 2}$」ならば，

$$\sigma_1\otimes\tau_1=(x_\sigma x_{\tau 1},\ (1/\infty_\alpha)+y_{\tau 1}),$$
$$\sigma_2\otimes\tau_2=(x_\sigma x_{\tau 2},\ (1/\infty_\alpha)+y_{\tau 2})$$

において，$x_\sigma x_{\tau 1}=x_\sigma x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1\otimes\tau_1=\sigma_2\otimes\tau_2$となるのは，

$$(1/\infty_\alpha)+y_{\tau 1}=(1/\infty_\alpha)+y_{\tau 2}$$

のときだけであるが，$y_{\tau 1}<y_{\tau 2}$より，$y_{\tau 1}$，$y_{\tau 2}\in(\Pi_\alpha]$でなくてはならない．

（iv） $\sigma_1=\sigma_2=(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$の場合：

$\sigma_1\otimes\tau_1$，$\sigma_2\otimes\tau_2$が定義されているのは，τ_1，τ_2が正の有限拡大有理数のときだけであるので，

$$\tau_1=(x_{\tau 1},\ y_{\tau 1}),\quad \tau_2=(x_{\tau 2},\ y_{\tau 2})$$

とおけば，$x_{\tau 1}$，$x_{\tau 2}$は正の有限有理数である．

また，$0<\tau_1<\tau_2$であるので，

$$x_{\tau 1}<x_{\tau 2}\ \text{または「}x_{\tau 1}=x_{\tau 2},\ y_{\tau 1}<y_{\tau 2}\text{」}$$

であるが，

$x_{\tau 1}<x_{\tau 2}$ならば，$x_\sigma x_{\tau 1}<x_\sigma x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1\otimes\tau_1<\sigma_2\otimes\tau_2$である．

「$x_{\tau 1}=x_{\tau 2}$，$y_{\tau 1}<y_{\tau 2}$」ならば，

$$\sigma_1\otimes\tau_1=(x_\sigma x_{\tau 1},\ (-1/\infty_\alpha)+y_{\tau 1}),$$
$$\sigma_2\otimes\tau_2=(x_\sigma x_{\tau 2},\ (-1/\infty_\alpha)+y_{\tau 2})$$

において，$x_\sigma x_{\tau 1}=x_\sigma x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1\otimes\tau_1=\sigma_2\otimes\tau_2$となるのは，

$$(-1/\infty_\alpha)+y_{\tau 1}=(-1/\infty_\alpha)+y_{\tau 2}$$

のときだけであるが，$y_{\tau 1}<y_{\tau 2}$より，$y_{\tau 1}$，$y_{\tau 2}\in[\Pi_\alpha)$でなくてはならない．

（v） $\sigma_1=\sigma_2=x_\sigma$の場合：

$\sigma_1\otimes\tau_1$，$\sigma_2\otimes\tau_2$が定義されているのは，次のいずれかである．

（ア） τ_1，τ_2が正の無限大有理数．

（イ） τ_1が正の無限大有理数で，τ_2が正の有限拡大有理数．

（ウ） τ_1が正の無限大有理数で，τ_2が正の無限小有理数．

（エ） τ_1が正の有限拡大有理数で，τ_2が正の無限大有理数．

（オ） τ_1，τ_2が正の有限拡大有理数．

（カ） τ_1が正の有限拡大有理数で，τ_2が正の無限小有理数．

（キ） τ_1が正の無限小有理数で，τ_2が正の無限大有理数．

（ク） τ_1が正の無限小有理数で，τ_2が正の有限拡大有理数．

（ケ）τ_1，τ_2が正の無限小有理数．

(ア)ならば，

τ_1，τ_2が正の無限大有理数であり，条件より$\tau_1 < \tau_2$であるので，
$\tau_1 = \infty_\alpha$，$\tau_2 = \infty_\beta$，$\alpha < \beta$とすれば，$\sigma_1 \otimes \tau_1 = \infty_\alpha < \infty_\beta = \sigma_2 \otimes \tau_2$となる．

(イ)ならば，

条件$\tau_1 < \tau_2$に反する．

(ウ)ならば，

条件$\tau_1 < \tau_2$に反する．

(エ)ならば，

τ_2が正の無限大有理数より，$\tau_2 = \infty_\alpha$とすれば，$\sigma_1 \otimes \tau_1 < \infty_0 \leqq \infty_\alpha = \sigma_2 \otimes \tau_2$
となる．

(オ)ならば，

$$\tau_1 = (x_{\tau 1},\ y_{\tau 1}),\qquad \tau_2 = (x_{\tau 2},\ y_{\tau 2})$$

とおけば，$x_{\tau 1}$，$x_{\tau 2}$は正の有限有理数である．

また，条件$\tau_1 < \tau_2$より，

$$x_{\tau 1} < x_{\tau 2} \text{ または「} x_{\tau 1} = x_{\tau 2},\ y_{\tau 1} < y_{\tau 2} \text{」}$$

であるが，

$x_{\tau 1} < x_{\tau 2}$ならば，$x_\sigma x_{\tau 1} < x_\sigma x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1 \otimes \tau_1 < \sigma_2 \otimes \tau_2$である．

「$x_{\tau 1} = x_{\tau 2}$，$y_{\tau 1} < y_{\tau 2}$」ならば，

$$\sigma_1 \otimes \tau_1 = (x_\sigma x_{\tau 1},\ y_{\tau 1}),$$
$$\sigma_2 \otimes \tau_2 = (x_\sigma x_{\tau 2},\ y_{\tau 2})$$

において，$x_\sigma x_{\tau 1} = x_\sigma x_{\tau 2}$であるので，$\sigma_1 \oplus \tau_1 < \sigma_2 \oplus \tau_2$となる．

(カ)ならば，

条件$\tau_1 < \tau_2$に反する．

(キ)ならば，

τ_1が正の無限小有理数で，τ_2が正の無限大有理数より，$\tau_1 = 1 / \infty_\alpha$，$\tau_2 = \infty_\beta$
とすれば，$\sigma_1 \otimes \tau_1 = 1 / \infty_\alpha < \infty_\beta = \sigma_2 \otimes \tau_2$となる．

(ク) τ_1が正の無限小有理数より，$\tau_1 = 1 / \infty_\alpha$とすれば，

$$\sigma_1 \otimes \tau_1 = 1 / \infty_\alpha \leqq 1 / \infty_0 < \sigma_2 \otimes \tau_2$$

となる．

(ケ)ならば，

τ_1，τ_2が正の無限小有理数であり，条件より$\tau_1 < \tau_2$であるので，
$\tau_1 = 1 / \infty_\alpha$，$\tau_2 = 1 / \infty_\beta$，$\alpha > \beta$とすれば，

$$\sigma_1 \otimes \tau_1 = 1 / \infty_\alpha < 1 / \infty_\beta = \sigma_2 \otimes \tau_2$$

となる■

$\boxed{15}$ 定理3-8（拡大有理数の乗法の一意性を証明するための予備定理３）

　μ，νを正の拡大有理数として，次の(＊１)～(＊３)が成り立つとする．

$$0<\sigma_{11}\leqq\mu\leqq\sigma_{12},\ 0<\tau_{11}\leqq\nu\leqq\tau_{12},\ \sigma_{11}\otimes\tau_{11}=\sigma_{12}\otimes\tau_{12}.\quad (＊１)$$

$$0<\sigma_{21}\leqq\mu\leqq\sigma_{22},\ 0<\tau_{21}\leqq\nu\leqq\tau_{22},\ \sigma_{21}\otimes\tau_{21}=\sigma_{22}\otimes\tau_{22}.\quad (＊２)$$

$$0<\sigma_{11}=\sigma_{12},\ 0<\tau_{11}<\tau_{12}.\ (＊３)$$

　このとき，

（ア）$\mu=\nu=\infty_\alpha$，

（イ）$\mu=\nu=1/\infty_\alpha$，

（ウ）$\mu=(x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$ かつ $\nu=(x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$，

（エ）$\mu=(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$ かつ $\nu=(x_\tau,\ -1/\infty_\alpha)$

の４通りの場合（この４通りの場合を(＊４)で表す）以外の場合で，

$$0<\sigma_{21}<\sigma_{22},\ 0<\tau_{21}=\tau_{22}\quad (＊５)$$

となることはない．ただし，x_σ，x_τは正の有限有理数とする．

　証明　背理法を用いる．(＊４)の場合以外に，(＊１)，(＊２)，(＊３)，(＊５)が同時に成り立つと仮定する．このとき，(＊５)と定理3-7より，次のいずれかが成り立たなくてはならない．

（ｉ）$\tau_{21}=\tau_{22}=\infty_\alpha$ かつ σ_{11}，$\sigma_{12}\in(\underline{\Sigma}_\alpha]$．

（ii）$\tau_{21}=\tau_{22}=1/\infty_\alpha$ かつ σ_{11}，$\sigma_{12}\in[\underline{\Sigma}_\alpha)$．

（iii）$\tau_{21}=\tau_{22}=(x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$ かつ σ_{11}，$\sigma_{12}\in(x_\sigma,\ (\Pi_\alpha])$．

（iv）$\tau_{21}=\tau_{22}=(x_\tau,\ -1/\infty_\alpha)$ かつ σ_{11}，$\sigma_{12}\in(x_\sigma,\ [\Pi_\alpha))$．

　しかし，いずれの場合も矛盾を生じる．実際，

（ｉ）の場合は，$\tau_{21}=\tau_{22}=\infty_\alpha$より，$\nu=\infty_\alpha$である．

　また，σ_{11}，$\sigma_{12}\in(\underline{\Sigma}_\alpha]$より，

$$1/\infty_\alpha<\mu\leqq\infty_\alpha$$

であるが，$\mu=\infty_\alpha$とすれば(ア)の場合になるので，

$$1/\infty_\alpha<\mu<\infty_\alpha$$

とする．このとき，(＊３)より，

$$1/\infty_\alpha<\sigma_{11}=\mu=\sigma_{12}<\infty_\alpha$$

であるので，定理3-7より，

$$1/\infty_\alpha<\tau_{11},\ \tau_{12}<\infty_\alpha$$

となるが，これは，

$$1/\infty_\alpha<\nu<\infty_\alpha$$

を意味するので，$\nu=\infty_\alpha$であることに矛盾する．

（ii）の場合は，$\tau_{21}=\tau_{22}=1/\infty_\alpha$より，$\nu=1/\infty_\alpha$である．

　また，σ_{11}，$\sigma_{12}\in[\underline{\Sigma}_\alpha)$より，

$$1/\infty_\alpha\leqq\mu<\infty_\alpha$$

であるが，$\mu=1/\infty_\alpha$とすれば(イ)の場合になるので，

$$1/\infty_\alpha<\mu<\infty_\alpha$$

とする．このとき，(＊３)より，

$$1/\infty_\alpha<\sigma_{11}=\mu=\sigma_{12}<\infty_\alpha$$

であるので，定理3-7より，

$$1/\infty_\alpha < \tau_{11},\ \tau_{12} < \infty_\alpha$$

となるが，これは，

$$1/\infty_\alpha < \nu < \infty_\alpha$$

を意味するので，$\nu = 1/\infty_\alpha$であることに矛盾する．

(ⅲ)の場合は，$\tau_{21} = \tau_{22} = (x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$より，$\nu = (x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$である．

また，σ_{21}，$\sigma_{22} \in (x_\sigma,\ (\Pi_\alpha])$より，

$$(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha) < \mu \leqq (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$$

であるが，$\mu = (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$とすれば(ウ)の場合になるので，

$$(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha) < \mu < (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$$

とする．このとき，(＊３)より，

$$(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha) < \sigma_{11} = \mu = \sigma_{12} < (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$$

であるので，定理3-7より，

$$(x_\tau,\ -1/\infty_\alpha) < \tau_{11},\ \tau_{12} < (x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$$

となるが，これは，

$$(x_\tau,\ -1/\infty_\alpha) < \nu < (x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$$

を意味するので，$\nu = (x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$であることに矛盾する．

(ⅳ)の場合は，$\tau_{21} = \tau_{22} = (x_\tau,\ -1/\infty_\alpha)$より，$\nu = (x_\tau,\ -1/\infty_\alpha)$である．

また，σ_{21}，$\sigma_{22} \in (x_\sigma,\ [\Pi_\alpha))$より，

$$(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha) \leqq \mu < (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$$

であるが，$\mu = (x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$とすれば(エ)の場合になるので，

$$(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha) < \mu < (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$$

とする．このとき，(＊３)より，

$$(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha) < \sigma_{11} = \mu = \sigma_{12} < (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$$

であるので，定理3-7より，

$$(x_\tau,\ -1/\infty_\alpha) < \tau_{11},\ \tau_{12} < (x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$$

となるが，これは，

$$(x_\tau,\ -1/\infty_\alpha) < \nu < (x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$$

を意味するので，$\nu = (x_\tau,\ -1/\infty_\alpha)$であることに矛盾する■

16 定理3-9（拡大有理数の乗法の一意性）

μ，νを正の拡大有理数として，次の(＊１)，(＊２)が成り立つとする．

$0 < \sigma_{11} \leqq \mu \leqq \sigma_{12}$，$0 < \tau_{11} \leqq \nu \leqq \tau_{12}$で，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{12} \otimes \tau_{12}$．(＊１)

$0 < \sigma_{21} \leqq \mu \leqq \sigma_{22}$，$0 < \tau_{21} \leqq \nu \leqq \tau_{22}$で，$\sigma_{21} \otimes \tau_{21} = \sigma_{22} \otimes \tau_{22}$．(＊２)

このとき，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{21} \otimes \tau_{21}$が成り立つ．

証明　定理3-6より，σ_{11}，σ_{12}，τ_{11}，τ_{12}は，次のいずれかである．

(ⅰ) $0 < \sigma_{11} = \sigma_{12}$，$0 < \tau_{11} < \tau_{12}$．

(ⅱ) $0 < \sigma_{11} = \sigma_{12}$，$0 < \tau_{11} = \tau_{12}$．

(ⅲ) $0 < \sigma_{11} < \sigma_{12}$，$0 < \tau_{11} = \tau_{12}$．

σ_{21}，σ_{22}，τ_{21}，τ_{22}についても同様に，次のいずれかである．

(ⅳ) $0<\sigma_{21}=\sigma_{22}$, $0<\tau_{21}<\tau_{22}$.

(ⅴ) $0<\sigma_{21}=\sigma_{22}$, $0<\tau_{21}=\tau_{22}$.

(ⅵ) $0<\sigma_{21}<\sigma_{22}$, $0<\tau_{21}=\tau_{22}$.

したがって，考えられる組み合わせは次の９通りである.

(ア)「$0<\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}<\tau_{12}$」かつ「$0<\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}<\tau_{22}$」.
(イ)「$0<\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}<\tau_{12}$」かつ「$0<\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}=\tau_{22}$」.
(ウ)「$0<\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}<\tau_{12}$」かつ「$0<\sigma_{21}<\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}=\tau_{22}$」.
(エ)「$0<\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$0<\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}<\tau_{22}$」.
(オ)「$0<\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$0<\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}=\tau_{22}$」.
(カ)「$0<\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$0<\sigma_{21}<\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}=\tau_{22}$」.
(キ)「$0<\sigma_{11}<\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$0<\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}<\tau_{22}$」.
(ク)「$0<\sigma_{11}<\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$0<\sigma_{21}=\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}=\tau_{22}$」.
(ケ)「$0<\sigma_{11}<\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}=\tau_{12}$」かつ「$0<\sigma_{21}<\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}=\tau_{22}$」.

(ア)の場合は，

定理3-7より，τ_{11}，τ_{21}が，$\sigma_{11}=\mu=\sigma_{21}$の原始乗法に関する吸収範囲に属する数であるので，$\sigma_{11}\otimes\tau_{11}=\sigma_{21}\otimes\tau_{21}$を得る.

(イ)の場合は，

定理3-7より，τ_{11}，τ_{12}が，$\sigma_{11}=\mu=\sigma_{21}$の原始乗法に関する吸収範囲に属する数であり，

$$\tau_{11}\leqq\nu=\tau_{21}<\tau_{12} \text{ または } \tau_{11}<\nu=\tau_{21}=\tau_{12}$$

であるので，$\sigma_{11}\otimes\tau_{11}=\sigma_{21}\otimes\tau_{21}$を得る.

(ウ)の場合は，

考えられるのは定理3-8の(＊４)の場合だけである.

① $\mu=\nu=\infty_\alpha$とすれば，定理3-7より，

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=\infty_\alpha \text{ かつ } \tau_{11},\ \tau_{12}\in(\underline{\Sigma}_\alpha],$$
$$\sigma_{21},\ \sigma_{22}\in(\underline{\Sigma}_\alpha] \text{ かつ } \tau_{21}=\tau_{22}=\infty_\alpha$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11}\otimes\tau_{11}=\sigma_{21}\otimes\tau_{21}$を得る.

② $\mu=\nu=1/\infty_\alpha$とすれば，定理3-7より，

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=1/\infty_\alpha \text{ かつ } \tau_{11},\ \tau_{12}\in[\underline{\Sigma}_\alpha),$$
$$\sigma_{21},\ \sigma_{22}\in[\underline{\Sigma}_\alpha) \text{ かつ } \tau_{21}=\tau_{22}=1/\infty_\alpha$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11}\otimes\tau_{11}=\sigma_{21}\otimes\tau_{21}$を得る.

③ $\mu=(x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$，$\nu=(x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$とすれば，定理3-7より，

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=(x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha) \text{ かつ } \tau_{11},\ \tau_{12}\in(x_\tau,\ (\Pi_\alpha]),$$
$$\sigma_{21},\ \sigma_{22}\in(x_\sigma,\ (\Pi_\alpha]) \text{ かつ } \tau_{21}=\tau_{22}=(x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11}\otimes\tau_{11}=\sigma_{21}\otimes\tau_{21}$を得る.

④ $\mu=(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$，$\nu=(x_\tau,\ -1/\infty_\alpha)$とすれば，定理3-7より，

$$\sigma_{11}=\sigma_{12}=(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha) \text{ かつ } \tau_{11},\ \tau_{12}\in(x_\tau,\ [\Pi_\alpha)),$$
$$\sigma_{21},\ \sigma_{22}\in(x_\sigma,\ [\Pi_\alpha)) \text{ かつ } \tau_{21}=\tau_{22}=(x_\tau,\ -1/\infty_\alpha)$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{21} \otimes \tau_{21}$を得る．

(エ)の場合は，

定理3-7より，τ_{21}，τ_{22}が，$\sigma_{11} = \mu = \sigma_{21}$の原始乗法に関する吸収範囲に属する数であり，

$$\tau_{21} \leqq \nu = \tau_{11} < \tau_{22} \text{ または } \tau_{21} < \nu = \tau_{11} = \tau_{22}$$

であるので，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{21} \otimes \tau_{21}$を得る．

(オ)の場合は，

$$\sigma_{11} = \mu = \sigma_{12},\ \tau_{11} = \nu = \tau_{12},\ \sigma_{21} = \mu = \sigma_{22},\ \tau_{21} = \nu = \tau_{22}$$

であるので，$\sigma_{11} = \sigma_{21}$，$\tau_{11} = \tau_{21}$となり，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{21} \otimes \tau_{21}$を得る．

(カ)の場合は，

定理3-7より，σ_{21}，σ_{22}が，$\tau_{11} = \nu = \tau_{21}$の原始乗法に関する吸収範囲に属する数であり，

$$\sigma_{21} \leqq \mu = \sigma_{11} < \sigma_{22} \text{ または } \sigma_{21} < \mu = \sigma_{11} = \sigma_{22}$$

であるので，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{21} \otimes \tau_{21}$を得る．

(キ)の場合は，

考えられるのは定理3-8の(＊4)の場合だけである．

① $\mu = \nu = \infty_\alpha$とすれば，定理3-7より，

$$\sigma_{11},\ \sigma_{12} \in (\underline{\Sigma}_\alpha] \text{ かつ } \tau_{11} = \tau_{12} = \infty_\alpha,$$
$$\sigma_{21} = \sigma_{22} = \infty_\alpha \text{ かつ } \tau_{21},\ \tau_{22} \in (\underline{\Sigma}_\alpha]$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{21} \otimes \tau_{21}$を得る．

② $\mu = \nu = 1 / \infty_\alpha$とすれば，定理3-7より，

$$\sigma_{11},\ \sigma_{12} \in [\underline{\Sigma}_\alpha) \text{ かつ } \tau_{11} = \tau_{12} = 1 / \infty_\alpha,$$
$$\sigma_{21} = \sigma_{22} = 1 / \infty_\alpha \text{ かつ } \tau_{21},\ \tau_{22} \in [\underline{\Sigma}_\alpha)$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{21} \otimes \tau_{21}$を得る．

③ $\mu = (x_\sigma,\ 1 / \infty_\alpha)$，$\nu = (x_\tau,\ 1 / \infty_\alpha)$とすれば，定理3-7より，

$$\sigma_{11},\ \sigma_{12} \in (x_\sigma,\ (\Pi_\alpha]) \text{ かつ } \tau_{11} = \tau_{12} = (x_\tau,\ 1 / \infty_\alpha),$$
$$\sigma_{21} = \sigma_{22} = (x_\sigma,\ 1 / \infty_\alpha) \text{ かつ } \tau_{21},\ \tau_{22} \in (x_\tau,\ (\Pi_\alpha])$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{21} \otimes \tau_{21}$を得る．

④ $\mu = (x_\sigma,\ -1 / \infty_\alpha)$，$\nu = (x_\tau,\ -1 / \infty_\alpha)$とすれば，定理3-7より，

$$\sigma_{11},\ \sigma_{12} \in (x_\sigma,\ [\Pi_\alpha)) \text{ かつ } \tau_{11} = \tau_{12} = (x_\tau,\ -1 / \infty_\alpha),$$
$$\sigma_{21} = \sigma_{22} = (x_\sigma,\ -1 / \infty_\alpha) \text{ かつ } \tau_{21},\ \tau_{22} \in (x_\tau,\ [\Pi_\alpha))$$

でなくてはならないので，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{21} \otimes \tau_{21}$を得る．

(ク)の場合は，

定理3-7より，σ_{11}，σ_{12}が，$\tau_{11} = \nu = \tau_{21}$の原始乗法に関する吸収範囲に属する数であり，

$$\sigma_{11} \leqq \mu = \sigma_{21} < \sigma_{12} \text{ または } \sigma_{11} < \mu = \sigma_{21} = \sigma_{12}$$

であるので，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{21} \otimes \tau_{21}$を得る．

(ケ)の場合は，

定理3-7より，σ_{11}，σ_{21}が，$\tau_{11} = \nu = \tau_{21}$の原始乗法に関する吸収範囲に属する数であるので，$\sigma_{11} \otimes \tau_{11} = \sigma_{21} \otimes \tau_{21}$を得る■

補足：μ，νを正の拡大有理数として，

$$0<\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\quad 0<\tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\quad \sigma_1 \otimes \tau_1 = \sigma_2 \otimes \tau_2$$

となるならば，

$$\sigma_1 \otimes \tau_1 = \sigma_1 \otimes \tau_2 = \sigma_2 \otimes \tau_1 = \sigma_2 \otimes \tau_2 \qquad (*)$$

である．

実際，定理3-6より，$\sigma_1=\sigma_2$，$\tau_1=\tau_2$の少なくとも片方は成り立つ．どちらでも同じことであるので$\sigma_1=\sigma_2$とする．ここで，$\tau_1=\tau_2$ならば明らかに$(*)$が成り立ち，$\tau_1<\tau_2$ならば定理3-7より$(*)$が成り立つ．

補足：拡大有理数の乗法は，拡大有理数の原始乗法の拡張である．

実際，$0<\mu \leqq \mu \leqq \mu$，$0<\nu \leqq \nu \leqq \nu$で，$\mu \otimes \nu$が存在する場合を考えると，$\mu \otimes \nu$は，

$$確定数,\quad (x,\ \Pi_\alpha),\quad \underline{\Sigma}_\alpha$$

のいずれかである（xは正の有限有理数）が，$\mu \otimes \nu \neq \underline{\Sigma}_\alpha$ならば，

$$\mu\ \nu = \{\chi : \min(\mu \otimes \nu) \leqq \chi \leqq \max(\mu \otimes \nu),\ \chi は拡大有理数\} = \mu \otimes \nu$$

である．そして，$\mu \otimes \nu = \underline{\Sigma}_\alpha$ならば，

$$\mu\ \nu = \{\chi : \min(\mu \otimes \nu) \leqq \chi \leqq \max(\mu \otimes \nu),\ \chi は拡大有理数\} = \underline{\underline{\Sigma}}_\alpha$$

であるが，これは数の拡張にともなう変化であるので，拡大有理数の原始乗法は，拡大有理数の乗法の特殊な場合と考えることができる．

$\boxed{17}$ 第２章の宿題への解答

第２章の「$\boxed{23}$ 有理数の欠陥」において述べたように，有理数の範囲においては，有限有理数と無限小有理数の和に相等する数が見当たらないために，有理数の加法を一般的に定義することができなかった．しかし，拡大有理数$(x,\ y)$は，その加法の定義より，

$$(x,\ y)=(x,\ 0)+(0,\ y)=x+y$$

とすることができる．ここで，xが有限有理数で，yが無限小有理数の場合を考えれば，この拡大有理数こそ，求める和であることを示している．

補足：xが有限有理数ならば，

$$(x,\ \Pi_\alpha),\ \{(x,\ y) : y \in \Pi_\alpha\},\ \{x+y : y \in \Pi_\alpha\},\ x+\Pi_\alpha$$

は，すべて同じ不定数を表している．すなわち，

$$(x,\ \Pi_\alpha)=\{(x,\ y) : y \in \Pi_\alpha\}=\{x+y : y \in \Pi_\alpha\}=x+\Pi_\alpha$$

である．

第４章　拡大実数

1 有理核

初めに，若干の用語と記号を定める．

（ⅰ） xを有限有理数とするとき，不定数$x+\Pi_0$を$\zeta(x)$で表し，有限有理核という．すべての正の無限大拡大有理数からなる不定数を$\zeta(\infty_0)$で表し，すべての負の無限大拡大有理数からなる不定数を$\zeta(-\infty_0)$で表すとき，$\zeta(\infty_0)$と$\zeta(-\infty_0)$を無限大有理核という．

また，有限有理核と無限大有理核を合わせて，単に有理核という．

（ⅱ） 有限有理核$\zeta(x)$に属する有限有理数x，$\zeta(\infty_0)$に属する∞_0，$\zeta(-\infty_0)$に属する$-\infty_0$を，それぞれの有理核の基という．

（ⅲ） 有限有理核すべての集合を$\boldsymbol{Q}$で表し，有理核すべての集合を$[\boldsymbol{Q}]$で表す．

（ⅳ） $\boldsymbol{Q}$に属する有理核の基すべての集合をQで表し，$[\boldsymbol{Q}]$に属する有理核の基すべての集合を$[Q]$で表す．$[Q]=Q\cup\{\infty_0,\ -\infty_0\}$．

（ⅴ） 基が正の有理核を正の有理核，基が負の有理核を負の有理核，基が零の有理核を零の有理核(または単に零)という．

2 定理4-1（有理核の基本性質）

有理核の基に，その有理核が対応する写像 $\zeta:[Q]\to[\boldsymbol{Q}]$ は，一部例外を除けば，大小関係，加法，乗法についての同型写像である．すなわち，$x_1,\ x_2\in[Q]$とすれば，次の式が成り立つ．

（ⅰ） 大小関係

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow \zeta(x_1)<\zeta(x_2).$$
$$x_1=x_2 \Leftrightarrow \zeta(x_1)=\zeta(x_2).$$
$$x_1>x_2 \Leftrightarrow \zeta(x_1)>\zeta(x_2).$$

（ⅱ） 加法

$$\zeta(x_1)+\zeta(x_2)=\zeta(x_1+x_2).$$

ただし，

$$\zeta(\infty_0)+\zeta(-\infty_0),\quad \zeta(-\infty_0)+\zeta(\infty_0)$$

の場合は除く．

（ⅲ） 乗法

$$\zeta(x_1)\zeta(x_2)=\zeta(x_1x_2).$$

ただし，

$$\zeta(0)\zeta(\infty_0),\quad \zeta(\infty_0)\zeta(0),\quad \zeta(0)\zeta(-\infty_0),\quad \zeta(-\infty_0)\zeta(0)$$

の場合は除く．

証明　有理核は拡大有理数の不定数であるので，その大小関係，加法，乗法は，拡大有理数の大小関係，加法，乗法を用いて，定義1-3に従う．ここで，$x_1,\ x_2\in[Q]$とする．

（ⅰ）（ア）$x_1,\ x_2\in Q$ならば，

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1+\Pi_0<x_2+\Pi_0.$$
$$x_1=x_2 \Leftrightarrow x_1+\Pi_0=x_2+\Pi_0.$$
$$x_1>x_2 \Leftrightarrow x_1+\Pi_0>x_2+\Pi_0.$$

（イ） $x_1 \in Q$， $x_2 \notin Q$ならば， x_2は「∞_0 または $-\infty_0$」であり，

$$x_1 < \infty_0 \Leftrightarrow x_1 + \Pi_0 < \zeta(\infty_0).$$

$$-\infty_0 < x_1 \Leftrightarrow \zeta(-\infty_0) < x_1 + \Pi_0.$$

（ウ） $x_1 \notin Q$， $x_2 \in Q$ならば， x_1は「∞_0 または $-\infty_0$」であり，

$$x_2 < \infty_0 \Leftrightarrow x_2 + \Pi_0 < \zeta(\infty_0).$$

$$-\infty_0 < x_2 \Leftrightarrow \zeta(-\infty_0) < x_2 + \Pi_0.$$

（エ） $x_1 \notin Q$， $x_2 \notin Q$ならば， x_1， x_2は，それぞれ，「∞_0 または $-\infty_0$」であり，

$$-\infty_0 < \infty_0 \quad \Leftrightarrow \zeta(-\infty_0) < \zeta(\infty_0).$$

$$\infty_0 = \infty_0 \quad \Leftrightarrow \zeta(\infty_0) = \zeta(\infty_0).$$

$$-\infty_0 = -\infty_0 \Leftrightarrow \zeta(-\infty_0) = \zeta(-\infty_0).$$

$$\infty_0 > -\infty_0 \Leftrightarrow \zeta(\infty_0) > \zeta(-\infty_0) \blacksquare$$

（ⅱ）（ア） x_1， $x_2 \in Q$ならば，

$$\zeta(x_1) + \zeta(x_2) = (x_1 + \Pi_0) + (x_2 + \Pi_0) = (x_1 + x_2) + \Pi_0 = \zeta(x_1 + x_2).$$

（イ） $x_1 \in Q$， $x_2 \notin Q$ならば， x_2は「∞_0 または $-\infty_0$」であり，

$$\zeta(x_1) + \zeta(\infty_0) = (x_1 + \Pi_0) + \zeta(\infty_0) = \zeta(\infty_0) = \zeta(x_1 + \infty_0).$$

$$\zeta(x_1) + \zeta(-\infty_0) = (x_1 + \Pi_0) + \zeta(-\infty_0) = \zeta(-\infty_0) = \zeta(x_1 + (-\infty_0)).$$

（ウ） $x_1 \notin Q$， $x_2 \in Q$ならば， x_1は「∞_0 または $-\infty_0$」であり，

$$\zeta(\infty_0) + \zeta(x_2) = \zeta(\infty_0) + (x_2 + \Pi_0) = \zeta(\infty_0) = \zeta(\infty_0 + x_2).$$

$$\zeta(-\infty_0) + \zeta(x_2) = \zeta(-\infty_0) + (x_2 + \Pi_0) = \zeta(-\infty_0) = \zeta((-\infty_0) + x_2).$$

（エ） $x_1 \notin Q$， $x_2 \notin Q$ならば， x_1， x_2は，それぞれ，「∞_0 または $-\infty_0$」であり，

$$\zeta(\infty_0) + \zeta(\infty_0) = \zeta(\infty_0) = \zeta(\infty_0 + \infty_0).$$

$$\zeta(-\infty_0) + \zeta(-\infty_0) = \zeta(-\infty_0) = \zeta((-\infty_0) + (-\infty_0)).$$

$\zeta(\infty_0) + \zeta(-\infty_0) = \cup \underline{\underline{\Theta}}_\alpha$であるが， $\zeta(\infty_0 + (-\infty_0)) = \zeta(\underline{\underline{\Theta}}_0)$は存在しない．

$\zeta(-\infty_0) + \zeta(\infty_0) = \cup \underline{\underline{\Theta}}_\alpha$であるが， $\zeta((-\infty_0) + \infty_0) = \zeta(\underline{\underline{\Theta}}_0)$は存在しない $\blacksquare$

（ⅲ） x_1， x_2を正の基とする．

（ア） x_1， $x_2 \in Q$ならば，

$$\zeta(x_1)\zeta(x_2) = (x_1 + \Pi_0)(x_2 + \Pi_0) = (x_1 x_2) + \Pi_0 = \zeta(x_1 x_2).$$

$$\begin{aligned}\zeta(-x_1)\zeta(-x_2) &= (-x_1 + \Pi_0)(-x_2 + \Pi_0) \\ &= \{-(x_1 + \Pi_0)\}\{-(x_2 + \Pi_0)\} = (x_1 x_2) + \Pi_0 \\ &= \{(-x_1)(-x_2)\} + \Pi_0 = \zeta((-x_1)(-x_2)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(x_1)\zeta(-x_2) &= (x_1 + \Pi_0)(-x_2 + \Pi_0) \\ &= (x_1 + \Pi_0)\{-(x_2 + \Pi_0)\} = -\{(x_1 x_2) + \Pi_0\} \\ &= -(x_1 x_2) - \Pi_0 = x_1(-x_2) + \Pi_0 = \zeta(x_1(-x_2)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(-x_1)\zeta(x_2) &= (-x_1 + \Pi_0)(x_2 + \Pi_0) \\ &= \{-(x_1 + \Pi_0)\}(x_2 + \Pi_0) = -\{(x_1 x_2) + \Pi_0\} \\ &= -(x_1 x_2) - \Pi_0 = (-x_1)x_2 + \Pi_0 = \zeta((-x_1)x_2).\end{aligned}$$

$$\zeta(x_1)\zeta(0) = (x_1 + \Pi_0)\Pi_0 = \Pi_0 = \zeta(0) = \zeta(x_1 0).$$

$$\zeta(0)\zeta(x_2) = \Pi_0(x_2 + \Pi_0) = \Pi_0 = \zeta(0) = \zeta(0 x_2).$$

$\zeta(-x_1)\zeta(0)=(-x_1+\Pi_0)\Pi_0=\Pi_0=\zeta(0)=\zeta((-x_1)0)$.

$\zeta(0)\zeta(-x_2)=\Pi_0(-x_2+\Pi_0)=\Pi_0=\zeta(0)=\zeta(0(-x_2))$.

$\zeta(0)\zeta(0)=\Pi_0\Pi_0=\Pi_0=\zeta(0)=\zeta(0\,0)$.

（イ） $x_1\in Q$，$x_2\notin Q$ならば，$x_2=\infty_0$であるので，

$\zeta(x_1)\zeta(x_2)=(x_1+\Pi_0)\zeta(\infty_0)=\zeta(\infty_0)=\zeta(x_1\infty_0)=\zeta(x_1x_2)$.

$$\begin{aligned}\zeta(-x_1)\zeta(-x_2)&=(-x_1+\Pi_0)\zeta(-\infty_0)=\{-(x_1+\Pi_0)\}\{-\zeta(\infty_0)\}\\&=(x_1+\Pi_0)\zeta(\infty_0)=\zeta(\infty_0)=\zeta(x_1\infty_0)\\&=\zeta((-x_1)(-\infty_0))=\zeta((-x_1)(-x_2)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(x_1)\zeta(-x_2)&=(x_1+\Pi_0)\zeta(-\infty_0)=(x_1+\Pi_0)\{-\zeta(\infty_0)\}\\&=-\{(x_1+\Pi_0)\zeta(\infty_0)\}=-\zeta(\infty_0)=\zeta(-\infty_0)\\&=\zeta(-(x_1\infty_0))=\zeta(x_1(-\infty_0))=\zeta(x_1(-x_2)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(-x_1)\zeta(x_2)&=(-x_1+\Pi_0)\zeta(\infty_0)=\{-(x_1+\Pi_0)\}\zeta(\infty_0)\\&=-\{(x_1+\Pi_0)\zeta(\infty_0)\}=-\zeta(\infty_0)=\zeta(-\infty_0)\\&=\zeta(-(x_1\infty_0))=\zeta((-x_1)\infty_0)=\zeta((-x_1)x_2).\end{aligned}$$

$\zeta(0)\zeta(x_2)=\Pi_0\zeta(\infty_0)\neq\Pi_0=\zeta(0)=\zeta(0\,x_2)$.

$\zeta(0)\zeta(-x_2)=\Pi_0\zeta(-\infty_0)\neq\Pi_0=\zeta(0)=\zeta(0(-x_2))$.

（ウ） $x_1\notin Q$，$x_2\in Q$ならば，（イ）と同様である．

（エ） $x_1\notin Q$，$x_2\notin Q$ならば，$x_1=\infty_0$，$x_2=\infty_0$であるので，

$\zeta(x_1)\zeta(x_2)=\zeta(\infty_0)\zeta(\infty_0)=\zeta(\infty_0)=\zeta(x_1x_2)$.

$\zeta(-x_1)\zeta(-x_2)=\zeta(-\infty_0)\zeta(-\infty_0)=\zeta(\infty_0)=\zeta((-x_1)(-x_2))$.

$\zeta(x_1)\zeta(-x_2)=\zeta(\infty_0)\zeta(-\infty_0)=\zeta(-\infty_0)=\zeta(x_1(-x_2))$.

$\zeta(-x_1)\zeta(x_2)=\zeta(-\infty_0)\zeta(\infty_0)=\zeta(-\infty_0)=\zeta((-x_1)x_2)$ ■

補足：定理4-1の例外は，従来の極限計算において，「∞－∞」，「０×∞」が，それぞれ，不定であることと一致する．

$\boxed{3}$ 定理4-2

QとQは，大小関係，加法，乗法について同型である．すなわち，有限有理核には，従来の有理数と同じ式が成り立つ．

証明　定理4-1の証明における，（ⅰ）の（ア），（ⅱ）の（ア），（ⅲ）の（ア）による ■

例：集合Qにおいて，式「(１／２)＋(１／３)＝５／６」が成り立つ．このとき，
　　集合***Q***において，式「ζ(１／２)＋ζ(１／３)＝ζ(５／６)」が成り立つ．

$\boxed{4}$ 定理4-3

有理核の全体[***Q***]は稠密である．

証明　定理4-2より，***Q***は稠密である．また，$\zeta(x)\in$***Q***とすれば，

$\zeta(x)<\zeta(y)<\zeta(\infty_0)$となる$\zeta(y)=\zeta(x+1)\in$[***Q***] が存在する．

$\zeta(-\infty_0)<\zeta(y)<\zeta(x)$ となる$\zeta(y)=\zeta(x-1)\in$[***Q***] が存在する．

$\zeta(-\infty_0)<\zeta(y)<\zeta(\infty_0)$となる$\zeta(y)=\zeta(0)\in$[***Q***] が存在する ■

$\boxed{5}$ 有理核の拡大切断

（ⅰ）有理核の全体$[\boldsymbol{Q}]$を，何らかの方法で，

$$A_1 \cup A_2 = [\boldsymbol{Q}],\ A_1 \cap A_2 = \phi,\ A_1 < A_2$$

となるように二つの組A_1，A_2に分割したとき，A_1を下組，A_2を上組という．

ここで，下組A_1と上組A_2の順序対(A_1, A_2)を拡大切断といい，$a = (A_1, A_2)$で表す．

補足：拡大切断には「$A_1 = \phi$ または $A_2 = \phi$」の場合も含まれる．従来の切断には，常に「$A_1 \neq \phi$，$A_2 \neq \phi$」の条件がついていたが，この条件がなくなったという意味で，拡大切断は従来の切断の拡張である．

（ⅱ）下組A_1に属する正の有理核すべての集合を$A_1{}^+$，負の有理核すべての集合を$A_1{}^-$，上組A_2に属する正の有理核すべての集合を$A_2{}^+$，負の有理核すべての集合を$A_2{}^-$で表す．

（ⅲ）拡大切断は，次の４種類が考えられる．

（ア）A_1に最大有理核があり，A_2に最小有理核がない．(第１種切断)

（イ）A_1に最大有理核がなく，A_2に最小有理核がある．(第２種切断)

（ウ）A_1に最大有理核がなく，A_2に最小有理核がない．(第３種切断)

（エ）A_1に最大有理核があり，A_2に最小有理核がある．(第４種切断)

しかし，定理 4-3 より，有理核の全体$[\boldsymbol{Q}]$は稠密であるので，第４種切断は，実際には存在しない．次に，第１種切断と第２種切断は，端点をどちらに含めるかだけの違いであるので，これからは第１種切断を利用することにする．したがって，今後，拡大切断といえば，第１種切断か第３種切断のことである．

（ⅳ）$A_1{}^+ \neq \phi$ならば正の拡大切断，$A_2{}^- \neq \phi$ならば負の拡大切断，$A_1{}^+ = A_2{}^- = \phi$ならば零の拡大切断(または単に零)という．

（ⅴ）「$A_1 \cap \boldsymbol{Q} \neq \phi$ かつ $A_2 \cap \boldsymbol{Q} \neq \phi$」のとき有限拡大切断，

「$A_1 \cap \boldsymbol{Q} = \phi$ または $A_2 \cap \boldsymbol{Q} = \phi$」のとき無限大拡大切断

という．

補足：無限大拡大切断(A_1, A_2)は，次のいずれかである．

（ア）$A_1 = \{\zeta(-\infty_0)\}$，$A_2 = \{\zeta(x) : \zeta(-\infty_0) < \zeta(x) \leqq \zeta(\infty_0)\}$．

（イ）$A_1 = \{\zeta(x) : \zeta(-\infty_0) \leqq \zeta(x) < \zeta(\infty_0)\}$，$A_2 = \{\zeta(\infty_0)\}$．

（ウ）$A_1 = \phi$，$A_2 = [\boldsymbol{Q}]$．

（エ）$A_1 = [\boldsymbol{Q}]$，$A_2 = \phi$．

ここで，(ア)と(エ)は第１種切断で，(イ)と(ウ)は第２種切断であるので，第３種切断の無限大拡大切断は存在しない．

（ⅵ）$a = (A_1, A_2)$とするとき，$-a = (-A_2, -A_1)$とする．

ただし，aが第１種切断，すなわち，A_1に最大核がある場合は，その最大核をA_2に含めて第２種切断に直し，$(-A_2, -A_1)$が第１種切断になるように操作をするものとする．

$\boxed{6}$ 定義4-1（拡大切断の大小関係）

$a=(A_1,\ A_2)$，$b=(B_1,\ B_2)$とするとき，「$A_1 \subset B_1$，$A_1 \neq B_1$」ならば，bはaより大であるといい，$a<b$ または $b>a$で表す．

補足：定義4-1は，有限拡大切断に限れば，従来の切断の大小関係の定義と同じである．

$\boxed{7}$ 定義4-2（拡大切断の加法）

$a=(A_1,\ A_2)$，$b=(B_1,\ B_2)$で，

$$\bigcup_{\zeta(x1)\in A2,\ \zeta(x2)\in B2}\{\zeta(x_1)+\zeta(x_2)\}=C_2$$

とするとき，切断$c=(C_1,\ C_2)$を，aとbの和といい，$a+b=c$とする．

ただし，$\zeta(\infty_0)$を定義する拡大切断と，$\zeta(-\infty_0)$を定義する拡大切断の加法は，除外する．

補足：定義4-2は，有限拡大切断に限れば，従来の切断の加法の定義と同じである．

例：次の拡大切断a，bを考える．

$a=(A_1,\ A_2)$：$A_1=[\boldsymbol{Q}]$，$A_2=\phi$．

$b=(B_1,\ B_2)$：$B_1=\{\zeta(x):\zeta(x)\leqq\zeta(1)\}$，$B_2=\{\zeta(x):\zeta(1)<\zeta(x)\}$．

このとき，$A_2+B_2=\phi$であるので，$a+b=a$である．ここで，aは$\zeta(\infty_0)$を定義し，bは$\zeta(1)$を定義しているので，$\zeta(\infty_0)+\zeta(1)=\zeta(\infty_0)$である．

補足：次の拡大切断a，bを考える．

$a=(A_1,\ A_2)$：$A_1=[\boldsymbol{Q}]$，$A_2=\phi$．

$b=(B_1,\ B_2)$：$B_1=\{\zeta(-\infty_0)\}$，$B_2=\{\zeta(x):\zeta(-\infty_0)<\zeta(x)\leqq\zeta(\infty_0)\}$．

このとき，$A_2+B_2=\phi$であるので，$a+b=a$でなくてはならないが，$\zeta(\infty_0)+\zeta(-\infty_0)=\zeta(\infty_0)$は成り立たない．

したがって，$\zeta(\infty_0)$と$\zeta(-\infty_0)$の加法は，定義から除外されなくてはならない．

$\boxed{8}$ 定義4-3（拡大切断の乗法）

$a=(A_1,\ A_2)$，$b=(B_1,\ B_2)$を正の拡大切断として，

$$\bigcup_{\zeta(x1)\in A2,\ \zeta(x2)\in B2}\{\zeta(x_1)\zeta(x_2)\}=C_2$$

とするとき，拡大切断$c=(C_1,\ C_2)$を，aとbの積といい，$ab=c$とする．

また，

$(-a)(-b)=ab$，

$a(-b)=(-a)b=-(ab)$，

「tは任意の拡大切断で，0は零の拡大切断」とすれば，$t0=0t=0$

とする．

ただし，「零の拡大切断と，$\zeta(\infty_0)$を定義する拡大切断の乗法」，「零の拡大切断と，$\zeta(-\infty_0)$を定義する拡大切断の乗法」は，拡大切断の乗法の定義から除外する．

補足：定義4-3は，有限拡大切断に限れば，従来の切断の乗法の定義と同じである．

例：次の拡大切断a，bを考える．

$a=(A_1, A_2)$：$A_1=[\boldsymbol{Q}]$，$A_2=\phi$．

$b=(B_1, B_2)$：$B_1=\{\zeta(x):\zeta(x)\leqq\zeta(2)\}$，$B_2=\{\zeta(x):\zeta(2)<\zeta(x)\}$．

このとき，$A_2B_2=\phi$であるので，$a\ b=a$．すなわち，$\zeta(\infty_0)\zeta(2)=\zeta(\infty_0)$．

補足：次の拡大切断a，bを考える．

$a=(A_1, A_2)$：$A_1=\{\zeta(x):\zeta(x)\leqq\zeta(0)\}$，$A_2=\{\zeta(x):\zeta(0)<\zeta(x)\}$．

$b=(B_1, B_2)$：$B_1=[\boldsymbol{Q}]$，$B_2=\phi$．

このとき，$A_2B_2=\phi$であるので，$a\ b=b$でなくてはならないが，$\zeta(0)\zeta(\infty_0)=\zeta(\infty_0)$は成り立たない．したがって，$\zeta(0)$と$\zeta(\infty_0)$の乗法は，定義から除外されなくてはならない．同様に，$\zeta(0)$と$\zeta(-\infty_0)$の乗法も定義から除外されなくてはならない．

$\boxed{9}$ 拡大実数

有理核の拡大切断は，１つの核$\zeta(a)$を定義する．実際，この拡大切断が，

第１種切断ならば，下組の最大有理核を定義する．

第３種切断ならば，新たに，無理核を定義する

と考えることができる．ここで，$\boxed{5}$の（ｖ）の補足より，第３種切断はすべて有限拡大切断であるので，無理核$\zeta(a)$は，有限有理核と同様に，不定数$(a, \Pi_0)=\{(a, y):y\in\Pi_0\}$のことであると考えるのが自然である．以下，若干の用語と記号を定める．

（ⅰ）有理核と無理核を合わせて実核という．

（ⅱ）実核$\zeta(a)$を定義する拡大切断を，斜体文字aで表す．

例えば，無理核$\zeta(\sqrt{2})$を定義する拡大切断は$\sqrt{2}$で表す．

無限大実核$\zeta(\infty_0)$を定義する拡大切断は∞_0で表す．

（ⅲ）有限拡大切断によって定義される実核を有限実核という．

無限大拡大切断によって定義される実核を無限大実核という．

具体的にいえば，有限実核とは，有限有理核と無理核のことであり，

無限大実核とは，無限大有理核のことである．

（ⅳ）正の拡大切断が定義する実核を正の実核という．

負の拡大切断が定義する実核を負の実核という．

零の拡大切断が定義する実核を零の実核(または単に零)という．

（ｖ）有理核の元は拡大有理数であるので，無理核の元を拡大無理数という．

拡大有理数と拡大無理数を合わせて拡大実数という．

（ⅵ）有限実核に属する拡大実数を有界拡大実数という．

$\zeta(0)$以外の有限実核に属する拡大実数と０を合わせて有限拡大実数という．

$\zeta(0)$に属する拡大実数のうち０でないものを無限小拡大実数という．

無限大実核に属する拡大実数を無限大拡大実数という．

（ⅶ）無理核$\zeta(a)$に属するaを，$\zeta(a)$の基という．ただし，$(a, 0)=a$とする．

有理核の基と無理核の基を合わせて実核の基という．

（viii） 無理核の基を無理数といい，有限有理数と無理数を合わせて有限実数という．
　　有限実数すべての集合をRで表す．
（ix） 左有理数と無理数を合わせて左実数という．
　　左実数すべての領域を〈R〉で表す．〈R〉$=\zeta(-\infty_0)\cup \mathrm{R}\cup\zeta(\infty_0)$．
　　右実数は，右有理数のことであるとする．
（x） 拡大実数$(-a,\ -y)$を，$-(a,\ y)$で表す．

例： $A_2=\{\zeta(x)$：xは正の有理核の基で，$x^2>2\}$として，拡大切断$(A_1,\ A_2)$を考えれば，この拡大切断は無理核$\zeta(\sqrt{2})$を定義する．

$\boxed{10}$ 定理4-4

有限実数は，従来の実数と同じ数である．

証明　定義4-1，定義4-2，定義4-3は，有限拡大切断に限れば，それぞれ，従来の切断の大小関係，加法，乗法の定義と同じである■

$\boxed{11}$ 定理4-5

（ｉ） 任意の拡大切断x，yの間には，次のうちの１つだけが成り立つ．

$$x=y,\quad x<y,\quad x>y.$$

（ii） 任意の実核$\zeta(x)$，$\zeta(y)$の間には，次のうちの１つだけが成り立つ．

$$\zeta(x)=\zeta(y),\quad \zeta(x)<\zeta(y),\quad \zeta(x)>\zeta(y).$$

証明（ｉ） $x=(A_{x1},\ A_{x2})$，$y=(A_{y1},\ A_{y2})$とすれば，次の(ア)〜(ウ)のうちの１つだけが成り立つ．

（ア） $A_{x1}=A_{y1}$．
（イ） $A_{x1}\subset A_{y1}$，$A_{x1}\neq A_{y1}$．
（ウ） $A_{x1}\supset A_{y1}$，$A_{x1}\neq A_{y1}$■

（ii） x，yが定義する実核が，それぞれ，$\zeta(x)$，$\zeta(y)$であるので，(ｉ)と(ii)は同値である■

$\boxed{12}$ 定理4-6

（ｉ） x，y，zを拡大切断とすれば，次の関係が成り立つ．

$$x<y,\ y<z\ \text{ならば}\ x<z.$$

（ii） $\zeta(x)$，$\zeta(y)$，$\zeta(z)$を実核とすれば，次の関係が成り立つ．

$$\zeta(x)<\zeta(y),\ \zeta(y)<\zeta(z)\ \text{ならば}\ \zeta(x)<\zeta(z).$$

証明（ｉ） $x=(A_{x1},\ A_{x2})$，$y=(A_{y1},\ A_{y2})$，$z=(A_{z1},\ A_{z2})$とすれば，
仮定「$x<y$，$y<z$」より，

$$A_{x1}\subset A_{y1},\ A_{x1}\neq A_{y1}.$$
$$A_{y1}\subset A_{z1},\ A_{y1}\neq A_{z1}.$$
$$\therefore\ A_{x1}\subset A_{z1},\ A_{x1}\neq A_{z1}$$■

（ii） x，y，zが定義する実核が，それぞれ，$\zeta(x)$，$\zeta(y)$，$\zeta(z)$であるので，(ｉ)と(ii)は同値である■

$\boxed{13}$ 定義4-4（拡大実数の相等関係）

拡大実数$\mu \in \zeta(a)$，$\nu \in \zeta(b)$において，$a = b$とする．このとき，μ，νは，ともに有界拡大実数か，ともに無限大拡大実数であるので，次の①，②のいずれかが成り立つとき，μとνは等しいといい，$\mu = \nu$ または $\nu = \mu$で表す．

有界拡大実数のときは，$\mu = (a,\ y_1)$，$\nu = (a,\ y_2)$として，$y_1 = y_2$　・・・①

無限大拡大実数のときは，$\mu = (x_1,\ 0)$，$\nu = (x_2,\ 0)$として，$x_1 = x_2$　・・・②

$\boxed{14}$ 定義4-5（拡大実数の大小関係）

拡大実数$\mu \in \zeta(a)$，$\nu \in \zeta(b)$において，次の①，②，③のいずれかが成り立つとき，μはνより大であるといい，$\mu > \nu$ または $\nu < \mu$で表す．

$a > b$　・・・①

$a = b$の場合は，μ，νは，ともに有界拡大実数か，ともに無限大拡大実数であるので，

有界拡大実数のときは，$\mu = (a,\ y_1)$，$\nu = (a,\ y_2)$として，$y_1 > y_2$　・・・②

無限大拡大実数のときは，$\mu = (x_1,\ 0)$，$\nu = (x_2,\ 0)$として，$x_1 > x_2$　・・・③

例：$\sqrt{3} > \sqrt{2}$であるので，$(\sqrt{3},\ 1/\infty_\alpha) > (\sqrt{2},\ 1/\infty_\beta)$．

例：$\sqrt{2} = \sqrt{2}$であるので，$\alpha < \beta$ならば，$(\sqrt{2},\ 1/\infty_\alpha) > (\sqrt{2},\ 1/\infty_\beta)$．

例：$\infty_0 > \sqrt{2}$であるので，$(\infty_\alpha,\ 0) > (\sqrt{2},\ 1/\infty_\beta)$．

例：$\infty_0 > -\infty_0$であるので，$(\infty_\alpha,\ 0) > (-\infty_\beta,\ 0)$．

例：$\infty_0 = \infty_0$であるので，$\alpha > \beta$ならば，$(\infty_\alpha,\ 0) > (\infty_\beta,\ 0)$．

$\boxed{15}$ 定理4-7

任意の拡大実数μ，νの間には，次のうちの１つだけが成り立つ．

$$\mu = \nu, \quad \mu < \nu, \quad \mu > \nu.$$

証明　$\mu \in \zeta(a)$，$\nu \in \zeta(b)$とする．定理4-5の(i)より，

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b$$

のうちの１つだけが成り立つ．

(i) $a < b$の場合は，$\mu < \nu$である．

(ii) $a > b$の場合は，$\mu > \nu$である．

(iii) $a = b$の場合は，μ，νは，ともに有界拡大実数か，ともに無限大拡大実数である．

(ア) 有界拡大実数のときは，$\mu = (a,\ y_1)$，$\nu = (a,\ y_2)$とすれば，定理2-6より，

$$y_1 = y_2, \quad y_1 < y_2, \quad y_1 > y_2$$

のうちの１つだけが成り立つので，

$$\mu = \nu, \quad \mu < \nu, \quad \mu > \nu$$

のうちの１つだけが成り立つ．

(イ) 無限大拡大実数のときは，$\mu = (x_1,\ 0)$，$\nu = (x_2,\ 0)$とすれば，定理2-6より，

$$x_1 = x_2, \quad x_1 < x_2, \quad x_1 > x_2$$

のうちの１つだけが成り立つので，

$$\mu = \nu, \quad \mu < \nu, \quad \mu > \nu$$

のうちの１つだけが成り立つ■

$\boxed{16}$ 定理4-8

μ，ν，ξを拡大実数とすれば，「$\mu<\nu$，$\nu<\xi$ ならば $\mu<\xi$」が成り立つ．

証明　$\mu\in\zeta(a)$，$\nu\in\zeta(b)$，$\xi\in\zeta(c)$とする．

（ｉ）仮定$\mu<\nu$より，次の(ア)～(ウ)のいずれかが成り立つ．

$a<b$　・・・(ア)

$a=b$の場合は，μ，νは，ともに有界拡大実数か，ともに無限大拡大実数であるので，

有界拡大実数のときは，$\mu=(a, y_1)$，$\nu=(a, y_2)$として，$y_1<y_2$　・・・(イ)

無限大拡大実数のときは，$\mu=(x_1, 0)$，$\nu=(x_2, 0)$として，$x_1<x_2$　・・・(ウ)

（ii）仮定$\nu<\xi$より，次の(エ)～(カ)のいずれかが成り立つ．

$b<c$　・・・(エ)

$b=c$の場合は，ν，ξは，ともに有界拡大実数か，ともに無限大拡大実数であるので，

有界拡大実数のときは，$\nu=(c, y_2)$，$\xi=(c, y_3)$として，$y_2<y_3$　・・・(オ)

無限大拡大実数のときは，$\nu=(x_2, 0)$，$\xi=(x_3, 0)$として，$x_2<x_3$　・・・(カ)

したがって，考えられる組み合わせは次の９通りである．

① (ア)と(エ)の場合は，定理4-6の(ｉ)より，$a<c$であるので，$\mu<\xi$である．

② (ア)と(オ)の場合は，$a<c$であるので，$\mu<\xi$である．

③ (ア)と(カ)の場合は，$a<c$であるので，$\mu<\xi$である．

④ (イ)と(エ)の場合は，$a<c$であるので，$\mu<\xi$である．

⑤ (イ)と(オ)の場合は，

$a=c$で，定理2-7の(ii)より，$y_1<y_3$であるので，$\mu<\xi$である．

⑥ (イ)と(カ)の場合は，あり得ない．

⑦ (ウ)と(エ)の場合は，$a<c$であるので，$\mu<\xi$である．

⑧ (ウ)と(オ)の場合は，あり得ない．

⑨ (ウ)と(カ)の場合は，

$a=c$で，定理2-7の(ｉ)より，$x_1<x_3$であるので，$\mu<\xi$である■

$\boxed{17}$ 定義4-6（拡大実数の原始加法）

次の２種類の加法を拡大実数の原始加法といい，演算記号は$\oplus$を用いる．ただし，拡大実数μと$-\nu$の原始加法$\mu\oplus(-\nu)$は，$\mu\ominus\nu$と表すこともある．

（ｉ）左有理数と左有理数の加法．（定義2-7を用いる）

（ii）(a, y_1)，(b, y_2)を有界拡大実数とすれば，

$$(a, y_1)\oplus(b, y_2)=(a+b, y_1+y_2)$$

とする．（定理4-4，定義2-9を用いる）

例：$(1, 1/\infty_0)\oplus(\sqrt{2}, 1/\infty_1)=(1+\sqrt{2}, 1/\infty_0)$．

補足：定義4-6の(ｉ)と(ii)が矛盾することはない．（定義3-3の補足参照）

$\boxed{18}$ 定義4-7（拡大実数の加法）

μ，νを拡大実数とするとき，

$$\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\quad \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\quad \sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$$

となる拡大実数σ_1，σ_2，τ_1，τ_2が存在するならば，

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \oplus \tau_1) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \oplus \tau_1),\ \chi \text{は拡大実数}\}$$

を，μとνの和といい，

$$\mu + \nu = \{\chi : \min(\sigma_1 \oplus \tau_1) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \oplus \tau_1),\ \chi \text{は拡大実数}\}$$

とする．

例：$\mu = \infty_0$，$\nu = (\sqrt{\ }2,\ 1/\infty_1)$において，

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \infty_0,\qquad \tau_1 = 1,\ \tau_2 = 2$$

とすれば，

$$\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\quad \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\quad \sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2 = \infty_0$$

であり，

$$\min(\sigma_1 \oplus \tau_1) = \max(\sigma_1 \oplus \tau_1) = \infty_0$$

であるので，

$$\infty_0 + (\sqrt{\ }2,\ 1/\infty_1) = \infty_0.$$

例：$\mu = \infty_\alpha$，$\nu = -\infty_\alpha$において，

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \infty_\alpha,\qquad \tau_1 = \tau_2 = -\infty_\alpha$$

とすれば，

$$\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\quad \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\quad \sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2 = \underline{\boldsymbol{\Theta}}_\alpha$$

であり，

$$\min(\sigma_1 \oplus \tau_1) = -\infty_\alpha,\qquad \max(\sigma_1 \oplus \tau_1) = \infty_\alpha$$

であるので，

$$\infty_\alpha - \infty_\alpha = \{\chi : -\infty_\alpha \leqq \chi \leqq \infty_\alpha,\ \chi \text{は拡大実数}\}.$$

ここで，$\{\chi : -\infty_\alpha \leqq \chi \leqq \infty_\alpha,\ \chi$は拡大実数$\}$は，$\underline{\underline{\boldsymbol{\Theta}}}_\alpha$と「拡大無理数すべての領域」の和領域であるが，この領域を$\boldsymbol{\Theta}_\alpha$で表す．すなわち，

$$\boldsymbol{\Theta}_\alpha = \{\chi : -\infty_\alpha \leqq \chi \leqq \infty_\alpha,\ \chi \text{は拡大実数}\}$$

であり，

$$\infty_\alpha - \infty_\alpha = \boldsymbol{\Theta}_\alpha$$

と記す．$\boldsymbol{\Theta}_\alpha$は，第１章で使用した記号と同じであるので，混乱しないように留意して用いる．

$\boxed{19}$ 定理4-9（拡大実数の加法の一意性を証明するための予備定理１）

「$\sigma_1 < \sigma_2$，$\tau_1 < \tau_2$ ならば $\sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$」となることはない．

証明　定義3-3「拡大有理数の原始加法」と定義4-6「拡大実数の原始加法」の相違は，定義3-3の(ⅱ)で用いられている有界拡大有理数の代わりに，定義4-6の(ⅱ)では，有界拡大実数が用いられていることだけである．また，定理4-4より，有限実数は従来の実数と同じ数であるので，定理4-9は，定理3-2と同様に証明される■

$\boxed{20}$ 定理4-10（拡大実数の加法の一意性を証明するための予備定理２）

$\sigma_1 = \sigma_2$，$\tau_1 < \tau_2$，$\sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$ ならば，次のいずれかが成り立つ．

（ⅰ）$\sigma_1 = \sigma_2 = \infty_\alpha$ かつ τ_1，$\tau_2 \in (\underline{\Theta}_\alpha]$．

（ⅱ）$\sigma_1 = \sigma_2 = -\infty_\alpha$ かつ τ_1，$\tau_2 \in [\underline{\Theta}_\alpha)$．

（ⅲ）$\sigma_1 = \sigma_2 = (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$ かつ τ_1，$\tau_2 \in (x_\tau,\ (\Pi_\alpha])$．

（ⅳ）$\sigma_1 = \sigma_2 = (x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$ かつ τ_1，$\tau_2 \in (x_\tau,\ [\Pi_\alpha))$．

ただし，

x_σ，x_τ は有限実数．

$(\underline{\Theta}_\alpha] = \underline{\Theta}_\alpha - \{-\infty_\alpha\}$，　$[\underline{\Theta}_\alpha) = \underline{\Theta}_\alpha - \{\infty_\alpha\}$．

$(\Pi_\alpha] = \Pi_\alpha - \{-1/\infty_\alpha\}$，　$[\Pi_\alpha) = \Pi_\alpha - \{1/\infty_\alpha\}$

であり，

$(\underline{\Theta}_\alpha]$，　$[\underline{\Theta}_\alpha)$，　$(x_\tau,\ (\Pi_\alpha])$，　$(x_\tau,\ [\Pi_\alpha))$

は，それぞれ，

∞_α，　$-\infty_\alpha$，　$(x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$，　$(x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$

の原始加法に関する吸収範囲という．

証明　定理3-3と同様に証明される■

$\boxed{21}$ 定理4-11（拡大実数の加法の一意性を証明するための予備定理３）

μ，ν を拡大実数として，次の（＊１）～（＊３）が成り立つとする．

$\sigma_{11} \leqq \mu \leqq \sigma_{12}$，$\tau_{11} \leqq \nu \leqq \tau_{12}$ で，$\sigma_{11} \oplus \tau_{11} = \sigma_{12} \oplus \tau_{12}$．　（＊１）

$\sigma_{21} \leqq \mu \leqq \sigma_{22}$，$\tau_{21} \leqq \nu \leqq \tau_{22}$ で，$\sigma_{21} \oplus \tau_{21} = \sigma_{22} \oplus \tau_{22}$．　（＊２）

$\sigma_{11} = \sigma_{12}$，$\tau_{11} < \tau_{12}$．　（＊３）

このとき，

（ア）$\mu = \nu = \infty_\alpha$，

（イ）$\mu = \nu = -\infty_\alpha$，

（ウ）$\mu = (x_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$ かつ $\mu = (x_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$，

（エ）$\mu = (x_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$ かつ $\nu = (x_\tau,\ -1/\infty_\alpha)$

の４通りの場合（この４通りの場合を（＊４）で表す）以外の場合で，

$\sigma_{21} < \sigma_{22}$，$\tau_{21} = \tau_{22}$　（＊５）

となることはない．ただし，x_σ，x_τ は有限実数とする．

証明　定理3-4と同様に証明される■

$\boxed{22}$ 定理4-12（拡大実数の加法の一意性）

μ，ν を拡大実数として，次の（＊１），（＊２）が成り立つとする．

$\sigma_{11} \leqq \mu \leqq \sigma_{12}$，$\tau_{11} \leqq \nu \leqq \tau_{12}$ で，$\sigma_{11} \oplus \tau_{11} = \sigma_{12} \oplus \tau_{12}$．　（＊１）

$\sigma_{21} \leqq \mu \leqq \sigma_{22}$，$\tau_{21} \leqq \nu \leqq \tau_{22}$ で，$\sigma_{21} \oplus \tau_{21} = \sigma_{22} \oplus \tau_{22}$．　（＊２）

このとき，$\sigma_{11} \oplus \tau_{11} = \sigma_{21} \oplus \tau_{21}$ が成り立つ．

証明　定理3-5と同様に証明される■

補足：μ，νを拡大実数として，

$$\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\quad \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\quad \sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2$$

となるならば，

$$\sigma_1 \oplus \tau_1 = \sigma_1 \oplus \tau_2 = \sigma_2 \oplus \tau_1 = \sigma_2 \oplus \tau_2 \quad (*)$$

である．

実際，定理4-9より，$\sigma_1 = \sigma_2$，$\tau_1 = \tau_2$の少なくとも片方は成り立つ．どちらでも同じことであるので$\sigma_1 = \sigma_2$とする．

ここで，$\tau_1 = \tau_2$ならば明らかに(＊)が成り立ち，$\tau_1 < \tau_2$ならば定理4-10より(＊)が成り立つ．

補足：拡大実数の加法は，拡大実数の原始加法の拡張である．

実際，$\mu \leqq \mu \leqq \mu$，$\nu \leqq \nu \leqq \nu$で，$\mu \oplus \nu$が存在する場合を考えると，$\mu \oplus \nu$は，

$$\text{確定数},\quad (a,\ \Pi_\alpha),\quad \underline{\mathbf{\Theta}}_\alpha$$

のいずれかである（aは有限実数）が，$\mu \oplus \nu \neq \underline{\mathbf{\Theta}}_\alpha$ならば，

$$\mu + \nu = \{\chi : \min(\mu \oplus \nu) \leqq \chi \leqq \max(\mu \oplus \nu),\ \chi\text{は拡大実数}\} = \mu \oplus \nu$$

である．そして，$\mu \oplus \nu = \underline{\mathbf{\Theta}}_\alpha$ならば，

$$\mu + \nu = \{\chi : \min(\mu \oplus \nu) \leqq \chi \leqq \max(\mu \oplus \nu),\ \chi\text{は拡大実数}\} = \Theta_\alpha$$

であるが，これは数の拡張にともなう変化であるので，拡大実数の原始加法は，拡大実数の加法の特殊な場合と考えることができる．

$\boxed{23}$ 定義4-8（拡大実数の原始乗法）

次の２種類の乗法を拡大実数の原始乗法といい，演算記号は⊗を用いる．

（ⅰ）「正の有理数」と「正の有理数」の乗法．（定義2-5を用いる）

（ⅱ）$(a,\ y_1)$，$(b,\ y_2)$を正の有限拡大実数とすれば，

$$(a,\ y_1) \otimes (b,\ y_2) = (ab,\ y_1 + y_2)$$

とする．（定理4-4，定義2-9を用いる）

例：$(\sqrt{2},\ 1/\infty_0) \otimes (\sqrt{3},\ 1/\infty_1) = (\sqrt{6},\ 1/\infty_0)$．

補足：定義4-8の（ⅰ）と（ⅱ）が矛盾することはない．（定義3-5の補足参照）

$\boxed{24}$ 定義4-9（拡大実数の乗法）

μ，ν を正の拡大実数とするとき，

$$0 < \sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\quad 0 < \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\quad \sigma_1 \otimes \tau_1 = \sigma_2 \otimes \tau_2$$

となる正の拡大実数 σ_1，σ_2，τ_1，τ_2 が存在するならば，

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \otimes \tau_1) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \otimes \tau_1),\ \chi \text{は拡大実数}\}$$

を，μ と ν の積といい，

$$\mu\nu = \{\chi : \min(\sigma_1 \otimes \tau_1) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \otimes \tau_1),\ \chi \text{は拡大実数}\}$$

とする．また，

$$\mu(-\nu) = (-\mu)\nu = -(\mu\nu),$$

$$(-\mu)(-\nu) = \mu\nu,$$

任意の拡大実数を ξ とすれば，$\xi 0 = 0 \xi = 0$

とする．

例：$\mu = \infty_\alpha$，$\nu = 1/\infty_\alpha$ において，

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \infty_\alpha,\qquad \tau_1 = \tau_2 = 1/\infty_\alpha$$

とすれば，

$$\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\quad \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\qquad \sigma_1 \otimes \tau_1 = \sigma_2 \otimes \tau_2 = \underline{\Sigma}_\alpha$$

であり，

$$\min(\sigma_1 \otimes \tau_1) = 1/\infty_\alpha,\qquad \max(\sigma_1 \otimes \tau_1) = \infty_\alpha$$

であるので，

$$\infty_\alpha (1/\infty_\alpha) = \{\chi : 1/\infty_\alpha \leqq \chi \leqq \infty_\alpha,\ \chi \text{は拡大実数}\}.$$

ここで，$\{\chi : 1/\infty_\alpha \leqq \chi \leqq \infty_\alpha,\ \chi \text{は拡大実数}\}$ は，$\underline{\underline{\Sigma}}_\alpha$ と「正の拡大無理数全ての領域」の和領域であるが，この領域を Σ_α で表す．すなわち，

$$\Sigma_\alpha = \{\chi : 1/\infty_\alpha \leqq \chi \leqq \infty_\alpha,\ \chi \text{は拡大実数}\}$$

であり，

$$\infty_\alpha (1/\infty_\alpha) = \Sigma_\alpha$$

と記す．

$\boxed{25}$ 定理4-13（拡大実数の乗法の一意性を証明するための予備定理１）

「$0 < \sigma_1 < \sigma_2$，$0 < \tau_1 < \tau_2$ ならば $\sigma_1 \otimes \tau_1 = \sigma_2 \otimes \tau_2$」となることはない．

証明　定義3-5「拡大有理数の原始乗法」と定義4-8「拡大実数の原始乗法」の相違は，定義3-5の（ⅱ）で用いられている有限拡大有理数の代わりに，定義4-8の（ⅱ）では，有限拡大実数が用いられていることだけである．また，定理4-4より，有限実数は従来の実数と同じ数であるので，定理4-13は，定理3-6と同様に証明される■

$\boxed{26}$ 定理4-14（拡大実数の乗法の一意性を証明するための予備定理２）

$0<\sigma_1=\sigma_2$，$0<\tau_1<\tau_2$，$\sigma_1\otimes\tau_1=\sigma_2\otimes\tau_2$ならば，次のいずれかが成り立つ．

（ⅰ）$\sigma_1=\sigma_2=\infty_\alpha$ かつ τ_1，$\tau_2\in(\underline{\Sigma}_\alpha]$.

（ⅱ）$\sigma_1=\sigma_2=1/\infty_\alpha$ かつ τ_1，$\tau_2\in[\underline{\Sigma}_\alpha)$.

（ⅲ）$\sigma_1=\sigma_2=(a_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$ かつ τ_1，$\tau_2\in(a_\tau,\ (\Pi_\alpha])$.

（ⅳ）$\sigma_1=\sigma_2=(a_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$ かつ τ_1，$\tau_2\in(a_\tau,\ [\Pi_\alpha))$.

ただし，

a_σ，a_τは正の有限実数.

$(\underline{\Sigma}_\alpha]=\underline{\Sigma}_\alpha-\{1/\infty_\alpha\}$，　$[\underline{\Sigma}_\alpha)=\underline{\Sigma}_\alpha-\{\infty_\alpha\}$

であり，

$(\underline{\Sigma}_\alpha]$，　$[\underline{\Sigma}_\alpha)$，　$(a_\tau,\ (\Pi_\alpha])$，　$(a_\tau,\ [\Pi_\alpha))$

は，それぞれ，

∞_α，　$1/\infty_\alpha$，　$(a_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$，　$(a_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$

の原始乗法に関する吸収範囲という．

証明　定理3-7と同様に証明される■

$\boxed{27}$ 定理4-15（拡大実数の乗法の一意性を証明するための予備定理３）

μ，νを拡大実数として，次の(＊１)～(＊３)が成り立つとする．

$0<\sigma_{11}\leqq\mu\leqq\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}\leqq\nu\leqq\tau_{12}$で，$\sigma_{11}\otimes\tau_{11}=\sigma_{12}\otimes\tau_{12}$．(＊１)

$0<\sigma_{21}\leqq\mu\leqq\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}\leqq\nu\leqq\tau_{22}$で，$\sigma_{21}\otimes\tau_{21}=\sigma_{22}\otimes\tau_{22}$．(＊２)

$0<\sigma_{11}=\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}<\tau_{12}$．　(＊３)

このとき，

（ア）$\mu=\nu=\infty_\alpha$，

（イ）$\mu=\nu=1/\infty_\alpha$，

（ウ）$\mu=(a_\sigma,\ 1/\infty_\alpha)$ かつ $\nu=(a_\tau,\ 1/\infty_\alpha)$，

（エ）$\mu=(a_\sigma,\ -1/\infty_\alpha)$ かつ $\nu=(a_\tau,\ -1/\infty_\alpha)$

の４通りの場合（この４通りの場合を(＊４)で表す）以外の場合で，

$0<\sigma_{21}<\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}=\tau_{22}$　(＊５)

となることはない．ただし，a_σ，a_τは正の有限実数とする．

証明　定理3-8と同様に証明される■

$\boxed{28}$ 定理4-16（拡大実数の乗法の一意性）

μ，νを正の拡大実数として，次の(＊１)，(＊２)が成り立つとする．

$0<\sigma_{11}\leqq\mu\leqq\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}\leqq\nu\leqq\tau_{12}$で，$\sigma_{11}\otimes\tau_{11}=\sigma_{12}\otimes\tau_{12}$．(＊１)

$0<\sigma_{21}\leqq\mu\leqq\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}\leqq\nu\leqq\tau_{22}$で，$\sigma_{21}\otimes\tau_{21}=\sigma_{22}\otimes\tau_{22}$．(＊２)

このとき，$\sigma_{11}\otimes\tau_{11}=\sigma_{21}\otimes\tau_{21}$が成り立つ．

証明　定理3-9と同様に証明される■

補足：μ，νを正の拡大実数として，

$$0<\sigma_1\leqq\mu\leqq\sigma_2,\quad 0<\tau_1\leqq\nu\leqq\tau_2,\quad \sigma_1\otimes\tau_1=\sigma_2\otimes\tau_2$$

となるならば，

$$\sigma_1\otimes\tau_1=\sigma_1\otimes\tau_2=\sigma_2\otimes\tau_1=\sigma_2\otimes\tau_2 \qquad (*)$$

である．

実際，定理4-13より，$\sigma_1=\sigma_2$，$\tau_1=\tau_2$の少なくとも片方は成り立つ．どちらでも同じことであるので$\sigma_1=\sigma_2$とする．

ここで，$\tau_1=\tau_2$ならば，明らかに$(*)$が成り立ち，$\tau_1<\tau_2$ならば，定理4-14より$(*)$が成り立つ．

補足：拡大実数の乗法は，拡大実数の原始乗法の拡張である．

実際，$0<\mu\leqq\mu\leqq\mu$，$0<\nu\leqq\nu\leqq\nu$で，$\mu\otimes\nu$が存在する場合を考えると，$\mu\otimes\nu$は，

$$\text{確定数}，\quad (a, \Pi_\alpha)，\quad \underline{\Sigma}_\alpha$$

のいずれかである（aは正の有限実数）が，$\mu\otimes\nu\neq\underline{\Sigma}_\alpha$ならば，

$$\mu\,\nu=\{\chi : \min(\mu\otimes\nu)\leqq\chi\leqq\max(\mu\otimes\nu)\ ,\ \chi\text{は拡大実数}\}=\mu\otimes\nu$$

である．そして，$\mu\otimes\nu=\underline{\Sigma}_\alpha$ならば，

$$\mu\,\nu=\{\chi : \min(\mu\otimes\nu)\leqq\chi\leqq\max(\mu\otimes\nu)\ ,\ \chi\text{は拡大実数}\}=\Sigma_\alpha$$

であるが，これは数の拡張にともなう変化であるので，拡大実数の原始乗法は，拡大実数の乗法の特殊な場合と考えることができる．

補足：拡大実数(a, y)は，その加法の定義より，

$$(a, y)=(a, 0)+(0, y)=a+y$$

と表すことができる．従って，$\zeta(a)$が無理核の場合も，

$$\zeta(a)=a+\Pi_0$$

である．

補足：次章からは，例えば，

$$\text{領域}\{\chi : \min(\mu\otimes\nu)\leqq\chi\leqq\max(\mu\otimes\nu),\ \chi\text{は拡大実数}\}$$

を表記する場合，条件「χは拡大実数」は省略して，

$$\{\chi : \min(\mu\otimes\nu)\leqq\chi\leqq\max(\mu\otimes\nu)\}$$

のように記す．すなわち，その領域の母領域が明記されていない場合は，拡大実数の全体を母領域と考えるものとする．

第５章　拡大実数の演算法則

$\boxed{1}$ 初めに，若干の記号を定める．

（ｉ）特別な領域を表す記号

D：拡大実数すべての領域．

W：順序数すべての領域．

（ⅱ）Dの部分領域Sに属する正数すべての領域を，S^+で表す．

Dの部分領域Sに属する負数すべての領域を，S^-で表す．

例：$\langle R\rangle^+ = R^+ \cup \zeta(\infty_0)$．

$\Pi_0{}^-$は負の無限小拡大実数すべての領域を表す．

（ⅲ）領域$S=\{x : a \leqq x \leqq b\}$における，記号$(S]$，$[S)$，$(S)$の意味を，それぞれ，次のように約束する．

$$(S] = S - \{a\}.$$
$$[S) = S - \{b\}.$$
$$(S) = S - \{a,\ b\}.$$

例：$(\Theta_\alpha] = \Theta_\alpha - \{-\infty_\alpha\}$．

$[\Theta_\alpha) = \Theta_\alpha - \{\infty_\alpha\}$．

$(\Theta_\alpha) = \Theta_\alpha - \{-\infty_\alpha,\ \infty_\alpha\}$．

$\boxed{2}$ 拡大実数の加法と乗法の計算公式を列記する．

（ア）$r \in (\Theta_0)$ならば，$r + (\Theta_0) = (\Theta_0)$．

（イ）$(\Theta_0) + (\Theta_0) = (\Theta_0)$．

（ウ）$r \in (\Theta_\alpha]$ならば，$r + \infty_\alpha = \infty_\alpha$．

（エ）$r \in [\Theta_\alpha)$ならば，$r - \infty_\alpha = -\infty_\alpha$．

（オ）$\infty_\alpha - \infty_\alpha = \Theta_\alpha$．

（カ）$r \notin \Theta_\alpha$ならば，$r + \Theta_\alpha = r$．

$r \in \Theta_\alpha$ならば，$r + \Theta_\alpha = \Theta_\alpha$．

（キ）$\Theta_\alpha + \Theta_\beta = \Theta_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$．

（ク）$r \in (\Pi_\alpha]$ならば，$r + 1/\infty_\alpha = 1/\infty_\alpha$．

（ケ）$r \in [\Pi_\alpha)$ならば，$r - (1/\infty_\alpha) = -1/\infty_\alpha$．

（コ）$1/\infty_\alpha - (1/\infty_\alpha) = \Pi_\alpha$．

（サ）rが右実数で，$r \notin \Pi_\alpha$ならば，$r + \Pi_\alpha = r$．

rが右実数で，$r \in \Pi_\alpha$ならば，$r + \Pi_\alpha = \Pi_\alpha$．

（シ）$\Pi_\alpha + \Pi_\beta = \Pi_{\min\{\alpha,\ \beta\}}$．

（ス）$r \in (\Sigma_0)$ならば，$r(\Sigma_0) = (\Sigma_0)$．

（セ）$(\Sigma_0)(\Sigma_0) = (\Sigma_0)$．

（ソ）$r \in (\Sigma_\alpha]$ならば，$r\infty_\alpha = \infty_\alpha$．

(タ) $r\in[\Sigma_\alpha)$ならば，$r(1/\infty_\alpha)=1/\infty_\alpha$.

(チ) $\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)=\Sigma_\alpha$.

(ツ) $r\notin\Sigma_\alpha$，$r>0$ならば，$r\Sigma_\alpha=r$.

$r\in\Sigma_\alpha$ならば，$r\Sigma_\alpha=\Sigma_\alpha$.

(テ) $\Sigma_\alpha\Sigma_\beta=\Sigma_{\max\{\alpha,\beta\}}$.

(ト) $\Sigma_\gamma-(1/\infty_\alpha)=\begin{cases}\Sigma_\gamma & (\gamma<\alpha),\\ \Sigma_\gamma\cup\Pi_\alpha & (\gamma\geqq\alpha).\end{cases}$

(ナ) $\infty_\gamma\Pi_\alpha=\begin{cases}\Pi_\alpha & (\gamma<\alpha),\\ \Theta_\gamma & (\gamma\geqq\alpha).\end{cases}$

(ニ) $(1/\infty_\gamma)\Theta_\alpha=\begin{cases}\Theta_\alpha & (\gamma\leqq\alpha),\\ \Pi_\gamma & (\gamma>\alpha).\end{cases}$

(ヌ) $(1/\infty_\gamma)\Pi_\alpha=\begin{cases}\Pi_\alpha & (\gamma<\alpha),\\ \Pi_\gamma & (\gamma\geqq\alpha).\end{cases}$

$\boxed{3}$ 定理5-1（加法の交換法則）

μ，νを拡大実数とすれば，$\mu+\nu=\nu+\mu$が成り立つ.

証明　定義4-6より，拡大実数の原始加法は，

（ｉ）左有理数と左有理数の加法，

（ⅱ）有界拡大実数と有界拡大実数の加法

の２種類であるが，定理2-20，定理2-23，定理4-4より，原始加法は交換法則が成り立つので，定理は成り立つ■

$\boxed{4}$ 定理5-2（加法の結合法則を証明するための予備定理１）

μ，ν，ξを拡大実数とするとき，

$$\sigma_1\leqq\mu\leqq\sigma_2,\quad \tau_1\leqq\nu\leqq\tau_2,\quad \upsilon_1\leqq\xi\leqq\upsilon_2,$$
$$(\sigma_1\oplus\tau_1)\oplus\upsilon_1=(\sigma_2\oplus\tau_2)\oplus\upsilon_2$$

となる拡大実数σ_1，σ_2，τ_1，τ_2，υ_1，υ_2が存在するならば，

$$(\mu+\nu)+\xi=\{\chi:\min((\sigma_1\oplus\tau_1)\oplus\upsilon_1)\leqq\chi\leqq\max((\sigma_1\oplus\tau_1)\oplus\upsilon_1)\}\quad (*)$$

が成り立つ.

証明（ｉ）$\sigma_1\oplus\tau_1=\sigma_2\oplus\tau_2$の場合：

$\sigma_1\oplus\tau_1$は，aを有限実数とすれば，次のいずれかである.

（ア）確定数　（イ）$a+\Pi_\alpha$　（ウ）$\underline{\Theta}_\alpha$

(ア)のときは，

$\sigma_1\oplus\tau_1$が確定数より，$\mu+\nu$も確定数となり，$\mu+\nu=\sigma_1\oplus\tau_1$であるので，加法の定義より，(＊)を得る.

(イ)のときは，

$\sigma_1 \oplus \tau_1 = a + \Pi_\alpha$であるので，$\mu + \nu = a + \Pi_\alpha$である．

ここで，ξを無限大拡大実数とすれば，υ_1とυ_2の少なくとも片方は，無限大拡大実数でなくてはならないので，原始加法 $(\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1$と$(\sigma_2 \oplus \tau_2) \oplus \upsilon_2$の少なくとも片方は定義されていない．したがって，$\xi$は有界拡大実数であるので，

$$\xi = b + y,$$

b は有限実数，「$y = 0$またはy_β」(y_βは，$1/\infty_\beta$または$-1/\infty_\beta$を表す)

とおくことができる．このとき，

$$(\mu + \nu) + \xi = (a + b) + y_\beta \quad (\alpha > \beta),$$

$$(\mu + \nu) + \xi = (a + b) + \Pi_\alpha \quad (y = 0 \text{ または } \alpha \leqq \beta)$$

を得る．また，

$$\upsilon_1 \leqq \xi = b + y \leqq \upsilon_2, \quad (a + \Pi_\alpha) \oplus \upsilon_1 = (a + \Pi_\alpha) \oplus \upsilon_2$$

ならば，考えられる場合は，

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = b + y_\beta \quad (\alpha > \beta) \qquad \cdots ①$$

$$\upsilon_1, \ \upsilon_2 \in b + \Pi_\alpha \quad (y = 0 \text{ または } \alpha \leqq \beta) \quad \cdots ②$$

だけであるが，

①の場合は，$(\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1 = (a + b) + y_\beta$.

②の場合は，$(\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1 = (a + b) + \Pi_\alpha$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1)\}$$
$$= (a + b) + y_\beta \quad (\alpha > \beta),$$

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1)\}$$
$$= (a + b) + \Pi_\alpha \quad (y = 0 \text{ または } \alpha \leqq \beta)$$

を得る．

(ウ)のときは，

$\sigma_1 \oplus \tau_1 = \underline{\Theta}_\alpha$であるので，$\mu + \nu = \Theta_\alpha$である．したがって，

$$(\mu + \nu) + \xi = \xi \quad (\xi \notin \Theta_\alpha),$$

$$(\mu + \nu) + \xi = \Theta_\alpha \quad (\xi \in \Theta_\alpha)$$

を得る．また，

$$\upsilon_1 \leqq \xi \leqq \upsilon_2, \quad \underline{\Theta}_\alpha \oplus \upsilon_1 = \underline{\Theta}_\alpha \oplus \upsilon_2$$

ならば，考えられる場合は，

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = b_\beta \ (\alpha < \beta, \ b_\beta \text{は} \infty_\beta \text{または} -\infty_\beta \text{を表す}) \quad \cdots ①$$

$$\upsilon_1, \ \upsilon_2 \in \underline{\Theta}_\alpha \quad \cdots ②$$

だけであるが，

①の場合は，$(\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1 = b_\beta = \xi$.

②の場合は，$(\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1 = \underline{\Theta}_\alpha$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1)\} = \xi \quad (\xi \notin \Theta_\alpha),$$

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1)\} = \Theta_\alpha \quad (\xi \in \Theta_\alpha)$$

を得る．

（ⅱ） $\sigma_1 \oplus \tau_1 \neq \sigma_2 \oplus \tau_2$の場合：

$\sigma_1 \oplus \tau_1 \neq \sigma_2 \oplus \tau_2$で，$(\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1 = (\sigma_2 \oplus \tau_2) \oplus \upsilon_2$となるのは，次のときだけである．（∵定理4-10）

（ア）「$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \infty_\beta$」で，

$\sigma_1 \oplus \tau_1$，$\sigma_2 \oplus \tau_2$が，「$(\underline{\Theta}_\beta]$の元 または $\underline{\Theta}_\alpha(\alpha < \beta)$」．

（イ）「$\upsilon_1 = \upsilon_2 = -\infty_\beta$」で，

$\sigma_1 \oplus \tau_1$，$\sigma_2 \oplus \tau_2$が，「$[\underline{\Theta}_\beta)$の元 または $\underline{\Theta}_\alpha(\alpha < \beta)$」．

（ウ）「$\upsilon_1 = \upsilon_2 = b + (1/\infty_\beta)$」で，

$\sigma_1 \oplus \tau_1$，$\sigma_2 \oplus \tau_2$が，「$a + (\Pi_\beta]$の元 または $a + \Pi_\alpha(\alpha > \beta)$」．

（エ）「$\upsilon_1 = \upsilon_2 = b - (1/\infty_\beta)$」で，

$\sigma_1 \oplus \tau_1$，$\sigma_2 \oplus \tau_2$が，「$a + [\Pi_\beta)$の元 または $a + \Pi_\alpha(\alpha > \beta)$」．

（ア）のときは，

$$(\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1 = (\sigma_2 \oplus \tau_2) \oplus \upsilon_2 = \infty_\beta$$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1)\} = \infty_\beta$$

を得る．また，

$$-\infty_\beta < \min(\sigma_1 \oplus \tau_1) \leqq \mu + \nu \leqq \max(\sigma_2 \oplus \tau_2) \leqq \infty_\beta,\quad \upsilon_1 = \xi = \upsilon_2$$

であるので，

$$-\infty_\beta < \mu + \nu \leqq \infty_\beta,\qquad \xi = \infty_\beta$$

である． ゆえに，$(\mu + \nu) + \xi = \infty_\beta$を得る．

（イ）のときは，

$$(\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1 = (\sigma_2 \oplus \tau_2) \oplus \upsilon_2 = -\infty_\beta$$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1)\} = -\infty_\beta$$

を得る．また，

$$-\infty_\beta \leqq \min(\sigma_1 \oplus \tau_1) \leqq \mu + \nu \leqq \max(\sigma_2 \oplus \tau_2) < \infty_\beta,\quad \upsilon_1 = \xi = \upsilon_2$$

であるので，

$$-\infty_\beta \leqq \mu + \nu < \infty_\beta,\qquad \xi = -\infty_\beta$$

である． ゆえに，$(\mu + \nu) + \xi = -\infty_\beta$を得る．

（ウ）のときは，

$$(\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1 = (\sigma_2 \oplus \tau_2) \oplus \upsilon_2 = a + b + (1/\infty_\beta)$$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1)\} = a + b + (1/\infty_\beta)$$

を得る．また，

$$a - (1/\infty_\beta) < \min(\sigma_1 \oplus \tau_1) \leqq \mu + \nu \leqq \max(\sigma_2 \oplus \tau_2) \leqq a + (1/\infty_\beta),$$

$$\upsilon_1 = \xi = \upsilon_2$$

であるので，

$$a - (1/\infty_\beta) < \mu + \nu \leqq a + (1/\infty_\beta),\qquad \xi = b + (1/\infty_\beta)$$

である．ゆえに，$(\mu + \nu) + \xi = a + b + (1/\infty_\beta)$を得る．

(エ)のときは，

$$(\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1 = (\sigma_2 \oplus \tau_2) \oplus \upsilon_2 = a + b - (1/\infty_\beta)$$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \oplus \tau_1) \oplus \upsilon_1)\} = a + b - (1/\infty_\beta)$$

を得る．また，

$$a - (1/\infty_\beta) \leqq \min(\sigma_1 \oplus \tau_1) \leqq \mu + \nu \leqq \max(\sigma_2 \oplus \tau_2) < a + (1/\infty_\beta),$$

$$\upsilon_1 = \xi = \upsilon_2$$

であるので，

$$a - (1/\infty_\beta) \leqq \mu + \nu < a + (1/\infty_\beta), \quad \xi = b - (1/\infty_\beta)$$

である．ゆえに，$(\mu + \nu) + \xi = a + b - (1/\infty_\beta)$を得る■

$\boxed{5}$ 定理5-3（加法の結合法則を証明するための予備定理２）

μ，ν，ξを拡大実数とするとき，

$$\sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2,\ \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2,\ \upsilon_1 \leqq \xi \leqq \upsilon_2,$$

$$\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1) = \sigma_2 \oplus (\tau_2 \oplus \upsilon_2)$$

となる拡大実数σ_1，σ_2，τ_1，τ_2，υ_1，υ_2が存在するならば，

$$\mu + (\nu + \xi) = \{\chi : \min(\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1)) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1))\} \quad (*)$$

が成り立つ．

証明（ｉ）$\tau_1 \oplus \upsilon_1 = \tau_2 \oplus \upsilon_2$の場合：

$\tau_1 \oplus \upsilon_1$は，ｂを有限実数とすれば，

（ア）確定数　　（イ）$b + \Pi_\beta$　　（ウ）$\underline{\Theta}_\beta$

のいずれかである．

(ア)のときは，

$\tau_1 \oplus \upsilon_1$が確定数より，$\nu + \xi$も確定数となり，$\nu + \xi = \tau_1 \oplus \upsilon_1$であるので，加法の定義より，(＊)を得る．

(イ)のときは，

$\tau_1 \oplus \upsilon_1 = b + \Pi_\beta$であるので，$\nu + \xi = b + \Pi_\beta$である．

ここで，μを無限大拡大実数とすれば，σ_1とσ_2の少なくとも片方は，無限大拡大実数でなくてはならないので，原始加法$\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1)$と$\sigma_2 \oplus (\tau_2 \oplus \upsilon_2)$の少なくとも片方は定義されていない．したがって，$\mu$は有界拡大実数であるので，

$$\mu = a + x,$$

ａは有限実数，「$x = 0$またはx_α」（x_αは，$1/\infty_\alpha$または$-1/\infty_\alpha$を表す）

とおくことができる．このとき，

$$\mu + (\nu + \xi) = (a + b) + x_\alpha \quad (\alpha < \beta),$$

$$\mu + (\nu + \xi) = (a + b) + \Pi_\beta \quad (x = 0 \text{ または } \alpha \geqq \beta)$$

を得る．また，

$$\sigma_1 \leqq \mu = a + x \leqq \sigma_2, \quad \sigma_1 \oplus (b + \Pi_\beta) = \sigma_2 \oplus (b + \Pi_\beta)$$

ならば，考えられる場合は，

$\sigma_1=\sigma_2=a+x_\alpha$ $(\alpha<\beta)$ ・・・①

$\sigma_1,\ \sigma_2\in a+\Pi_\beta$ $(x=0$ または $\alpha\geqq\beta)$ ・・・②

だけであるが，

①の場合は，$\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1)=(a+b)+x_\alpha$.

②の場合は，$\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1)=(a+b)+\Pi_\beta$

であるので，

$$\{\chi:\min(\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1))\leqq\chi\leqq\max(\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1))\}=(a+b)+x_\alpha\quad(\alpha<\beta),$$

$$\{\chi:\min(\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1))\leqq\chi\leqq\max(\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1))\}=(a+b)+\Pi_\beta\quad(x=0\text{ または }\alpha\geqq\beta)$$

を得る．

（ウ）のときは，

$\tau_1\oplus\upsilon_1=\underline{\Theta}_\beta$ であるので，$\nu+\xi=\Theta_\beta$ である．したがって，

$$\mu+(\nu+\xi)=\mu\quad(\mu\notin\Theta_\beta),$$

$$\mu+(\nu+\xi)=\Theta_\beta\quad(\mu\in\Theta_\beta)$$

を得る．また，

$$\sigma_1\leqq\mu\leqq\sigma_2,\quad \sigma_1\oplus\underline{\Theta}_\beta=\sigma_2\oplus\underline{\Theta}_\beta$$

ならば，考えられる場合は，

$\sigma_1=\sigma_2=a_\alpha$ （$\alpha>\beta$，a_α は ∞_α または $-\infty_\alpha$ を表す）・・・①

$\sigma_1,\ \sigma_2\in\underline{\Theta}_\beta$ ・・・②

だけであるが，

①の場合は，$\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1)=a_\alpha=\mu$.

②の場合は，$\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1)=\underline{\Theta}_\beta$

であるので，

$$\{\chi:\min(\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1))\leqq\chi\leqq\max(\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1))\}=\mu\quad(\mu\notin\Theta_\beta),$$

$$\{\chi:\min(\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1))\leqq\chi\leqq\max(\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1))\}=\Theta_\beta\quad(\mu\in\Theta_\beta)$$

を得る．

（ⅱ）$\tau_1\oplus\upsilon_1\neq\tau_2\oplus\upsilon_2$ の場合：

$\tau_1\oplus\upsilon_1\neq\tau_2\oplus\upsilon_2$ で，$\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1)=\sigma_2\oplus(\tau_2\oplus\upsilon_2)$ となるのは，次のときだけである．(∵定理4-10)

（ア）「$\sigma_1=\sigma_2=\infty_\alpha$」で，

$\tau_1\oplus\upsilon_1$，$\tau_2\oplus\upsilon_2$ が，「$(\underline{\Theta}_\alpha]$ の元 または $\underline{\Theta}_\beta(\alpha>\beta)$」．

（イ）「$\sigma_1=\sigma_2=-\infty_\alpha$」で，

$\tau_1\oplus\upsilon_1$，$\tau_2\oplus\upsilon_2$ が，「$[\underline{\Theta}_\alpha)$ の元 または $\underline{\Theta}_\beta(\alpha>\beta)$」．

（ウ）「$\sigma_1=\sigma_2=a+(1/\infty_\alpha)$」で，

$\tau_1\oplus\upsilon_1$，$\tau_2\oplus\upsilon_2$ が，「$b+(\Pi_\alpha]$ の元 または $b+\Pi_\beta(\alpha<\beta)$」．

（エ）「$\sigma_1=\sigma_2=a-(1/\infty_\alpha)$」で，

$\tau_1\oplus\upsilon_1$，$\tau_2\oplus\upsilon_2$ が，「$b+[\Pi_\alpha)$ の元 または $b+\Pi_\beta(\alpha<\beta)$」．

（ア）のときは，

$$\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1) = \sigma_2 \oplus (\tau_2 \oplus \upsilon_2) = \infty_\alpha$$

であるので，

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1)) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1))\} = \infty_\alpha$$

を得る．また，

$$-\infty_\alpha < \min(\tau_1 \oplus \upsilon_1) \leqq \nu + \xi \leqq \max(\tau_2 \oplus \upsilon_2) \leqq \infty_\alpha, \quad \sigma_1 = \mu = \sigma_2$$

であるので，

$$-\infty_\alpha < \nu + \xi \leqq \infty_\alpha, \qquad \mu = \infty_\alpha$$

である． ゆえに，$\mu + (\nu + \xi) = \infty_\alpha$を得る．

（イ）のときは，

$$\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1) = \sigma_2 \oplus (\tau_2 \oplus \upsilon_2) = -\infty_\alpha$$

であるので，

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1)) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1))\} = -\infty_\alpha$$

を得る．また，

$$-\infty_\alpha \leqq \min(\tau_1 \oplus \upsilon_1) \leqq \nu + \xi \leqq \max(\tau_2 \oplus \upsilon_2) < \infty_\alpha, \quad \sigma_1 = \mu = \sigma_2$$

であるので，

$$-\infty_\alpha \leqq \nu + \xi < \infty_\alpha, \qquad \mu = -\infty_\alpha$$

である． ゆえに，$\mu + (\nu + \xi) = -\infty_\alpha$を得る．

（ウ）のときは，

$$\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1) = \sigma_2 \oplus (\tau_2 \oplus \upsilon_2) = a + b + (1/\infty_\alpha)$$

であるので，

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1)) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1))\} = a + b + (1/\infty_\alpha)$$

を得る．また，

$$b - (1/\infty_\alpha) < \min(\tau_1 \oplus \upsilon_1) \leqq \nu + \xi \leqq \max(\tau_2 \oplus \upsilon_2) \leqq b + (1/\infty_\alpha),$$
$$\sigma_1 = \mu = \sigma_2$$

であるので，

$$b - (1/\infty_\alpha) < \nu + \xi \leqq b + (1/\infty_\alpha),$$
$$\mu = a + (1/\infty_\alpha)$$

である．ゆえに，$\mu + (\nu + \xi) = a + b + (1/\infty_\alpha)$を得る．

（エ）のときは，

$$\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1) = \sigma_2 \oplus (\tau_2 \oplus \upsilon_2) = a + b - (1/\infty_\alpha)$$

であるので，

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1)) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \oplus (\tau_1 \oplus \upsilon_1))\} = a + b - (1/\infty_\alpha)$$

を得る．また，

$$b - (1/\infty_\alpha) \leqq \min(\tau_1 \oplus \upsilon_1) \leqq \nu + \xi \leqq \max(\tau_2 \oplus \upsilon_2) < b + (1/\infty_\alpha),$$
$$\sigma_1 = \mu = \sigma_2$$

であるので，

$$b - (1/\infty_\alpha) \leqq \nu + \xi < b + (1/\infty_\alpha),$$
$$\mu = a - (1/\infty_\alpha)$$

である．ゆえに，$\mu + (\nu + \xi) = a + b - (1/\infty_\alpha)$を得る■

$\boxed{6}$ 定理5-4（加法の結合法則）

μ，ν，ξを拡大実数とすれば，$(\mu+\nu)+\xi=\mu+(\nu+\xi)$が成り立つ．

証明　定義4-6より，拡大実数の原始加法は，

（ｉ）左有理数と左有理数の加法，

（ⅱ）有界拡大実数と有界拡大実数の加法

の２種類であるが，定理2-21，定理2-24，定理4-4より，原始加法は結合法則が成り立つ．

したがって，定理5-2，定理5-3より，

$$
\begin{aligned}
(\mu+\nu)+\xi &=\{\chi : \min((\sigma_1\oplus\tau_1)\oplus\upsilon_1)\leqq\chi\leqq\max((\sigma_1\oplus\tau_1)\oplus\upsilon_1)\}\\
&=\{\chi : \min(\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1))\leqq\chi\leqq\max(\sigma_1\oplus(\tau_1\oplus\upsilon_1))\}\\
&=\mu+(\nu+\xi)\blacksquare
\end{aligned}
$$

$\boxed{7}$ 定理5-5（乗法の交換法則）

μ，νを拡大実数とすれば，$\mu\nu=\nu\mu$が成り立つ．

証明　定義4-8より，拡大実数の原始乗法は，

（ｉ）「正の有理数」と「正の有理数」の乗法，

（ⅱ）「正の有限拡大実数」と「正の有限拡大実数」の乗法

であるが，定理2-15の（ｉ），定理2-23，定理4-4より，原始乗法は交換法則が成り立つので，μ，νが正の拡大実数ならば，$\mu\nu=\nu\mu$が成り立つ．したがって，定義4-9より，定理は成り立つ■

$\boxed{8}$ 定理5-6（乗法の結合法則を証明するための予備定理１）

μ，ν，ξを正の拡大実数とするとき，

$$0<\sigma_1\leqq\mu\leqq\sigma_2,\quad 0<\tau_1\leqq\nu\leqq\tau_2,\quad 0<\upsilon_1\leqq\xi\leqq\upsilon_2,$$

$$(\sigma_1\otimes\tau_1)\otimes\upsilon_1=(\sigma_2\otimes\tau_2)\otimes\upsilon_2$$

となる正の拡大実数σ_1，σ_2，τ_1，τ_2，υ_1，υ_2が存在するならば，

$$(\mu\nu)\xi=\{\chi : \min((\sigma_1\otimes\tau_1)\otimes\upsilon_1)\leqq\chi\leqq\max((\sigma_1\otimes\tau_1)\otimes\upsilon_1)\}\quad (*)$$

が成り立つ．

証明（ｉ）$\sigma_1\otimes\tau_1=\sigma_2\otimes\tau_2$の場合：

$\sigma_1\otimes\tau_1$は，ａを正の有限実数とすれば，

（ア）確定数　　（イ）$a+\Pi_\alpha$　　（ウ）$\underline{\Sigma}_\alpha$

のいずれかである．

（ア）のときは，

$\sigma_1\otimes\tau_1$が確定数より，$\mu\nu$も確定数となり，$\mu\nu=\sigma_1\otimes\tau_1$であるので，乗法の定義より，（＊）を得る．

（イ）のときは，

$\sigma_1\otimes\tau_1=a+\Pi_\alpha$であるので，$\mu\nu=a+\Pi_\alpha$である．

ここで，ξを正の無限大拡大実数とすれば，υ_2は正の無限大拡大実数でなくてはならないので，原始乗法$(\sigma_2\otimes\tau_2)\otimes\upsilon_2$は定義されていない．

また，ξを正の無限小拡大実数とすれば，υ_1は正の無限小拡大実数でなくてはならないので，原始乗法$(\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1$は定義されていない．

したがって，ξは正の有限拡大実数であるので，

$$\xi = b + y$$

bは正の有限実数，「$y = 0$またはy_β」（y_βは，$1/\infty_\beta$または$-1/\infty_\beta$を表す）とおくことができる．このとき，

$$(\mu\ \nu)\xi = a\ b + y_\beta \quad (\alpha > \beta),$$
$$(\mu\ \nu)\xi = a\ b + \Pi_\alpha \quad (y = 0 \text{ または } \alpha \leqq \beta)$$

を得る．また，

$$0 < \upsilon_1 \leqq \xi = b + y \leqq \upsilon_2, \quad (a + \Pi_\alpha) \otimes \upsilon_1 = (a + \Pi_\alpha) \otimes \upsilon_2$$

ならば，考えられる場合は，

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = b + y_\beta \quad (\alpha > \beta) \qquad \cdots ①$$
$$\upsilon_1,\ \upsilon_2 \in b + \Pi_\alpha \quad (y = 0 \text{ または } \alpha \leqq \beta) \cdots ②$$

だけであるが，

①の場合は，$(\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1 = a\ b + y_\beta$.

②の場合は，$(\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1 = a\ b + \Pi_\alpha$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1)\}$$
$$= a\ b + y_\beta \quad (\alpha > \beta),$$
$$\{\chi : \min((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1)\}$$
$$= a\ b + \Pi_\alpha \quad (y = 0 \text{ または } \alpha \leqq \beta)$$

を得る．

（ウ）のときは，

$\sigma_1 \otimes \tau_1 = \underline{\Sigma}_\alpha$であるので，$\mu\ \nu = \Sigma_\alpha$である．したがって，

$$(\mu\ \nu)\xi = \xi \quad (\xi \notin \Sigma_\alpha),$$
$$(\mu\ \nu)\xi = \Sigma_\alpha \quad (\xi \in \Sigma_\alpha)$$

を得る．また，

$$0 < \upsilon_1 \leqq \xi \leqq \upsilon_2, \quad \underline{\Sigma}_\alpha \otimes \upsilon_1 = \underline{\Sigma}_\alpha \otimes \upsilon_2$$

ならば，考えられる場合は，

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = b_\beta \quad (\alpha < \beta,\ b_\beta \text{は} \infty_\beta \text{または} 1/\infty_\beta \text{を表す}) \cdots ①$$
$$\upsilon_1,\ \upsilon_2 \in \underline{\Sigma}_\alpha \quad \cdots ②$$

だけであるが，

①の場合は，$(\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1 = b_\beta = \xi$.

②の場合は，$(\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1 = \underline{\Sigma}_\alpha$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1)\} = \xi \quad (\xi \notin \Sigma_\alpha),$$
$$\{\chi : \min((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1)\} = \Sigma_\alpha \quad (\xi \in \Sigma_\alpha)$$

を得る．

（ⅱ） $\sigma_1 \otimes \tau_1 \neq \sigma_2 \otimes \tau_2$の場合：

$\sigma_1 \otimes \tau_1 \neq \sigma_2 \otimes \tau_2$で，$(\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1 = (\sigma_2 \otimes \tau_2) \otimes \upsilon_2$となるのは，次のときだけである．(∵定理4-10)

(ア)「$\upsilon_1 = \upsilon_2 = \infty_\beta$」で，

$\sigma_1 \otimes \tau_1$，$\sigma_2 \otimes \tau_2$が，「$(\underline{\Sigma}_\beta]$の元 または $\underline{\Sigma}_\alpha (\alpha < \beta)$」．

(イ)「$\upsilon_1 = \upsilon_2 = 1/\infty_\beta$」で，

$\sigma_1 \otimes \tau_1$，$\sigma_2 \otimes \tau_2$が，「$[\underline{\Sigma}_\beta)$の元 または $\underline{\Sigma}_\alpha (\alpha < \beta)$」．

(ウ)「$\upsilon_1 = \upsilon_2 = b + (1/\infty_\beta)$」で，

$\sigma_1 \otimes \tau_1$，$\sigma_2 \otimes \tau_2$が，「$a + (\Pi_\beta]$の元 または $a + \Pi_\alpha (\alpha > \beta)$」．

(エ)「$\upsilon_1 = \upsilon_2 = b - (1/\infty_\beta)$」で，

$\sigma_1 \otimes \tau_1$，$\sigma_2 \otimes \tau_2$が，「$a + [\Pi_\beta)$の元 または $a + \Pi_\alpha (\alpha > \beta)$」．

(ア)のときは，

$$(\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1 = (\sigma_2 \otimes \tau_2) \otimes \upsilon_2 = \infty_\beta$$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1)\} = \infty_\beta$$

を得る．また，

$$1/\infty_\beta < \min(\sigma_1 \otimes \tau_1) \leqq \mu\nu \leqq \max(\sigma_2 \otimes \tau_2) \leqq \infty_\beta, \qquad \upsilon_1 = \xi = \upsilon_2$$

であるので，

$$1/\infty_\beta < \mu\nu \leqq \infty_\beta, \qquad \xi = \infty_\beta$$

である． ゆえに，$(\mu\nu)\xi = \infty_\beta$を得る．

(イ)のときは，

$$(\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1 = (\sigma_2 \otimes \tau_2) \otimes \upsilon_2 = 1/\infty_\beta$$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1)\} = 1/\infty_\beta$$

を得る．また，

$$1/\infty_\beta \leqq \min(\sigma_1 \otimes \tau_1) \leqq \mu\nu \leqq \max(\sigma_2 \otimes \tau_2) < \infty_\beta, \quad \upsilon_1 = \xi = \upsilon_2$$

であるので，

$$1/\infty_\beta \leqq \mu\nu < \infty_\beta, \qquad \xi = 1/\infty_\beta$$

である． ゆえに，$(\mu\nu)\xi = 1/\infty_\beta$を得る．

(ウ)のときは，

$$(\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1 = (\sigma_2 \otimes \tau_2) \otimes \upsilon_2 = ab + (1/\infty_\beta)$$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1)\} = ab + (1/\infty_\beta)$$

を得る．また，

$$a - (1/\infty_\beta) < \min(\sigma_1 \otimes \tau_1) \leqq \mu\nu \leqq \max(\sigma_2 \otimes \tau_2) \leqq a + (1/\infty_\beta)$$

$$\upsilon_1 = \xi = \upsilon_2$$

であるので，

$$a - (1/\infty_\beta) < \mu\nu \leqq a + (1/\infty_\beta), \qquad \xi = b + (1/\infty_\beta)$$

である．ゆえに，$(\mu\nu)\xi = ab + (1/\infty_\beta)$を得る．

（エ）のときは，

$$(\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1 = (\sigma_2 \otimes \tau_2) \otimes \upsilon_2 = ab - (1/\infty_\beta)$$

であるので，

$$\{\chi : \min((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1) \leqq \chi \leqq \max((\sigma_1 \otimes \tau_1) \otimes \upsilon_1)\} = ab - (1/\infty_\beta)$$

を得る．また，

$$a - (1/\infty_\beta) \leqq \min(\sigma_1 \otimes \tau_1) \leqq \mu\nu \leqq \max(\sigma_2 \otimes \tau_2) < a + (1/\infty_\beta),$$

$$\upsilon_1 = \xi = \upsilon_2$$

であるので，

$$a - (1/\infty_\beta) \leqq \mu\nu < a + (1/\infty_\beta), \quad \xi = b - (1/\infty_\beta)$$

である．ゆえに，$(\mu\nu)\xi = ab - (1/\infty_\beta)$を得る■

$\boxed{9}$ 定理5-7（乗法の結合法則を証明するための予備定理２）

μ，ν，ξを正の拡大実数とするとき，

$$0 < \sigma_1 \leqq \mu \leqq \sigma_2, \quad 0 < \tau_1 \leqq \nu \leqq \tau_2, \quad 0 < \upsilon_1 \leqq \xi \leqq \upsilon_2,$$

$$\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1) = \sigma_2 \otimes (\tau_2 \otimes \upsilon_2)$$

となる正の拡大実数σ_1，σ_2，τ_1，τ_2，υ_1，υ_2が存在するならば，

$$\mu(\nu\xi) = \{\chi : \min(\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1)) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1))\} \quad (*)$$

が成り立つ．

証明（ｉ）$\tau_1 \otimes \upsilon_1 = \tau_2 \otimes \upsilon_2$の場合：

$\tau_1 \otimes \upsilon_1$は，ｂを正の有限実数とすれば，

（ア）確定数，　　（イ）$b + \Pi_\beta$，　　（ウ）$\underline{\Sigma}_\beta$

のいずれかである．

（ア）のときは，

$\tau_1 \otimes \upsilon_1$が確定数より，$\nu\xi$も確定数となり，$\nu\xi = \tau_1 \otimes \upsilon_1$であるので，乗法の定義より，（＊）を得る．

（イ）のときは，

$\tau_1 \otimes \upsilon_1 = b + \Pi_\beta$であるので，$\nu\xi = b + \Pi_\beta$である．

ここで，μを正の無限大拡大実数とすれば，σ_2は正の無限大拡大実数でなくてはならないので，原始乗法$\sigma_2 \otimes (\tau_2 \otimes \upsilon_2)$は定義されていない．

また，μを正の無限小拡大実数とすれば，σ_1は正の無限小拡大実数でなくてはならないので，原始乗法$\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1)$は定義されていない．

したがって，μは正の有限拡大実数であるので，

$$\mu = a + x,$$

ａは正の有限実数，「$x = 0$またはx_α」（x_αは，$1/\infty_\alpha$または$-1/\infty_\alpha$を表す）とおくことができる．このとき，

$$\mu(\nu\xi) = ab + x_\alpha \quad (\alpha < \beta),$$

$$\mu(\nu\xi) = ab + \Pi_\beta \quad (x = 0 \text{ または } \alpha \geqq \beta)$$

を得る．また，

$$0 < \sigma_1 \leqq \mu = a + x \leqq \sigma_2, \quad \sigma_1 \otimes (a + \Pi_\beta) = \sigma_2 \otimes (a + \Pi_\beta)$$

ならば，考えられる場合は，

$$\sigma_1=\sigma_2=a+x_\alpha \quad (\alpha<\beta) \quad \cdots ①$$

$$\sigma_1,\ \sigma_2\in a+\Pi_\beta \quad (x=0 \text{ または } \alpha\geqq\beta) \quad \cdots ②$$

だけであるが，

①の場合は，$\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1)=ab+x_\alpha$．

②の場合は，$\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1)=ab+\Pi_\beta$

であるので，

$$\{\chi:\min(\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1))\leqq\chi\leqq\max(\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1))\}$$
$$=ab+x_\alpha \quad (\alpha<\beta),$$

$$\{\chi:\min(\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1))\leqq\chi\leqq\max(\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1))\}$$
$$=ab+\Pi_\beta \quad (x=0 \text{ または } \alpha\geqq\beta)$$

を得る．

(ウ)のときは，

$\tau_1\otimes\upsilon_1=\underline{\Sigma}_\beta$であるので，$\nu\xi=\Sigma_\beta$である．したがって，

$$\mu(\nu\xi)=\mu \quad (\mu\notin\Sigma_\beta),$$

$$\mu(\nu\xi)=\Sigma_\beta \quad (\mu\in\Sigma_\beta)$$

を得る．また，

$$0<\sigma_1\leqq\mu\leqq\sigma_2, \quad \sigma_1\otimes\underline{\Sigma}_\beta=\sigma_2\otimes\underline{\Sigma}_\beta$$

ならば，考えられる場合は，

$$\sigma_1=\sigma_2=a_\alpha \quad (\alpha>\beta,\ a_\alpha \text{は} \infty_\alpha \text{または} 1/\infty_\alpha \text{を表す}) \quad \cdots ①$$

$$\sigma_1,\ \sigma_2\in\underline{\Sigma}_\beta \quad \cdots ②$$

だけであるが，

①の場合は，$\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1)=a_\alpha=\mu$．

②の場合は，$\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1)=\underline{\Sigma}_\beta$

であるので，

$$\{\chi:\min(\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1))\leqq\chi\leqq\max(\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1))\}=\mu \quad (\mu\notin\Sigma_\beta),$$

$$\{\chi:\min(\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1))\leqq\chi\leqq\max(\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1))\}=\Sigma_\beta \quad (\mu\in\Sigma_\beta)$$

を得る．

(ⅱ) $\tau_1\otimes\upsilon_1\neq\tau_2\otimes\upsilon_2$の場合：

$\tau_1\otimes\upsilon_1\neq\tau_2\otimes\upsilon_2$で，$\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1)=\sigma_2\otimes(\tau_2\otimes\upsilon_2)$となるのは，次のときだけである．(∵定理4-14)

(ア)「$\sigma_1=\sigma_2=\infty_\alpha$」で，

$\tau_1\otimes\upsilon_1,\ \tau_2\otimes\upsilon_2$が，「$(\underline{\Sigma}_\alpha]$の元 または $\underline{\Sigma}_\beta(\alpha>\beta)$」．

(イ)「$\sigma_1=\sigma_2=1/\infty_\alpha$」で，

$\tau_1\otimes\upsilon_1,\ \tau_2\otimes\upsilon_2$が，「$[\underline{\Sigma}_\alpha)$の元 または $\underline{\Sigma}_\beta(\alpha>\beta)$」．

(ウ)「$\sigma_1=\sigma_2=a+(1/\infty_\alpha)$」で，

$\tau_1\otimes\upsilon_1,\ \tau_2\otimes\upsilon_2$が，「$b+(\Pi_\alpha]$ の元 または $b+\Pi_\beta(\alpha<\beta)$」．

(エ)「$\sigma_1=\sigma_2=a-(1/\infty_\alpha)$」で，

$\tau_1\otimes\upsilon_1,\ \tau_2\otimes\upsilon_2$が，「$b+[\Pi_\alpha)$ の元 または $b+\Pi_\beta(\alpha<\beta)$」．

（ア）のときは，

$$\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1) = \sigma_2 \otimes (\tau_2 \otimes \upsilon_2) = \infty_\alpha$$

であるので，

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1)) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1))\} = \infty_\alpha$$

を得る．また，

$$1/\infty_\alpha < \min(\tau_1 \otimes \upsilon_1) \leqq \nu\xi \leqq \max(\tau_2 \otimes \upsilon_2) \leqq \infty_\alpha, \quad \sigma_1 = \mu = \sigma_2$$

であるので，

$$1/\infty_\alpha < \nu\xi \leqq \infty_\alpha, \quad \mu = \infty_\alpha$$

である．ゆえに，$\mu(\nu\xi) = \infty_\alpha$を得る．

（イ）のときは，

$$\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1) = \sigma_2 \otimes (\tau_2 \otimes \upsilon_2) = 1/\infty_\alpha$$

であるので，

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1)) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1))\} = 1/\infty_\alpha$$

を得る．また，

$$1/\infty_\alpha \leqq \min(\tau_1 \otimes \upsilon_1) \leqq \nu\xi \leqq \max(\tau_2 \otimes \upsilon_2) < \infty_\alpha, \quad \sigma_1 = \mu = \sigma_2$$

であるので，

$$1/\infty_\alpha \leqq \nu\xi < \infty_\alpha, \quad \mu = 1/\infty_\alpha$$

である．ゆえに，$\mu(\nu\xi) = 1/\infty_\alpha$を得る．

（ウ）のときは，

$$\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1) = \sigma_2 \otimes (\tau_2 \otimes \upsilon_2) = ab + (1/\infty_\alpha)$$

であるので，

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1)) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1))\} = ab + (1/\infty_\alpha)$$

を得る．また，

$$b - (1/\infty_\alpha) < \min(\tau_1 \otimes \upsilon_1) \leqq \nu\xi \leqq \max(\tau_2 \otimes \upsilon_2) \leqq b + (1/\infty_\alpha),$$
$$\sigma_1 = \mu = \sigma_2$$

であるので，

$$b - (1/\infty_\alpha) < \nu\xi \leqq b + (1/\infty_\alpha), \quad \mu = a + (1/\infty_\alpha)$$

である．ゆえに，$\mu(\nu\xi) = ab + (1/\infty_\alpha)$を得る．

（エ）のときは，

$$\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1) = \sigma_2 \otimes (\tau_2 \otimes \upsilon_2) = ab - (1/\infty_\alpha)$$

であるので，

$$\{\chi : \min(\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1)) \leqq \chi \leqq \max(\sigma_1 \otimes (\tau_1 \otimes \upsilon_1))\} = ab - (1/\infty_\alpha)$$

を得る．また，

$$b - (1/\infty_\alpha) \leqq \min(\tau_1 \otimes \upsilon_1) \leqq \nu\xi \leqq \max(\tau_2 \otimes \upsilon_2) < b + (1/\infty_\alpha),$$
$$\sigma_1 = \mu = \sigma_2$$

であるので，

$$b - (1/\infty_\alpha) \leqq \nu\xi < b + (1/\infty_\alpha), \quad \mu = a - (1/\infty_\alpha)$$

である．ゆえに，$\mu(\nu\xi) = ab - (1/\infty_\alpha)$を得る■

$\boxed{10}$ 定理5-8（乗法の結合法則）

μ，ν，ξを拡大実数とすれば，$(\mu\nu)\xi=\mu(\nu\xi)$が成り立つ．

証明　μ，ν，ξの少なくとも１つが０ならば，両辺ともに０である．μ，ν，ξのそれぞれの符号が変わっても，両辺の符号は一致する．したがって，μ，ν，ξが，すべて正の場合を証明すればよい．定義4-8より，拡大実数の原始乗法は，

（ｉ）「正の有理数」と「正の有理数」の乗法．

（ⅱ）「正の有限拡大実数」と「正の有限拡大実数」の乗法

であるが，定理2-15の（ⅱ），定理2-24，定理4-4より，原始乗法は結合法則が成り立つ．

したがって，定理5-6，定理5-7より，

$$
\begin{aligned}
(\mu\nu)\xi&=\{\chi:\min((\sigma_1\otimes\tau_1)\otimes\upsilon_1)\leqq\chi\leqq\max((\sigma_1\otimes\tau_1)\otimes\upsilon_1)\}\\
&=\{\chi:\min(\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1))\leqq\chi\leqq\max(\sigma_1\otimes(\tau_1\otimes\upsilon_1))\}\\
&=\mu(\nu\xi)\blacksquare
\end{aligned}
$$

$\boxed{11}$ 分配法則

拡大実数の分配法則は，一般的には成り立たない．実際，

$$\infty_\alpha\{\sqrt{2}+(-1)\}=\infty_\alpha.$$

$$\infty_\alpha\cdot\sqrt{2}+\infty_\alpha\cdot(-1)=\infty_\alpha+(-\infty_\alpha)=\Theta_\alpha.$$

しかし，以下の定理が成り立つ．

$\boxed{12}$ 定理5-9（定理5-12を証明するための予備定理１）

μ，$\nu\in D$とするとき，$-\mu+(-\nu)=-(\mu+\nu)$が成り立つ．

証明（ｉ）初めに，μ，νがともに無限小拡大実数の場合を証明する．

$\mu=1/\infty_\alpha$，$\nu=1/\infty_\beta$ならば，

$$
\begin{aligned}
(-\mu)+(-\nu)&=-1/\infty_\alpha+(-1/\infty_\beta)\\
&=-1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}}.\\
-(\mu+\nu)&=-(1/\infty_\alpha+1/\infty_\beta)\\
&=-(1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}})\\
&=-1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}}.
\end{aligned}
$$

$\mu=-1/\infty_\alpha$，$\nu=-1/\infty_\beta$ならば，

$$
\begin{aligned}
(-\mu)+(-\nu)&=1/\infty_\alpha+1/\infty_\beta\\
&=1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}}.\\
-(\mu+\nu)&=-\{-1/\infty_\alpha+(-1/\infty_\beta)\}\\
&=-\{-(1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}})\}\\
&=1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}}.
\end{aligned}
$$

$\mu=1/\infty_\alpha$，$\nu=-1/\infty_\beta$ならば，

$$
\begin{aligned}
(-\mu)+(-\nu)&=-1/\infty_\alpha+1/\infty_\beta\\
&=\begin{cases}-1/\infty_\alpha & (\alpha<\beta),\\ \Pi_\alpha & (\alpha=\beta),\\ 1/\infty_\beta & (\alpha>\beta).\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$-(\mu+\nu)=-\{1/\infty_\alpha+(-1/\infty_\beta)\}$$
$$=\begin{cases}-1/\infty_\alpha & (\alpha<\beta),\\ -\Pi_\alpha & (\alpha=\beta),\\ -(-1/\infty_\beta) & (\alpha>\beta)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-1/\infty_\alpha & (\alpha<\beta),\\ \Pi_\alpha & (\alpha=\beta),\\ 1/\infty_\beta & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$\mu=-1/\infty_\alpha$, $\nu=1/\infty_\beta$ならば,

$$(-\mu)+(-\nu)=1/\infty_\alpha+(-1/\infty_\beta)$$
$$=\begin{cases}1/\infty_\alpha & (\alpha<\beta),\\ \Pi_\alpha & (\alpha=\beta),\\ -1/\infty_\beta & (\alpha>\beta).\end{cases}$$
$$-(\mu+\nu)=-(-1/\infty_\alpha+1/\infty_\beta)$$
$$=\begin{cases}-(-1/\infty_\alpha) & (\alpha<\beta),\\ -\Pi_\alpha & (\alpha=\beta),\\ -1/\infty_\beta & (\alpha>\beta)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1/\infty_\alpha & (\alpha<\beta),\\ \Pi_\alpha & (\alpha=\beta),\\ -1/\infty_\beta & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

(ⅱ) μ, νがともに有界拡大実数の場合:

$\mu=a+x$, $\nu=b+y$; a, $b\in R$; x, $y\in\Pi_0$と表すことができるので,

$$\begin{aligned}(-\mu)+(-\nu)&=(-a-x)+(-b-y)\\&=\{-a+(-b)\}+\{(-x)+(-y)\}\\&=-(a+b)+\{-(x+y)\}\quad(\because a,\ b\in R\ ;\ x,\ y\in\Pi_0\ ;\ (\mathrm{i}))\\&=-\{(a+b)+(x+y)\}\\&=-\{(a+x)+(b+y)\}\\&=-(\mu+\nu).\end{aligned}$$

(ⅲ) μ, νの少なくとも片方が無限大拡大実数の場合:

μが無限大拡大実数でνが有界拡大実数ならば, $(-\mu)+(-\nu)=-\mu=-(\mu+\nu)$.

μが有界拡大実数でνが無限大拡大実数ならば, $(-\mu)+(-\nu)=-\nu=-(\mu+\nu)$.

$\mu=\infty_\alpha$, $\nu=\infty_\beta$ならば,

$$\begin{aligned}(-\mu)+(-\nu)&=(-\infty_\alpha)+(-\infty_\beta)\\&=-\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}.\\ -(\mu+\nu)&=-(\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}})\\&=-\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}.\end{aligned}$$

$\mu=-\infty_\alpha$, $\nu=-\infty_\beta$ならば,

$$\begin{aligned}(-\mu)+(-\nu)&=\infty_\alpha+\infty_\beta\\&=\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}.\\ -(\mu+\nu)&=-(-\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}})\\&=\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}.\end{aligned}$$

$\mu = -\infty_\alpha,\ \ \nu = \infty_\beta$ ならば,

$$(-\mu)+(-\nu) = \infty_\alpha + (-\infty_\beta)$$

$$= \begin{cases} -\infty_\beta & (\alpha < \beta), \\ \Theta_\alpha & (\alpha = \beta), \\ \infty_\alpha & (\alpha > \beta). \end{cases}$$

$$-(\mu+\nu) = -\{(-\infty_\alpha)+\infty_\beta\}$$

$$= \begin{cases} -\infty_\beta & (\alpha < \beta), \\ -\Theta_\alpha & (\alpha = \beta), \\ -(-\infty_\alpha) & (\alpha > \beta) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\infty_\beta & (\alpha < \beta), \\ \Theta_\alpha & (\alpha = \beta), \\ \infty_\alpha & (\alpha > \beta). \end{cases}$$

$\mu = \infty_\alpha,\ \ \nu = -\infty_\beta$ ならば,

$$(-\mu)+(-\nu) = -\infty_\alpha + \infty_\beta$$

$$= \begin{cases} \infty_\beta & (\alpha < \beta), \\ \Theta_\alpha & (\alpha = \beta), \\ -\infty_\alpha & (\alpha > \beta). \end{cases}$$

$$-(\mu+\nu) = -\{\infty_\alpha + (-\infty_\beta)\}$$

$$= \begin{cases} -(-\infty_\beta) & (\alpha < \beta), \\ -\Theta_\alpha & (\alpha = \beta), \\ -\infty_\alpha & (\alpha > \beta) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \infty_\beta & (\alpha < \beta), \\ \Theta_\alpha & (\alpha = \beta), \\ -\infty_\alpha & (\alpha > \beta) \end{cases} \blacksquare$$

$\boxed{13}$ 定理5-10（定理5-12を証明するための予備定理２）

$\mu,\ \nu,\ \xi \in D^+$ とするとき,

（ⅰ） $\mu(\nu+\xi) = \mu\nu + \mu\xi \cdots (*)$ が成り立てば，次の式も成り立つ.

（ⅰ－ア） $\mu\{(-\nu)+(-\xi)\} = \mu(-\nu) + \mu(-\xi)$.

（ⅰ－イ） $(-\mu)\{\nu+\xi\} = (-\mu)\nu + (-\mu)\xi$.

（ⅰ－ウ） $(-\mu)\{(-\nu)+(-\xi)\} = (-\mu)(-\nu) + (-\mu)(-\xi)$.

（ⅱ） $\mu\{\nu+(-\xi)\} = \mu\nu + \mu(-\xi) \cdots (**)$ が成り立てば，次の式も成り立つ.

（ⅱ－ア） $\mu\{(-\nu)+\xi)\} = \mu(-\nu) + \mu\xi$.

（ⅱ－イ） $(-\mu)\{\nu+(-\xi)\} = (-\mu)\nu + (-\mu)(-\xi)$.

（ⅱ－ウ） $(-\mu)\{(-\nu)+\xi\} = (-\mu)(-\nu) + (-\mu)\xi$.

証明 （ⅰ） 定理5-9と $(*)$ より,

（ⅰ－ア）
$$\mu\{(-\nu)+(-\xi)\} = \mu\{-(\nu+\xi)\}$$
$$= -\{\mu(\nu+\xi)\}$$
$$= -(\mu\nu + \mu\xi)$$
$$= \{-(\mu\nu)\} + \{-(\mu\xi)\}$$

$$=\mu(-\nu)+\mu(-\xi).$$

（ｉ－イ）　$(-\mu)(\nu+\xi)=-\{\mu(\nu+\xi)\}$
$$=-(\mu\nu+\mu\xi)$$
$$=\{-(\mu\nu)\}+\{-(\mu\xi)\}$$
$$=(-\mu)\nu+(-\mu)\xi.$$

（ｉ－ウ）　$(-\mu)\{(-\nu)+(-\xi)\}=(-\mu)\{-(\nu+\xi)\}$
$$=\mu(\nu+\xi)$$
$$=\mu\nu+\mu\xi$$
$$=(-\mu)(-\nu)+(-\mu)(-\xi)\ \blacksquare$$

（ⅱ）定理5-9と（＊＊）より，

（ⅱ－ア）　$\mu\{(-\nu)+\xi\}=\mu\{-(\nu+(-\xi))\}$
$$=-\{\mu(\nu+(-\xi))\}$$
$$=-\{\mu\nu+\mu(-\xi)\}$$
$$=-\{\mu\nu+(-\mu\xi)\}$$
$$=\{-(\mu\nu)\}+\{-(-\mu\xi)\}$$
$$=\mu(-\nu)+\mu\xi.$$

（ⅱ－イ）　$(-\mu)\{\nu+(-\xi)\}=-\{\mu(\nu+(-\xi))\}$
$$=-\{\mu\nu+\mu(-\xi)\}$$
$$=-\{\mu\nu+(-\mu\xi)\}$$
$$=\{-(\mu\nu)\}+\{-(-\mu\xi)\}$$
$$=(-\mu)\nu+(-\mu)(-\xi).$$

（ⅱ－ウ）　$(-\mu)\{(-\nu)+\xi\}=(-\mu)\{-(\nu+(-\xi))\}$
$$=\mu\{\nu+(-\xi)\}$$
$$=\mu\nu+\mu(-\xi)$$
$$=(-\mu)(-\nu)+(-\mu)\xi\ \blacksquare$$

$\boxed{14}$ 定理5-11（定理5-12を証明するための予備定理３）

μ，ν，$\xi\in D^{+}$とするとき，

（ｉ）$\mu(\nu+\xi)=\mu\nu+\mu\xi$が成り立つ．

（ⅱ）$\mu\nu+\mu(-\xi)$が確定数ならば，$\mu\{\nu+(-\xi)\}=\mu\nu+\mu(-\xi)$が成り立つ．

証明　μ，ν，$\xi\in D^{+}$を，それぞれ，無限小、有限、無限大の場合に分けて，

$$\mu(\nu+\xi),\quad \mu\nu+\mu\xi,\quad \mu\{\nu+(-\xi)\},\quad \mu\nu+\mu(-\xi)$$

の値を，それぞれ求めて一覧表にする．初めに若干の記号を約束する．

〈ア〉 a，b，$c\in R^{+}$とする．

〈イ〉 $\underline{\mu}$，$\underline{\nu}$，$\underline{\xi}$は，それぞれ，μ，ν，$\xi\in D^{+}$の無限小部分を表す．

例：$\mu=1+(1/\infty_{\alpha})$ならば，$\underline{\mu}=1/\infty_{\alpha}$である．

〈ウ〉 x_{α}は「$1/\infty_{\alpha}$ または $-(1/\infty_{\alpha})$」の無限小を表す．y_{β}，z_{γ}も同様である．

例：$a+x_{\alpha}$は「$a+(1/\infty_{\alpha})$ または $a-(1/\infty_{\alpha})$」のことである．

〈エ〉（※）は欄外に記載する．

$\mu,\ \nu,\ \xi$	条　　件	$\mu(\nu+\xi)$	$\mu\nu+\mu\xi$
$\mu=1/\infty_\alpha$ $\nu=1/\infty_\beta$ $\xi=1/\infty_\gamma$	$\alpha\geqq\beta,\ \gamma$	μ	μ
	$\beta>\alpha\geqq\gamma$		
	$\gamma>\alpha\geqq\beta$		
	$\gamma\geqq\beta>\alpha$	ν	ν
	$\beta>\gamma>\alpha$	ξ	ξ
$\mu=1/\infty_\alpha$ $\nu=1/\infty_\beta$ ξは有限		μ	μ
$\mu=1/\infty_\alpha$ $\nu=1/\infty_\beta$ $\xi=\infty_\gamma$	$\alpha\geqq\beta>\gamma$	μ	μ
	$\alpha>\beta=\gamma$		
	$\beta>\alpha>\gamma$		
	$\alpha>\gamma>\beta$		
	$\beta\geqq\gamma>\alpha$	ξ	ξ
	$\gamma>\alpha\geqq\beta$		
	$\gamma>\beta>\alpha$		
	$\alpha=\gamma\geqq\beta$	Σ_α	Σ_α
	$\beta>\alpha=\gamma$		
$\mu=1/\infty_\alpha$ $\nu=b+y_\beta$ $\xi=c+z_\gamma$		μ	μ
$\mu=1/\infty_\alpha$ νは有限	$\alpha>\gamma$	μ	μ
	$\alpha=\gamma$	Σ_α	Σ_α

$\mu,\ \nu,\ \xi$	条　　件	$\mu\{\nu+(-\xi)\}$	$\mu\nu+\mu(-\xi)$
$\mu=1/\infty_\alpha$ $\nu=1/\infty_\beta$ $\xi=1/\infty_\gamma$	$\gamma>\alpha\geqq\beta$	μ	μ
	$\beta>\alpha\geqq\gamma$	$-\mu$	$-\mu$
	$\gamma>\beta>\alpha$	ν	ν
	$\beta>\gamma>\alpha$	$-\xi$	$-\xi$
	$\alpha\geqq\beta=\gamma$	Π_α	Π_α
	$\beta=\gamma>\alpha$	Π_β	Π_β
	$\alpha\geqq\beta>\gamma$	$-\mu$	Π_α
	$\alpha\geqq\gamma>\beta$	μ	Π_α
$\mu=1/\infty_\alpha$ $\nu=1/\infty_\beta$ ξは有限	$\beta>\alpha$	$-\mu$	$-\mu$
	$\alpha\geqq\beta$	$-\mu$	Π_α
$\mu=1/\infty_\alpha$ $\nu=1/\infty_\beta$ $\xi=\infty_\gamma$	$\beta>\alpha>\gamma$	$-\mu$	$-\mu$
	$\beta\geqq\gamma>\alpha$	$-\xi$	$-\xi$
	$\gamma>\alpha\geqq\beta$		
	$\gamma>\beta>\alpha$		
	$\beta>\alpha=\gamma$	$-\Sigma_\alpha$	$-\Sigma_\alpha$
	$\alpha>\beta\geqq\gamma$	$-\mu$	Π_α
	$\alpha=\beta>\gamma$		
	$\alpha>\gamma>\beta$		
	$\alpha=\gamma\geqq\beta$	$-\Sigma_\alpha$	$-\Sigma_\alpha\cup\Pi_\alpha$
$\mu=1/\infty_\alpha$ $\nu=b+y_\beta$ $\xi=c+z_\gamma$	$b>c$	μ	Π_α
	$b<c$	$-\mu$	Π_α
	$b=c$ y_βとz_γは 同符合で $\alpha\geqq\beta=\gamma$	Π_α	Π_α
	$b=c$ y_βとz_γは 同符合で $\alpha<\beta=\gamma$	Π_β	Π_α
	その他	確定数	Π_α
$\mu=1/\infty_\alpha$ νは有限	$\alpha<\gamma$	$-\xi$	$-\xi$
	$\alpha=\gamma$	$-\Sigma_\alpha$	$-\Sigma_\alpha\cup\Pi_\alpha$

$\xi=\infty_{\gamma}$	$\alpha<\gamma$	ξ	ξ
$\mu=1/\infty_{\alpha}$ $\nu=\infty_{\beta}$ $\xi=\infty_{\gamma}$	$\alpha>\beta\geqq\gamma$	μ	μ
	$\alpha>\gamma>\beta$		
	$\beta>\alpha\geqq\gamma$	ν	ν
	$\beta\geqq\gamma>\alpha$		
	$\gamma>\alpha\geqq\beta$	ξ	ξ
	$\gamma>\beta>\alpha$		
	$\alpha=\beta\geqq\gamma$	Σ_{α}	Σ_{α}
	$\alpha=\gamma>\beta$		
$\mu=a+\underline{\mu}$ $\nu=b+\underline{\nu}$ $\xi=c+\underline{\xi}$ $a\in R^{+}$ $b\in R^{+}\cup\{0\}$ $c\in R^{+}\cup\{0\}$	$b=c=0$	$\underline{\nu}+\underline{\xi}$	$\underline{\nu}+\underline{\xi}$
	$b=0$ $c\neq0$	$ac+$ $\underline{\mu}+\underline{\nu}+\underline{\xi}$	$ac+$ $\underline{\mu}+\underline{\nu}+\underline{\xi}$
	$b\neq0$ $c=0$	$ab+$ $\underline{\mu}+\underline{\nu}+\underline{\xi}$	$ab+$ $\underline{\mu}+\underline{\nu}+\underline{\xi}$
	$b\neq0$ $c\neq0$	$a(b+c)$ $+\underline{\mu}+\underline{\nu}+$ $\underline{\xi}$	$a(b+c)$ $+\underline{\mu}+\underline{\nu}+$ $\underline{\xi}$

$\alpha>\gamma$	$-\xi$	Π_{α}
$\beta>\alpha\geqq\gamma$	ν	ν
$\beta>\gamma>\alpha$		
$\gamma>\alpha\geqq\beta$	$-\xi$	$-\xi$
$\gamma>\beta>\alpha$		
$\alpha=\beta=\gamma$	Θ_{α}	Θ_{α}
$\beta=\gamma>\alpha$	Θ_{β}	Θ_{β}
$\alpha>\beta=\gamma$	Π_{α}	Π_{α}
$\alpha>\beta>\gamma$	μ	Π_{α}
$\alpha>\gamma>\beta$	$-\mu$	Π_{α}
$\alpha=\beta>\gamma$	Σ_{α}	$\Sigma_{\alpha}\cup\Pi_{\alpha}$
$\alpha=\gamma>\beta$	$-\Sigma_{\alpha}$	$-\Sigma_{\alpha}\cup\Pi_{\alpha}$
$b=c=0$	$\underline{\nu}+(-\underline{\xi})$	$\underline{\nu}+(-\underline{\xi})$
$b=0$ $c\neq0$	$-(ac+$ $\underline{\mu}-\underline{\nu}+\underline{\xi})$	$-(ac+$ $\underline{\mu}-\underline{\nu}+\underline{\xi})$
$b\neq0$ $c=0$	$ab+$ $\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi}$	$ab+$ $\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi}$
$b\neq0$ $c\neq0$ $b>c$ (※1)	$a(b-c)+$ $\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi}$	$a(b-c)+$ $\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi}$
$b\neq0$ $c\neq0$ $b>c$ (※2)	$a(b-c)+$ $\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi}$	$a(b-c)+$ $\Pi_{\alpha}+\underline{\nu}-\underline{\xi}$
$b\neq0$ $c\neq0$ $b<c$ (※3)	$a(b-c)+$ $(-\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi})$	$a(b-c)+$ $(-\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi})$
$b\neq0$ $c\neq0$ $b<c$ (※4)	$a(b-c)+$ $(-\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi})$	$a(b-c)+$ $\Pi_{\alpha}+\underline{\nu}-\underline{\xi}$
$b\neq0$ $c\neq0$ $b=c$ (※5)	$\underline{\nu}-\underline{\xi}$	$\underline{\nu}-\underline{\xi}$

				$b \neq 0$ $c \neq 0$ $b = c$ （※６）	$\underline{\nu} - \underline{\xi}$	$\Pi_{\alpha} + \underline{\nu} - \underline{\xi}$
$\mu = a + \underline{\mu}$ $\nu = b + \underline{\nu}$ $\xi = \infty_{\gamma}$ $a \in R^{+}$ $b \in R^{+} \cup \{0\}$		ξ	ξ		$-\xi$	$-\xi$
$\mu = a + \underline{\mu}$ $\nu = \infty_{\beta}$ $\xi = \infty_{\gamma}$ $a \in R^{+}$		$A_{max}\{\nu, \xi\}$	$A_{max}\{\nu, \xi\}$		$\nu - \xi$	$\nu - \xi$
$\mu = \infty_{\alpha}$ $\nu = 1 / \infty_{\beta}$ $\xi = 1 / \infty_{\gamma}$	$\alpha > \beta \geqq \gamma$	μ	μ	$\gamma > \alpha > \beta$	μ	μ
	$\alpha = \beta > \gamma$			$\beta > \alpha > \gamma$	$-\mu$	$-\mu$
	$\alpha \geqq \gamma > \beta$			$\gamma > \beta > \alpha$	ν	ν
	$\beta > \alpha > \gamma$			$\beta > \gamma > \alpha$	$-\xi$	$-\xi$
	$\gamma > \alpha > \beta$			$\alpha \geqq \beta = \gamma$	Θ_{α}	Θ_{α}
	$\beta = \gamma > \alpha$	ν	ν	$\gamma > \alpha = \beta$	Σ_{α}	Σ_{α}
	$\gamma > \beta > \alpha$			$\beta > \alpha = \gamma$	$-\Sigma_{\alpha}$	$-\Sigma_{\alpha}$
	$\beta > \gamma > \alpha$	ξ	ξ	$\beta = \gamma > \alpha$	Π_{β}	Π_{β}
	$\beta \geqq \alpha = \gamma$	Σ_{α}	Σ_{α}	$\alpha \geqq \gamma > \beta$	μ	Θ_{α}
	$\gamma > \alpha = \beta$			$\alpha \geqq \beta > \gamma$	$-\mu$	Θ_{α}
$\mu = \infty_{\alpha}$ $\nu = 1 / \infty_{\beta}$ ξは有限		μ	μ	$\alpha < \beta$	$-\mu$	$-\mu$
				$\alpha \geqq \beta$	$-\mu$	Θ_{α}
$\mu = \infty_{\alpha}$ $\nu = b + \underline{\nu}$ $\xi = c + \underline{\xi}$ $b \in R^{+}$ $c \in R^{+}$		μ	μ	$b > c$	μ	Θ_{α}
				$b < c$	$-\mu$	Θ_{α}
				$b = c$ $\underline{\nu} - \underline{\xi} = \Pi_{\beta}$ $(\beta \leqq \alpha)$	Θ_{α}	Θ_{α}
				$b = c$ $\underline{\nu} - \underline{\xi} = \Pi_{\beta}$ $(\beta > \alpha)$	Π_{β}	Θ_{α}
				$b = c$ $\underline{\nu} - \underline{\xi}$が 確定数	Σ_{α}, $-\Sigma_{\alpha}$, μ, $-\mu$, ν, $-\xi$ のいずれか	Θ_{α}
$\mu = \infty_{\alpha}$	$\alpha \geqq \gamma$	μ	μ	$\beta > \alpha \geqq \gamma$	$-\mu$	$-\mu$

$\nu = 1/\infty_\beta$ $\xi = \infty_\gamma$	$\alpha < \gamma$	ξ	ξ	$\beta \geqq \gamma > \alpha$	$-\xi$	$-\xi$
				$\gamma > \alpha \geqq \beta$		
				$\gamma > \beta > \alpha$		
				$\alpha \geqq \beta,\ \gamma$	$-\mu$	Θ_α
$\mu = \infty_\alpha$ νは有限 $\xi = \infty_\gamma$	$\alpha \geqq \gamma$	μ	μ	$\alpha \geqq \gamma$	$-\mu$	Θ_α
	$\alpha < \gamma$	ξ	ξ	$\alpha < \gamma$	$-\xi$	$-\xi$
$\mu = \infty_\alpha$ $\nu = \infty_\beta$ $\xi = \infty_\gamma$	$\alpha \geqq \beta,\ \gamma$	μ	μ	$\beta > \alpha \geqq \gamma$	ν	ν
	$\beta \geqq \gamma > \alpha$	ν	ν	$\beta > \gamma > \alpha$		
	$\beta > \alpha \geqq \gamma$			$\gamma > \alpha \geqq \beta$	$-\xi$	$-\xi$
	$\gamma > \alpha \geqq \beta$	ξ	ξ	$\gamma > \beta > \alpha$		
	$\gamma > \beta > \alpha$			$\alpha \geqq \beta = \gamma$	Θ_α	Θ_α
				$\beta = \gamma > \alpha$	Θ_β	Θ_β
				$\alpha \geqq \beta > \gamma$	μ	Θ_α
				$\alpha \geqq \gamma > \beta$	$-\mu$	Θ_α

（※１）「$\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi}=\Pi_\alpha+\underline{\nu}-\underline{\xi}$」または「$\underline{\mu}=0$」
（※２）「$\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi}\neq\Pi_\alpha+\underline{\nu}-\underline{\xi}$」かつ「$\underline{\mu}\neq 0$」
（※３）「$-\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi}=\Pi_\alpha+\underline{\nu}-\underline{\xi}$」または「$\underline{\mu}=0$」
（※４）「$-\underline{\mu}+\underline{\nu}-\underline{\xi}\neq\Pi_\alpha+\underline{\nu}-\underline{\xi}$」かつ「$\underline{\mu}\neq 0$」
（※５）「$\underline{\nu}-\underline{\xi}=\Pi_\alpha+\underline{\nu}-\underline{\xi}$」または「$\underline{\mu}=0$」
（※６）「$\underline{\nu}-\underline{\xi}\neq\Pi_\alpha+\underline{\nu}-\underline{\xi}$」かつ「$\underline{\mu}\neq 0$」

表より，次のことが確認される.
（ⅰ）$\mu(\nu+\xi)$と$\mu\nu+\mu\xi$の値は常に等しい.
（ⅱ）$\mu\nu+\mu(-\xi)$の値が確定数の欄だけを見れば，$\mu\{\nu+(-\xi)\}$と$\mu\nu+\mu(-\xi)$の値は等しい■

$\boxed{15}$ 定理5-12
μ，ν，$\xi\in$Dにおける分配法則 $\mu(\nu+\xi)=\mu\nu+\mu\xi$は，
（ⅰ）μ，ν，ξの少なくとも１つが０ならば成り立つ.
（ⅱ）ν，ξが同符号ならば成り立つ.
（ⅲ）$\mu\nu+\mu\xi$が確定数ならば成り立つ.

証明 （ⅰ）は明らか.
（ⅱ）は，（ⅰ）と，定理5-10の（ⅰ）と，定理5-11の（ⅰ）による.
（ⅲ）は，（ⅰ）と，定理5-10の（ⅱ）と，定理5-11の（ⅱ）による■

第６章　累乗

$\boxed{1}$ 有限実核すべての集合を$\boldsymbol{R}$で表すとき，有限実核の基に，その有限実核が対応する写像 ζ：R→$\boldsymbol{R}$ は，大小関係，加法，乗法についての同型写像である．実際，定理4-4により，定理4-2と同様に証明することができる．

この章の目的は，この写像ζが，累乗についても同型写像になる，すなわち，

$$x \in R^{+},\ \ y \in R^{+} \text{ならば，} \zeta(x)^{\zeta(y)} = \zeta(x^{y})$$

が成り立つように，「拡大実数の累乗」を定義することである．

$\boxed{2}$ xが正の拡大実数で，mが正の有限整数ならば，累乗x^{m}の意味は，拡大実数の乗法の定義より容易に類推される．すなわち，

（ｉ） xが正の無限大拡大実数∞_{β}ならば，$x^{m} = {\infty_{\beta}}^{m} = \infty_{\beta}$．

（ii） xが正の有限拡大実数r＋b，「$r \in R^{+}$，$b \in \Pi_{0}$」ならば，

$$x^{m} = r^{m} + mb = r^{m} + b.$$

（iii） xが正の無限小拡大実数$1/\infty_{\beta}$ならば，$x^{m} = 1/({\infty_{\beta}}^{m}) = 1/\infty_{\beta}$

である．

したがって，$\boxed{1}$で述べた目的を達成するためには，mの数の適用範囲を，正の有限整数から正の拡大実数に拡張すればよいのであるが，その際，これまで述べてきた内容と矛盾しないようにしなくてはならないし，不自然な結果が導かれるような定義は避けなくてはならないので，少なくとも次の３つの注意が必要である．

【注意１】拡大実数は，カージナル数の拡張であるので，拡大実数の累乗も，カージナル数の累乗と矛盾しないようにしなくてはならない．特に，この小冊子では，一般連続体仮説が成り立つものと仮定していることを忘れないようにしなくてはならない．

【注意２】 x，m∈Rの場合は，定理4-4より，x^{m}の定義は決まっているものと考えなくてはならないので，その定義と矛盾しないようにしなくてはならない．

【注意３】例えば，$x = (1/2) + (1/\infty_{0})$，$m = \infty_{1}$として，$x^{m}$を考えるとき，不用意に，上記の（ii）と同じ方法を用いれば，

$$\begin{aligned} x^{m} &= r^{m} + mb \\ &= (1/2)^{\infty_1} + \infty_{1}(1/\infty_{0}) \\ &= \{1/(2^{\infty_1})\} + \infty_{1} \\ &= (1/\infty_{2}) + \infty_{1} = \infty_{1} \quad \cdots(\text{ア}) \end{aligned}$$

となる．しかし，一方で，$0 < x < 1$であることを考えれば，

$$x^{m} = x^{\infty_1} \leqq 1^{\infty_1} = 1 \quad \cdots(\text{イ})$$

となるのが自然であり，(ア)と(イ)は明らかに矛盾する．このような矛盾が生じないように，定義を定めなくてはならない．

$\boxed{3}$ 定義6-1（自然写像）

カージナル数から非負の整数への，次の全単射 κ を自然写像という．ただし，カージナル数nは $0 \leqq n < \aleph_0$ で，整数nは $0 \leqq n < \infty_0$ とする．

$$\kappa : \begin{cases} n \rightarrow n, \\ \\ \aleph_\alpha \rightarrow \infty_\alpha. \end{cases}$$

補足：定理1-1における写像 κ と，定義6-1における写像 κ は，同じ写像である．

$\boxed{4}$ 定義6-2（整数の整数乗）

非負の整数の累乗は，自然写像 κ に関して，カージナル数の累乗と同型とする．

例：$\forall \alpha \in W$，$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ であるので，$2^{\infty_\alpha} = \infty_{\alpha+1}$．（∵一般連続体仮説）

例：$\aleph_\alpha{}^0 = 1$ であるので，$\infty_\alpha{}^0 = 1$．

例：$\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1} & (\alpha \leqq \beta), \\ \\ \aleph_\alpha & (\alpha > \beta) \end{cases}$ であるので，$\infty_\alpha{}^{\infty_\beta} = \begin{cases} \infty_{\beta+1} & (\alpha \leqq \beta), \\ \\ \infty_\alpha & (\alpha > \beta). \end{cases}$

$\boxed{5}$ 定義6-3（整数の累乗根）

a，nは正の整数で，集合 $X = \{x : x^n = a,\ x \in \langle R \rangle\}$ が空集合でないとき，Xをaの累乗根（n乗根）といい，Xに属する正の数すべての集合 X^+ を，$\sqrt[n]{a}$ または $a^{1/n}$ で表す．

ただし，

（ｉ）X^+ が１つの元からなる集合 $\{x\}$ の場合は，xをaの確定累乗根（確定n乗根）といい，$\sqrt[n]{a} = x$ または $a^{1/n} = x$ とする．

（ⅱ）X^+ が２つ以上の元からなる集合の場合は，X^+ をaの不定累乗根（不定n乗根）といい，$\sqrt[n]{a} = X^+$ または $a^{1/n} = X^+$ とする．

例：aを正の整数とすれば，$\sqrt[1]{a}\ (= a)$ は確定累乗根である．

例：$x^2 = \infty_0$，$x \in \langle R \rangle$・・・(＊)とすれば，

$x \in R$ ならば，(＊)を満たすxは存在しない．

$x \in \zeta(-\infty_0) \cup \zeta(\infty_0)$ ならば，　$x = \infty_0$ または $x = -\infty_0$．

したがって，$X^+ = \{\infty_0\}$ であるので，$\sqrt{\infty_0}\ (= \infty_0)$ は確定累乗根である．

例：$x^{\infty_0} = \infty_1$，$x \in \langle R \rangle$ とすれば，$2^{\infty_0} = 3^{\infty_0} = \cdots = \infty_0{}^{\infty_0} = \infty_1{}^{\infty_0} = \infty_1$ より，

$\{2,\ 3,\ \cdots,\ \infty_0,\ \infty_1\} = X^+ = \sqrt[\infty_0]{\infty_1}$

であるので，$\sqrt[\infty_0]{\infty_1}$ は不定累乗根である．

$\boxed{6}$ 定義6-4（原始累乗根）

a が２以上の整数で，n が正の有限整数である累乗根 $\sqrt[n]{a}$ を原始累乗根という．

例：２以上の整数 a は，すべて原始累乗根である．実際，$a = \sqrt[1]{a}$ である．

$\boxed{7}$ 定義6-5（原始累乗根の累乗）

$\sqrt[n]{a}$ を原始累乗根，m を正の整数とするとき，

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{(a^m)}$$

とする．ここで，$\sqrt[n]{(a^m)}$ は，$a^{m/n}$ と表すこともある．

例：$(\sqrt[n]{2})^{\infty_\alpha} = \sqrt[n]{(2^{\infty_\alpha})}$（∵定義6-5）

$= \sqrt[n]{\infty_{\alpha+1}}$（∵定義6-2）

$= \infty_{\alpha+1}$．（∵定義6-3，n が正の有限整数）

$\boxed{8}$ 定理6-1（原始累乗根の性質）

$\sigma = \sqrt[n]{a}$ を原始累乗根とする．

（ⅰ）σ は確定累乗根である．

（ⅱ）$1 < \sigma \in \langle R \rangle^+$．

（ⅲ）$1 < \sigma \leqq \infty_{\alpha+1}$，すなわち，$2 \leqq a \leqq \infty_{\alpha+1}$ ならば，$\sigma^{\infty_\alpha} = \infty_{\alpha+1}$．

（ⅳ）$\infty_{\alpha+2} \leqq \sigma = \infty_\beta$，すなわち，$\infty_{\alpha+2} \leqq a = \infty_\beta$ ならば，$\sigma^{\infty_\alpha} = \infty_\beta$．

証明（ⅰ）方程式 $x^n = a$ ・・・(＊)において，n を正の有限整数とすれば，(＊)を満たす $x \in \langle R \rangle^+$ は，

（ア）$2 \leqq a < \infty_0$ ならば，$\sqrt[n]{a}$ だけ，

（イ）$a = \infty_\beta$ ならば，∞_β だけ

である．したがって，σ は確定累乗根である■

（ⅱ）n が正の有限整数より，

（ア）$2 \leqq a < \infty_0$ ならば，定理4-4より，$1 < \sqrt[n]{2} \leqq \sqrt[n]{a} = \sigma \in R^+$．

（イ）$a = \infty_\beta$ ならば，$\sigma = \sqrt[n]{\infty_\beta} = \infty_\beta \in \zeta(\infty_0)$■

（ⅲ）$\sigma^{\infty_\alpha} = (\sqrt[n]{a})^{\infty_\alpha} = \sqrt[n]{(a^{\infty_\alpha})}$（∵定義6-5）

$= \sqrt[n]{\infty_{\alpha+1}}$（∵定義6-2，$2 \leqq a \leqq \infty_{\alpha+1}$）

$= \infty_{\alpha+1}$．（∵定義6-3，n が正の有限整数）■

（ⅳ）$\sigma^{\infty_\alpha} = (\sqrt[n]{a})^{\infty_\alpha} = \sqrt[n]{(a^{\infty_\alpha})}$（∵定義6-5）

$= \sqrt[n]{\infty_\beta}$（∵定義6-2，$\infty_{\alpha+2} \leqq a = \infty_\beta$）

$= \infty_\beta$．（∵定義6-3，n が正の有限整数）■

$\boxed{9}$ 定義6-6（原始累乗）

有限拡大実数すべての領域を$\mathfrak{D}$とすれば，

$$\mathfrak{D}^{+}=\{x : 1/\infty_0 < x < \infty_0\}$$

である．このとき，次の２種類の累乗「σのτ乗：$\sigma^{Ⓐ\tau}$」を原始累乗という．ただし，記号“Ⓐ”は，その演算が原始累乗であることを表す．

（ｉ）「$1+(1/\infty_0)<\sigma\in\mathfrak{D}^{+}$，$\tau\in\mathfrak{D}^{+}$」の累乗．

$$\sigma=r+b,\ 「1<r\in R^{+},\ b\in\Pi_0」;$$
$$\tau=s+c,\ 「0<s\in R^{+},\ c\in\Pi_0」$$

のとき，$\sigma^{Ⓐ\tau}=r^{s}+(b+c)$とする．（定理4-4，定義2-9を用いる）

（ⅱ）「$\sigma={}^{n}\sqrt{a}$は原始累乗根，τは正の整数」の累乗．（定義6-5を用いる）

例：$\pi^{Ⓐ\sqrt{2}}=\pi^{\sqrt{2}}$．（∵定義6-6の（ｉ））

例：$\{\pi+(1/\infty_{\alpha})\}^{Ⓐ\sqrt{2}+(1/\infty\beta)}=\pi^{\sqrt{2}}+(1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}})$．（∵定義6-6の（ｉ））

例：$\{\pi+(1/\infty_{\alpha})\}^{Ⓐ\sqrt{2}-(1/\infty\alpha)}=\pi^{\sqrt{2}}+\Pi_{\alpha}$．（∵定義6-6の（ｉ））

例：$({}^{3}\sqrt{2})^{Ⓐ\infty\alpha}={}^{3}\sqrt{(2^{\infty\alpha})}={}^{3}\sqrt{\infty_{\alpha+1}}=\infty_{\alpha+1}$．（∵定義6-6の（ⅱ））

例：$\infty_{\alpha}{}^{Ⓐ\sqrt{5}+(1/\infty\beta)}$は定義されていない．

補足：σ，τが，定義6-6の（ⅱ）に該当する場合の中で，σ，$\tau\in\mathfrak{D}^{+}$の場合は，（ｉ）にも該当するが，どちらに該当するとしても，定義6-5より，その演算結果は同じである．

例えば，$(\sqrt{2})^{Ⓐ3}$の演算は，（ｉ）と（ⅱ）の両方に該当するが，

（ｉ）に従えば，$(\sqrt{2})^{Ⓐ3}=(\sqrt{2})^{3}=\sqrt{8}$．（∵定理4-4）

（ⅱ）に従えば，$(\sqrt{2})^{Ⓐ3}=\sqrt{(2^{3})}=\sqrt{8}$．（∵定義6-5）

$\boxed{10}$ 定義6-7（累乗）

$$1+(1/\infty_0)<x\in D^{+},\ 1/\infty_0<m\in D^{+}$$

のとき，

$$1+(1/\infty_0)<\sigma_1\leqq x\leqq\sigma_2,\ 1/\infty_0<\tau_1\leqq m\leqq\tau_2,\ \sigma_1{}^{Ⓐ\tau 1}=\sigma_2{}^{Ⓐ\tau 2}$$

となる

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \tau_1,\ \tau_2\in D^{+}$$

が存在するならば，

$$x^{m}=\sigma_1{}^{Ⓐ\tau 1}$$

とする． このとき，σ_1，σ_2をxの原始底，τ_1，τ_2をmの原始指数という．

例：$x=\infty_{\alpha}$，$m=\sqrt{5}+(1/\infty_{\beta})$とするとき，

xの原始底を $\sigma_1=\infty_{\alpha}\leqq x\leqq\infty_{\alpha}=\sigma_2$，

mの原始指数を $\tau_1=2\leqq m\leqq 3=\tau_2$

とすれば，

$$\sigma_1{}^{Ⓐ\tau 1}=\infty_{\alpha}{}^{Ⓐ2}=\infty_{\alpha}=\infty_{\alpha}{}^{Ⓐ3}=\sigma_2{}^{Ⓐ\tau 2}$$

となるので，$\infty_{\alpha}{}^{\sqrt{5}+(1/\infty\beta)}=\infty_{\alpha}$である．

$\boxed{11}$ 定理6-2（累乗の一意性）

$1+(1/\infty_0)<x\in D^+$，$1/\infty_0<m\in D^+$のとき，

$$1+(1/\infty_0)<\sigma_{11}\leqq x\leqq\sigma_{12},\quad 1/\infty_0<\tau_{11}\leqq m\leqq\tau_{12},$$

$$\sigma_{11}{}^{\circledwedge\tau_{11}}=\sigma_{12}{}^{\circledwedge\tau_{12}}\quad\cdots(*1)$$

$$1+(1/\infty_0)<\sigma_{21}\leqq x\leqq\sigma_{22},\quad 1/\infty_0<\tau_{21}\leqq m\leqq\tau_{22},$$

$$\sigma_{21}{}^{\circledwedge\tau_{21}}=\sigma_{22}{}^{\circledwedge\tau_{22}}\quad\cdots(*2)$$

が同時に成り立つならば，$\sigma_{11}{}^{\circledwedge\tau_{11}}=\sigma_{21}{}^{\circledwedge\tau_{21}}$である．

証明（ⅰ）「$x=\infty_\alpha$，$m=\infty_\beta$」の場合：

関係する原始累乗は，定義6-6の（ⅱ）だけである．

$\alpha<\beta$ならば，

（＊1）が成り立つのは，

$1+(1/\infty_0)<\sigma_{11}\leqq\infty_\alpha\leqq\sigma_{12}\leqq\infty_{\beta+1}$，$\tau_{11}=\infty_\beta=\tau_{12}$のときだけである．

（＊2）が成り立つのは，

$1+(1/\infty_0)<\sigma_{21}\leqq\infty_\alpha\leqq\sigma_{22}\leqq\infty_{\beta+1}$，$\tau_{21}=\infty_\beta=\tau_{22}$のときだけである．

ゆえに，$\tau_{11}=\tau_{21}=\infty_\beta$であり，$\sigma_{11}{}^{\circledwedge\tau_{11}}=\infty_{\beta+1}=\sigma_{21}{}^{\circledwedge\tau_{21}}$を得る．

$\alpha>\beta$ならば，

（＊1）が成り立つのは，

$\sigma_{11}=\infty_\alpha=\sigma_{12}$，$1/\infty_0<\tau_{11}\leqq\infty_\beta\leqq\tau_{12}<\infty_\alpha$のときだけである．

（＊2）が成り立つのは，

$\sigma_{21}=\infty_\alpha=\sigma_{22}$，$1/\infty_0<\tau_{21}\leqq\infty_\beta\leqq\tau_{22}<\infty_\alpha$のときだけである．

ゆえに，$\sigma_{11}=\sigma_{21}=\infty_\alpha$であり，$\sigma_{11}{}^{\circledwedge\tau_{11}}=\infty_\alpha=\sigma_{21}{}^{\circledwedge\tau_{21}}$を得る．

$\alpha=\beta$ならば，

（＊1）が成り立つのは，

$1+(1/\infty_0)<\sigma_{11}\leqq\infty_\alpha\leqq\sigma_{12}\leqq\infty_{\alpha+1}$，$\tau_{11}=\infty_\alpha=\tau_{12}$のときだけである．

（＊2）が成り立つのは，

$1+(1/\infty_0)<\sigma_{21}\leqq\infty_\alpha\leqq\sigma_{22}\leqq\infty_{\alpha+1}$，$\tau_{21}=\infty_\alpha=\tau_{22}$のときだけである．

ゆえに，$\tau_{11}=\tau_{21}=\infty_\alpha$であり，$\sigma_{11}{}^{\circledwedge\tau_{11}}=\infty_{\alpha+1}=\sigma_{21}{}^{\circledwedge\tau_{21}}$を得る．

（ⅱ）「$x=\infty_\alpha$，$m\in\mathcal{D}^+$」の場合：

関係する原始累乗は，定義6-6の（ⅱ）だけであり，mは正の有限整数である．

（＊1）が成り立つのは，$\sigma_{11}=\infty_\alpha=\sigma_{12}$，$0<\tau_{11}\leqq m\leqq\tau_{12}<\infty_\alpha$のときだけである．

（＊2）が成り立つのは，$\sigma_{21}=\infty_\alpha=\sigma_{22}$，$0<\tau_{21}\leqq m\leqq\tau_{22}<\infty_\alpha$のときだけである．

ゆえに，$\sigma_{11}=\sigma_{21}=\infty_\alpha$であり，$\sigma_{11}{}^{\circledwedge\tau_{11}}=\infty_\alpha=\sigma_{21}{}^{\circledwedge\tau_{21}}$を得る．

（ⅲ）「$1+(1/\infty_0)<x\in\mathcal{D}^+$，$m=\infty_\beta$」の場合：

関係する原始累乗は，定義6-6の（ⅱ）だけであり，xは$1<x\in R^+$なる原始累乗根である．

（＊1）が成り立つのは，$1<\sigma_{11}\leqq x\leqq\sigma_{12}\leqq\infty_{\beta+1}$，$\tau_{11}=\infty_\beta=\tau_{12}$のときだけである．

（＊2）が成り立つのは，$1<\sigma_{21}\leqq x\leqq\sigma_{22}\leqq\infty_{\beta+1}$，$\tau_{21}=\infty_\beta=\tau_{22}$のときだけである．

ゆえに，$\tau_{11}=\tau_{21}=\infty_\beta$であり，$\sigma_{11}{}^{\circledwedge\tau_{11}}=\infty_{\beta+1}=\sigma_{21}{}^{\circledwedge\tau_{21}}$を得る．

(ⅳ)「$1+(1/\infty_0)<x\in\mathfrak{D}^+$, $m\in\mathfrak{D}^+$」の場合：

関係する原始累乗は，定義6-6の(ⅰ)だけであると考えてよいので，次のように表すことができる．

$$x=r+b,\ 「1<r\in R^+,\ b\in\Pi_0」:$$
$$\sigma_{11}=r_{11}+b_{11},\ 「1<r_{11}\in R^+,\ b_{11}\in\Pi_0」.$$
$$\sigma_{12}=r_{12}+b_{12},\ 「1<r_{12}\in R^+,\ b_{12}\in\Pi_0」.$$
$$\sigma_{21}=r_{21}+b_{21},\ 「1<r_{21}\in R^+,\ b_{21}\in\Pi_0」.$$
$$\sigma_{22}=r_{22}+b_{22},\ 「1<r_{22}\in R^+,\ b_{22}\in\Pi_0」.$$
$$m=s+c,\ 「0<s\in R^+,\ c\in\Pi_0」:$$
$$\tau_{11}=s_{11}+c_{11},\ 「0<s_{11}\in R^+,\ c_{11}\in\Pi_0」.$$
$$\tau_{12}=s_{12}+c_{12},\ 「0<s_{12}\in R^+,\ c_{12}\in\Pi_0」.$$
$$\tau_{21}=s_{21}+c_{21},\ 「0<s_{21}\in R^+,\ c_{21}\in\Pi_0」.$$
$$\tau_{22}=s_{22}+c_{22},\ 「0<s_{22}\in R^+,\ c_{22}\in\Pi_0」.$$

ここで，

$$1+(1/\infty_0)<r_{11}+b_{11}\leqq r_{12}+b_{12}\quad\cdots①$$
$$1/\infty_0<s_{11}+c_{11}\leqq s_{12}+c_{12}\quad\cdots②$$
$$r_{11}^{s11}+(b_{11}+c_{11})=r_{12}^{s12}+(b_{12}+c_{12})\quad\cdots③$$

が同時に成り立つ条件を求める．

③において，$b_{11}+c_{11}$と$b_{12}+c_{12}$は無限小拡大実数，または，不定数Π_αであるので，$r_{11}^{s11}=r_{12}^{s12}$，すなわち，

$$r_{11}=r=r_{12},\qquad s_{11}=s=s_{12}$$

(∵①より$r_{11}\leqq r_{12}$，②より$s_{11}\leqq s_{12}$）でなくてはならない．したがって，

①より，$r+b_{11}\leqq r+b_{12}$.

②より，$s+c_{11}\leqq s+c_{12}$.

③より，$r^s+(b_{11}+c_{11})=r^s+(b_{12}+c_{12})$

であるので，３つの式：

$$b_{11}\leqq b_{12},\qquad c_{11}\leqq c_{12},\qquad b_{11}+c_{11}=b_{12}+c_{12}$$

が同時に成り立つ条件を求めればよい． ここで，

「$b_{11}<b_{12}$, $c_{11}<c_{12}$」ならば，

定理2-25より，$b_{11}+c_{11}<b_{12}+c_{12}$.

「$b_{11}=b_{12}=0$, $c_{11}<c_{12}$」ならば，

明らかに，$b_{11}+c_{11}<b_{12}+c_{12}$.

「$b_{11}<b_{12}$, $c_{11}=c_{12}=0$」ならば，

明らかに，$b_{11}+c_{11}<b_{12}+c_{12}$

であるので，これらの場合は，３つの式が同時に成り立つことはない．

「$b_{11}=b_{12}=1/\infty_\alpha$, $c_{11}<c_{12}$, $b_{11}+c_{11}=b_{12}+c_{12}$」ならば，

定理3-3の(ⅲ)より，$c_{11},\ c_{12}\in(\Pi_\alpha]$ $\cdots$④

「$b_{11}=b_{12}=-(1/\infty_\alpha)$, $c_{11}<c_{12}$, $b_{11}+c_{11}=b_{12}+c_{12}$」ならば，

定理3-3の(ⅳ)より，$c_{11},\ c_{12}\in[\Pi_\alpha)$ $\cdots$⑤

「$b_{11}<b_{12}$, $c_{11}=c_{12}=1/\infty_\alpha$, $b_{11}+c_{11}=b_{12}+c_{12}$」ならば，

定理3-3の(ⅲ)より，b_{11}，$b_{12} \in (\Pi_\alpha]$ ・・・⑥

「$b_{11} < b_{12}$，$c_{11} = c_{12} = -(1/\infty_\alpha)$，$b_{11} + c_{11} = b_{12} + c_{12}$」ならば，

定理3-3の(ⅳ)より，b_{11}，$b_{12} \in [\Pi_\alpha)$ ・・・⑦

であるので，３つの式が同時に成り立つ条件は，④～⑦のいずれかに該当することである．

したがって，(＊１)が成り立つのは，次の(ア)～(エ)のいずれかである．

(ア) $r_{11} = r = r_{12}$，$s_{11} = s = s_{12}$，
$b_{11} = b_{12} = 1/\infty_\alpha$，$c_{11}$，$c_{12} \in (\Pi_\alpha]$．

(イ) $r_{11} = r = r_{12}$，$s_{11} = s = s_{12}$，
$c_{11} = c_{12} = 1/\infty_\alpha$，$b_{11}$，$b_{12} \in (\Pi_\alpha]$．

(ウ) $r_{11} = r = r_{12}$，$s_{11} = s = s_{12}$，
$b_{11} = b_{12} = -(1/\infty_\alpha)$，$c_{11}$，$c_{12} \in [\Pi_\alpha)$．

(エ) $r_{11} = r = r_{12}$，$s_{11} = s = s_{12}$，
$c_{11} = c_{12} = -(1/\infty_\alpha)$，$b_{11}$，$b_{12} \in [\Pi_\alpha)$．

同様にして，(＊２)が成り立つのは，次の(オ)～(ク)のいずれかである．

(オ) $r_{21} = r = r_{22}$，$s_{21} = s = s_{22}$，
$b_{21} = b_{22} = 1/\infty_\alpha$，$c_{21}$，$c_{22} \in (\Pi_\alpha]$．

(カ) $r_{21} = r = r_{22}$，$s_{21} = s = s_{22}$，
$c_{21} = c_{22} = 1/\infty_\alpha$，$b_{21}$，$b_{22} \in (\Pi_\alpha]$．

(キ) $r_{21} = r = r_{22}$，$s_{21} = s = s_{22}$，
$b_{21} = b_{22} = -(1/\infty_\alpha)$，$c_{21}$，$c_{22} \in [\Pi_\alpha)$．

(ク) $r_{21} = r = r_{22}$，$s_{21} = s = s_{22}$，
$c_{21} = c_{22} = -(1/\infty_\alpha)$，$b_{21}$，$b_{22} \in [\Pi_\alpha)$．

ここで，それぞれの場合における，$\sigma_{11}{}^{\owedge\tau_{11}}$と$\sigma_{21}{}^{\owedge\tau_{21}}$の値を求めれば，

(ア)と(オ)の場合は，$\sigma_{11}{}^{\owedge\tau_{11}} = r^s + (1/\infty_\alpha) = \sigma_{21}{}^{\owedge\tau_{21}}$．

(ア)と(カ)の場合は，$\sigma_{11}{}^{\owedge\tau_{11}} = r^s + (1/\infty_\alpha) = \sigma_{21}{}^{\owedge\tau_{21}}$．

(ア)と(キ)の場合は，

　(ア)より $b = 1/\infty_\alpha$，(キ)より $b = -(1/\infty_\alpha)$となり，この場合は存在しない．

(ア)と(ク)の場合は，

　(ア)より $b = 1/\infty_\alpha$，(ク)より $b \neq 1/\infty_\alpha$となり，この場合は存在しない．

(イ)と(オ)の場合は，$\sigma_{11}{}^{\owedge\tau_{11}} = r^s + (1/\infty_\alpha) = \sigma_{21}{}^{\owedge\tau_{21}}$．

(イ)と(カ)の場合は，$\sigma_{11}{}^{\owedge\tau_{11}} = r^s + (1/\infty_\alpha) = \sigma_{21}{}^{\owedge\tau_{21}}$．

(イ)と(キ)の場合は，

　(イ)より $c = 1/\infty_\alpha$，(キ)より $c \neq 1/\infty_\alpha$となり，この場合は存在しない．

(イ)と(ク)の場合は，

　(イ)より $c = 1/\infty_\alpha$，(ク)より $c = -(1/\infty_\alpha)$となり，この場合は存在しない．

(ウ)と(オ)の場合は，

　(ウ)より $b = -(1/\infty_\alpha)$，(オ)より $b = 1/\infty_\alpha$となり，この場合は存在しない．

(ウ)と(カ)の場合は，

　(ウ)より $b = -(1/\infty_\alpha)$，(カ)より $b \neq -(1/\infty_\alpha)$となり，この場合は存在しない．

(ウ)と(キ)の場合は，$\sigma_{11}{}^{\owedge\tau_{11}} = r^s - (1/\infty_\alpha) = \sigma_{21}{}^{\owedge\tau_{21}}$．

(ウ)と(ク)の場合は，$\sigma_{11}{}^{\text{Ⓐ}\tau 11} = r^{s} - (1/\infty_{\alpha}) = \sigma_{21}{}^{\text{Ⓐ}\tau 21}$.

(エ)と(オ)の場合は，

(エ)より $c = -(1/\infty_{\alpha})$，(オ)より $c \neq -(1/\infty_{\alpha})$となり，この場合は存在しない．

(エ)と(カ)の場合は，

(エ)より $c = -(1/\infty_{\alpha})$，(カ)より $c = 1/\infty_{\alpha}$となり，この場合は存在しない．

(エ)と(キ)の場合は，$\sigma_{11}{}^{\text{Ⓐ}\tau 11} = r^{s} - (1/\infty_{\alpha}) = \sigma_{21}{}^{\text{Ⓐ}\tau 21}$.

(エ)と(ク)の場合は，$\sigma_{11}{}^{\text{Ⓐ}\tau 11} = r^{s} - (1/\infty_{\alpha}) = \sigma_{21}{}^{\text{Ⓐ}\tau 21}$■

$\boxed{12}$ 定理6-3（累乗と原始累乗の関係）

定義6-7は定義6-6の拡張である．すなわち，

$$x^{\text{Ⓐ}m}\text{が定義されているならば，}\ x^{m} = x^{\text{Ⓐ}m}.$$

証明　xの原始底を $x \leqq x \leqq x$，mの原始指数を $m \leqq m \leqq m$とする．条件より，$x^{\text{Ⓐ}m}$が定義されているので，定義6-7より，$x^{m} = x^{\text{Ⓐ}m}$を得る■

$\boxed{13}$ 定理6-4

$m \in \mathcal{D}^{+}$とすれば，$\infty_{\alpha}{}^{m} = \infty_{\alpha}$である．

証明　mの原始指数を「$1/n \leqq m \leqq n$，nは正の有限整数」とすることができる．ここで，$\infty_{\alpha}{}^{\text{Ⓐ}(1/n)} = \infty_{\alpha}{}^{\text{Ⓐ}n} = \infty_{\alpha}$であるので，定理は成り立つ■

$\boxed{14}$ 定義6-8（累乗の拡張）

x，$m \in D^{+} \cup \{0\}$とするとき，x^{m}を次のように定める．

（i）$m = 0$ならば，$x^{m} = 1$.

（ii）$1 + (1/\infty_{0}) < x$，$1/\infty_{0} < m$ならば，定義6-7に従う．

（iii）$x = 1 + (1/\infty_{\alpha})$，$1/\infty_{0} < m$ならば，$x^{m} = 1 + m(1/\infty_{\alpha})$.

（iv）$x = 1$，$0 < m$ならば，$x^{m} = 1$.

（v）$0 < x < 1$，$1/\infty_{0} < m$ならば，$x^{m} = \{(x^{-1})^{m}\}^{-1}$.

（vi）$x = 0$，$0 < m$ならば，$x^{m} = 0$.

ただし，記号x^{-1}は，

$x = \infty_{\alpha}$ならば，$x^{-1} = 1/\infty_{\alpha}$.

$x = 1/\infty_{\alpha}$ならば，$x^{-1} = \infty_{\alpha}$.

$x = r + b$，「$r \in R^{+}$，$b \in \Pi_{0}$」ならば，

$$x^{-1} = r^{-1} - b \quad (r^{-1}\text{は}r\text{の逆数})$$

を表すものとする．

例：$\{2 + (1/\infty_{0})\}^{3 + (1/\infty 1)} = 2^{3} + \{(1/\infty_{0}) + (1/\infty_{1})\}$（∵定義6-8の(ii)）

$= 8 + (1/\infty_{0})$.

例：$x = (1/\pi) + (1/\infty_{\alpha})$ならば，$0 < x < 1$であるので，

$x^{\infty\beta} = \{(x^{-1})^{\infty\beta}\}^{-1} = [\{\pi - (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}]^{-1}$（∵定義6-8の(v)）

$= \infty_{\beta+1}{}^{-1}$（∵定義6-8の(ii)）

$= 1/\infty_{\beta+1}$.

$\boxed{15}$ 定理6-5（$x \in D^{+}$における$x^{\infty\alpha}$の値）

（ア）$\infty_{\alpha+2} \leqq x = \infty_{\beta}$ならば，$x^{\infty\alpha} = \infty_{\beta}$.

（イ）$1 + (1/\infty_{0}) < x \leqq \infty_{\alpha+1}$ならば，$x^{\infty\alpha} = \infty_{\alpha+1}$.

（ウ）$1 + (1/\infty_{\alpha}) < x \leqq 1 + (1/\infty_{0})$ならば，$x^{\infty\alpha} = \infty_{\alpha}$.

（エ）$x = 1 + (1/\infty_{\alpha})$ならば，

$$x^{\infty\alpha} = 1 + \Sigma_{\alpha} = \{ t : 1 + (1/\infty_{\alpha}) \leqq t \leqq \infty_{\alpha} \}.$$

（オ）$1 < x = 1 + (1/\infty_{\beta}) \leqq 1 + (1/\infty_{\alpha+1})$ならば，$x^{\infty\alpha} = 1 + (1/\infty_{\beta})$.

（カ）$x = 1$ならば，$x^{\infty\alpha} = 1$.

（キ）$1 - (1/\infty_{\alpha+1}) \leqq x = 1 - (1/\infty_{\beta}) < 1$ならば，$x^{\infty\alpha} = 1 - (1/\infty_{\beta})$.

（ク）$x = 1 - (1/\infty_{\alpha})$ならば，

$$x^{\infty\alpha} = (1 + \Sigma_{\alpha})^{-1} = \{ (1 + t)^{-1} : t \in \Sigma_{\alpha} \}$$
$$= \{ t : 1/\infty_{\alpha} \leqq t \leqq 1 - (1/\infty_{\alpha}) \}.$$

（ケ）$1 - (1/\infty_{0}) \leqq x < 1 - (1/\infty_{\alpha})$ならば，$x^{\infty\alpha} = 1/\infty_{\alpha}$.

（コ）$1/\infty_{\alpha+1} \leqq x < 1 - (1/\infty_{0})$ならば，$x^{\infty\alpha} = 1/\infty_{\alpha+1}$.

（サ）$0 < x = 1/\infty_{\beta} \leqq 1/\infty_{\alpha+2}$ならば，$x^{\infty\alpha} = 1/\infty_{\beta}$.

証明（ア）$\aleph_{\alpha+2} \leqq \aleph_{\beta}$ならば，${\aleph_{\beta}}^{\aleph_{\alpha}} = \aleph_{\beta}$であるので明らか.

（イ）$1 + (1/\infty_{0}) < \sigma \leqq x \leqq \infty_{\alpha+1}$となる原始累乗根$\sigma$が存在し，

$$\sigma^{\textcircled{\scriptsize\triangle}\infty\alpha} = \infty_{\alpha+1} = {\infty_{\alpha+1}}^{\textcircled{\scriptsize\triangle}\infty\alpha}.$$

（ウ）$x = 1 + (1/\infty_{\beta})$とすれば，$0 \leqq \beta < \alpha$であるので，

$$x^{\infty\alpha} = 1 + \infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta}) = 1 + \infty_{\alpha} = \infty_{\alpha}.$$

（エ）$x^{\infty\alpha} = 1 + \infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha}) = 1 + \Sigma_{\alpha}$.

（オ）$x^{\infty\alpha} = 1 + \infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta}) = 1 + (1/\infty_{\beta})$.（$\because \alpha + 1 \leqq \beta$）

（カ）定義6-8の（iv）より明らか.

（キ）
$$\begin{aligned} x^{\infty\alpha} &= \{(x^{-1})^{\infty\alpha}\}^{-1} = [\{1 + (1/\infty_{\beta})\}^{\infty\alpha}]^{-1} \\ &= \{1 + (1/\infty_{\beta})\}^{-1} \quad (\because \alpha + 1 \leqq \beta) \\ &= 1 - (1/\infty_{\beta}). \end{aligned}$$

（ク）
$$\begin{aligned} x^{\infty\alpha} &= \{(x^{-1})^{\infty\alpha}\}^{-1} = [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}]^{-1} \\ &= (1 + \Sigma_{\alpha})^{-1} \\ &= \{ t : 1/\infty_{\alpha} \leqq t \leqq 1 - (1/\infty_{\alpha}) \}. \end{aligned}$$

（ケ）$x = 1 - (1/\infty_{\beta})$とすれば，$0 \leqq \beta < \alpha$であるので，

$$\begin{aligned} x^{\infty\alpha} &= \{(x^{-1})^{\infty\alpha}\}^{-1} = [\{1 + (1/\infty_{\beta})\}^{\infty\alpha}]^{-1} \\ &= (1 + \infty_{\alpha})^{-1} \\ &= {\infty_{\alpha}}^{-1} \\ &= 1/\infty_{\alpha}. \end{aligned}$$

（コ）
$$\begin{aligned} x^{\infty\alpha} &= \{(x^{-1})^{\infty\alpha}\}^{-1} = {\infty_{\alpha+1}}^{-1} \quad (\because 1 + (1/\infty_{0}) < x^{-1} \leqq \infty_{\alpha+1}) \\ &= 1/\infty_{\alpha+1}. \end{aligned}$$

（サ）
$$\begin{aligned} x^{\infty\alpha} &= \{(x^{-1})^{\infty\alpha}\}^{-1} = ({\infty_{\beta}}^{\infty\alpha})^{-1} \\ &= {\infty_{\beta}}^{-1} \quad (\because \alpha + 2 \leqq \beta) \\ &= 1/\infty_{\beta} \blacksquare \end{aligned}$$

$\boxed{16}$ 定義6-9（「拡大実数の無限大乗根」すなわち「拡大実数の無限小乗」）

a は正の拡大実数とするとき，領域 $X=\{x : x^{\infty_\alpha} \geqslant a,\ x \in D^{+}\}$ を a の ∞_α 乗根といい，$\sqrt[\infty_\alpha]{a}$ または a^{1/∞_α} で表す．ただし，

（ｉ）記号「$x^{\infty_\alpha} \geqslant a$」は，

x^{∞_α} が確定数ならば $x^{\infty_\alpha}=a$．

x^{∞_α} が不定数ならば $a \in x^{\infty_\alpha}$

を表す．

（ⅱ）X が１つの元からなる領域 $\{x\}$ の場合は，x を a の確定 ∞_α 乗根といい，$\sqrt[\infty_\alpha]{a}=x$ または $a^{1/\infty_\alpha}=x$ とする．

（ⅲ）X が２つ以上の元からなる領域の場合は，X を a の不定 ∞_α 乗根といい，$\sqrt[\infty_\alpha]{a}=X$ または $a^{1/\infty_\alpha}=X$ とする．

例：定理6-5の(ウ)より，$1+(1/\infty_\alpha)<x \leqq 1+(1/\infty_0)$ ならば，$x^{\infty_\alpha}=\infty_\alpha$ であるので，$x^{\infty_\alpha} \geqslant \infty_\alpha$ である．

また，(エ)より，$x=1+(1/\infty_\alpha)$ ならば，$x^{\infty_\alpha}=1+\Sigma_\alpha$ であり，$\infty_\alpha \in 1+\Sigma_\alpha$ であるので，$x^{\infty_\alpha} \geqslant \infty_\alpha$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\sqrt[\infty_\alpha]{\infty_\alpha} &= \{x : x^{\infty_\alpha} \geqslant \infty_\alpha,\ x \in D^{+}\}\\ &= \{x : 1+(1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1+(1/\infty_0)\}.\end{aligned}$$

例：定理6-5の(ク)より，$x=1-(1/\infty_\alpha)$ ならば，

$$x^{\infty_\alpha}=(1+\Sigma_\alpha)^{-1}=\{t : 1/\infty_\alpha \leqq t \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}$$

であり，$1/\infty_\alpha \in (1+\Sigma_\alpha)^{-1}$ であるので，$x^{\infty_\alpha} \geqslant 1/\infty_\alpha$ である．

また，(ケ)より，$1-(1/\infty_0) \leqq x < 1-(1/\infty_\alpha)$ ならば，$x^{\infty_\alpha}=1/\infty_\alpha$ であるので，$x^{\infty_\alpha} \geqslant 1/\infty_\alpha$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\sqrt[\infty_\alpha]{(1/\infty_\alpha)} &= \{x : x^{\infty_\alpha} \geqslant 1/\infty_\alpha,\ x \in D^{+}\}\\ &= \{x : 1-(1/\infty_0) \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}.\end{aligned}$$

$\boxed{17}$ 定理6-6（$a \in D^{+}$ における $\sqrt[\infty_\alpha]{a}$ の値）

（ア）$\infty_{\alpha+2} \leqq a=\infty_\beta$ ならば，$\sqrt[\infty_\alpha]{a}=\sqrt[\infty_\alpha]{\infty_\beta}=\infty_\beta$．

（イ）$a=\infty_{\alpha+1}$ ならば，

$$\sqrt[\infty_\alpha]{a}=\sqrt[\infty_\alpha]{\infty_{\alpha+1}}=\{x : 1+(1/\infty_0)<x \leqq \infty_{\alpha+1}\}.$$

（ウ）$a=\infty_\alpha$ ならば，

$$\sqrt[\infty_\alpha]{a}=\sqrt[\infty_\alpha]{\infty_\alpha}=\{x : 1+(1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1+(1/\infty_0)\}.$$

（エ）$a \in \{1+[\Sigma_\alpha)\}$ ならば，$\sqrt[\infty_\alpha]{a}=1+(1/\infty_\alpha)$．

ただし，$1+[\Sigma_\alpha)=\{t : 1+(1/\infty_\alpha) \leqq t < \infty_\alpha\}$．

（オ）$1<a=1+(1/\infty_\beta) \leqq 1+(1/\infty_{\alpha+1})$ ならば，

$$\sqrt[\infty_\alpha]{a}=\sqrt[\infty_\alpha]{\{1+(1/\infty_\beta)\}}=1+(1/\infty_\beta).$$

（カ）$a=1$ ならば，$\sqrt[\infty_\alpha]{a}=\sqrt[\infty_\alpha]{1}=1$．

（キ）$1-(1/\infty_{\alpha+1}) \leqq a=1-(1/\infty_\beta)<1$ ならば，

$$\sqrt[\infty_\alpha]{a}=\sqrt[\infty_\alpha]{\{1-(1/\infty_\beta)\}}=1-(1/\infty_\beta).$$

（ク） $a \in \{1+[\Sigma_\alpha)\}^{-1}$ならば，$^{\infty\alpha}\sqrt{\ } a = 1-(1/\infty_\alpha)$．

ただし，$\{1+[\Sigma_\alpha)\}^{-1} = \{(1+x)^{-1} : x \in [\Sigma_\alpha)\}$

$= \{t : 1/\infty_\alpha < t \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}$．

（ケ） $a = 1/\infty_\alpha$ならば，

$^{\infty\alpha}\sqrt{\ } a = {}^{\infty\alpha}\sqrt{\ }(1/\infty_\alpha) = \{x : 1-(1/\infty_0) \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}$．

（コ） $a = 1/\infty_{\alpha+1}$ならば，

$^{\infty\alpha}\sqrt{\ } a = {}^{\infty\alpha}\sqrt{\ }(1/\infty_{\alpha+1}) = \{x : 1/\infty_{\alpha+1} \leqq x < 1-(1/\infty_0)\}$．

（サ） $0 < a = 1/\infty_\beta \leqq 1/\infty_{\alpha+2}$ならば，$^{\infty\alpha}\sqrt{\ } a = {}^{\infty\alpha}\sqrt{\ }(1/\infty_\beta) = 1/\infty_\beta$．

証明　定理6-5の(ア)～(サ)に，それぞれ，定義6-9を適用すればよい．ただし，(ウ)と(エ)，(ク)と(ケ)については，定義6-9の例を参照■

18 定理6-7

$0 < x$，$0 < m$ならば，$(x^{-1})^m = (x^m)^{-1}$が成り立つ．

証明（ⅰ） $0 < x < 1$の場合は，定義6-8の(ⅴ)より，$x^m = \{(x^{-1})^m\}^{-1}$であるので，

$$(x^m)^{-1} = [\{(x^{-1})^m\}^{-1}]^{-1} = (x^{-1})^m.$$

（ⅱ） $x = 1$の場合は，$x^{-1} = 1$であるので，定義6-8の(ⅳ)より明らか．

（ⅲ） $1 < x$の場合は，$y = x^{-1}$とすれば，$0 < y < 1$であるので，(ⅰ)より，

$$(y^{-1})^m = (y^m)^{-1}.$$

ここで，$y^{-1} = x$であるので，$x^m = \{(x^{-1})^m\}^{-1}$である．したがって，

$$(x^m)^{-1} = (x^{-1})^m$$■

19 定理6-8

$r \in R^+$，$s \in R^+$とすれば，次の式が成り立つ．

（ⅰ） $(r+\Pi_0)^{s+\Pi 0} = r^s + \Pi_0$．

（ⅱ） $(r+\Pi_1)^{s+\Pi 1} = r^s + \Pi_1$．

証明（ⅰ） $1 < r$ならば，

定理6-3より，$(r+\Pi_0)^{s+\Pi 0} = r^s + (\Pi_0+\Pi_0) = r^s + \Pi_0$．

$r = 1$ならば，

定義6-8の(ⅲ)より，$\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{s+\Pi 0} = 1+(1/\infty_\alpha)$．

定義6-8の(ⅳ)より，$1^{s+\Pi 0} = 1$．

定義6-8の(ⅴ)より，$\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{s+\Pi 0}$

$= [\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{s+\Pi 0}]^{-1}$

$= \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$= 1-(1/\infty_\alpha)$

であるので，$(1+\Pi_0)^{s+\Pi 0} = 1+\Pi_0 = 1^s + \Pi_0$．

$0 < r < 1$ならば，

定義6-8の(ⅴ)より，$(r+\Pi_0)^{s+\Pi 0}$

$= \{(r^{-1}-\Pi_0)^{s+\Pi 0}\}^{-1}$

$= \{(r^{-1}+\Pi_0)^{s+\Pi 0}\}^{-1}$

$= \{(r^{-1})^s + (\Pi_0+\Pi_0)\}^{-1}$

$$=\{(r^{s})^{-1}+\Pi_0\}^{-1}$$
$$=r^{s}-\Pi_0$$
$$=r^{s}+\Pi_0.$$

（ⅱ）Π_0をΠ_1に置き換えれば，（ｉ）と全く同じように証明される■

補足：定理6-8の（ｉ）は，「$r\in R^+$，$s\in R^+$とすれば，$\zeta(r)^{\zeta(s)}=\zeta(r^{s})$」が成り立つことを示している．この結果を導く定義6-8を定めることが，この章の目的であった．

$\boxed{20}$ 定義6-10（負の指数）

x，$m\in D^+$のとき，$x^{-m}=(x^{-1})^{m}$とする．（定義6-8を用いる）

$\boxed{21}$ 定理6-9（定理6-10の予備定理）

（ｉ）αが極限数（０以外で,直前の数が存在しない順序数）のときは,次の式が成り立つ．

$$\infty_\alpha{}^{\Pi\beta}=\begin{cases}\{\infty_\alpha\}\cup(1+\Pi_0)\cup\{1/\infty_\alpha\} & (\beta<\alpha),\\ 1+\Pi_0 & (\beta=\alpha),\\ 1+\Pi_\beta & (\beta>\alpha).\end{cases}$$

（ⅱ）αが極限数でないときは，次の式が成り立つ．

$$\infty_\alpha{}^{\Pi\beta}=\begin{cases}\Sigma_\alpha & (\beta<\alpha),\\ 1+\Pi_0 & (\beta=\alpha),\\ 1+\Pi_\beta & (\beta>\alpha).\end{cases}$$

証明　$\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$，$\infty_\alpha{}^{0}$，$\infty_\alpha{}^{-(1/\infty\gamma)}$の値を求めると，

$0\leqq\gamma<\alpha-1$ならば，$\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}=\infty_\alpha.$

$\gamma=\alpha-1$ならば，$\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}=\{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\}.$

$\gamma=\alpha$　ならば，$\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}=\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}.$

$\alpha+1\leqq\gamma$　ならば，$\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}=1+(1/\infty_\gamma).$

$\infty_\alpha{}^{0}=1.$

$\alpha+1\leqq\gamma$　ならば，$\infty_\alpha{}^{-(1/\infty\gamma)}=1-(1/\infty_\gamma).$

$\gamma=\alpha$　ならば，$\infty_\alpha{}^{-(1/\infty\gamma)}=\{x : 1-(1/\infty_0)\leqq x\leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}.$

$\gamma=\alpha-1$ならば，$\infty_\alpha{}^{-(1/\infty\gamma)}=\{x : 1/\infty_\alpha\leqq x<1-(1/\infty_0)\}.$

$0\leqq\gamma<\alpha-1$ならば，$\infty_\alpha{}^{-(1/\infty\gamma)}=1/\infty_\alpha.$

ゆえに，

αが極限数のとき，すなわち，$\gamma=\alpha-1$が存在しないときは，

$\beta<\alpha$ならば，$\bigcup_{b\in\Pi\beta}\infty_\alpha{}^{b}=\{\infty_\alpha\}\cup(1+\Pi_0)\cup\{1/\infty_\alpha\}.$

$\beta=\alpha$ならば，$\bigcup_{b\in\Pi\beta}\infty_\alpha{}^{b}=1+\Pi_0.$

$\beta>\alpha$ならば，$\bigcup_{b\in\Pi\beta}\infty_\alpha{}^{b}=1+\Pi_\beta.$

αが極限数でないときは，

$\beta<\alpha$ならば，$\bigcup_{b\in\Pi\beta}\infty_\alpha{}^{b}=\Sigma_\alpha.$

$\beta=\alpha$ならば，$\bigcup_{b\in\Pi\beta}\infty_\alpha{}^{b}=1+\Pi_0.$

$\beta>\alpha$ならば，$\bigcup_{b\in\Pi\beta}\infty_\alpha{}^{b}=1+\Pi_\beta$

を得る■

$\boxed{22}$ 定理6-10

次の不定数は，いずれも，D^{+}に等しい．

（ｉ）$(1+\Pi_0)^{\zeta(\infty 0)}$

（ⅱ）$\zeta(\infty_0)^{\Pi 0}$

（ⅲ）$(\Pi_0{}^{+})^{\Pi 0}$

証明（ｉ）定義6-8の（ⅲ）より，$\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\zeta(\infty 0)}=\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\}$.

定義6-8の（ⅳ）より，$1^{\zeta(\infty 0)}=1$.

定義6-8の（ｖ）より，

$$\begin{aligned}\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\zeta(\infty 0)} &=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\zeta(\infty 0)}]^{-1}\\ &=\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\}^{-1}\\ &=\{x : 0<x\leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}.\end{aligned}$$

ゆえに，

$$(1+\Pi_0)^{\zeta(\infty 0)}$$
$$=[\bigcup_{\alpha\in W}\{x : 0<x\leqq 1-(1/\infty_\alpha)\ \text{または}\ 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\}]\cup\{1\}=D^{+}\ \blacksquare$$

（ⅱ）極限順序数すべての領域をVとすれば，定理6-9より，

$$\infty_\alpha{}^{\Pi 0}=\begin{cases}1+\Pi_0 & (\alpha=0),\\ \begin{cases}\{\infty_\alpha\}\cup(1+\Pi_0)\cup\{1/\infty_\alpha\} & (0<\alpha\in V),\\ \Sigma_\alpha & (0<\alpha\in(W-V))\end{cases}\end{cases}$$

であり，

$$\forall\alpha\in V,\ (\{\infty_\alpha\}\cup(1+\Pi_0)\cup\{1/\infty_\alpha\})\subset\Sigma_\alpha\subset\Sigma_{\alpha+1}$$

であるので，

$$\begin{aligned}\zeta(\infty_0)^{\Pi 0} &=\bigcup_{\alpha\in W}(\infty_\alpha{}^{\Pi 0})\\ &=(1+\Pi_0)\cup(\bigcup_{\alpha\in(W-\{0\})}\Sigma_\alpha)\\ &=D^{+}\ \blacksquare\end{aligned}$$

（ⅲ）

$$\begin{aligned}(\Pi_0{}^{+})^{\Pi 0} &=\bigcup_{\alpha\in W}(1/\infty_\alpha)^{\Pi 0}\\ &=\bigcup_{\alpha\in W}(\infty_\alpha{}^{-1})^{\Pi 0}\\ &=\bigcup_{\alpha\in W}(\infty_\alpha{}^{-\Pi 0})\\ &=\bigcup_{\alpha\in W}(\infty_\alpha{}^{\Pi 0})\quad(\because -\Pi_0=\Pi_0)\\ &=\zeta(\infty_0)^{\Pi 0}\\ &=D^{+}.\quad(\because(\text{ii}))\ \blacksquare\end{aligned}$$

補足：定理6-10は，次の式が成り立つことを示している．

（ｉ）$\zeta(1)^{\zeta(\infty 0)}=D^{+}$.

（ⅱ）$\zeta(\infty_0)^{\zeta(0)}=D^{+}$.

（ⅲ）$\{\zeta(0)^{+}\}^{\zeta(0)}=D^{+}$.

そして，このことは，従来の極限計算において，1^{∞}，∞^{0}，0^{0}が，それぞれ，不定であることと一致する．

補足：第７章では指数法則について調べる．その際，定理 6-5 と定理 6-6 を用いて，実際に累乗を計算することになるので，この２つの定理を公式化しておく．

定理 6-5

以下の表は，拡大実数 x と $x^{\infty\alpha}$ の値の対比である．

条件	x	$x^{\infty\alpha}$
$\alpha+2\leqq\beta$	∞_β	∞_β
	$\infty_0\leqq x\leqq\infty_{\alpha+1}$	$\infty_{\alpha+1}$
１＜有限	$1+(1/\infty_0)<x<\infty_0$	$\infty_{\alpha+1}$
	$1+(1/\infty_\alpha)<x\leqq 1+(1/\infty_0)$	∞_α
	$1+(1/\infty_\alpha)$	$1+\Sigma_\alpha$
$\alpha<\beta$	$1+(1/\infty_\beta)$	$1+(1/\infty_\beta)$
	1	1
$\alpha<\beta$	$1-(1/\infty_\beta)$	$1-(1/\infty_\beta)$
	$1-(1/\infty_\alpha)$	$(1+\Sigma_\alpha)^{-1}$
	$1-(1/\infty_0)\leqq x<1-(1/\infty_\alpha)$	$1/\infty_\alpha$
０＜有限＜１	$1/\infty_0<x<1-(1/\infty_0)$	$1/\infty_{\alpha+1}$
	$1/\infty_{\alpha+1}\leqq x\leqq 1/\infty_0$	$1/\infty_{\alpha+1}$
$\alpha+2\leqq\beta$	$1/\infty_\beta$	$1/\infty_\beta$

定理 6-6

以下の表は，拡大実数 a と $a^{1/\infty\alpha}$ の値の対比である．

条件	a	$a^{1/\infty\alpha}$
$\alpha+2\leqq\beta$	∞_β	∞_β
	$\infty_{\alpha+1}$	$\{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_{\alpha+1}\}$
	∞_α	$\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}$
	$\infty_0\leqq a<\infty_\alpha$	$1+(1/\infty_\alpha)$
１＜有限	$1+(1/\infty_0)<a<\infty_0$	$1+(1/\infty_\alpha)$
	$1+(1/\infty_\alpha)\leqq a\leqq 1+(1/\infty_0)$	$1+(1/\infty_\alpha)$
$\alpha<\beta$	$1+(1/\infty_\beta)$	$1+(1/\infty_\beta)$
	1	1
$\alpha<\beta$	$1-(1/\infty_\beta)$	$1-(1/\infty_\beta)$
	$1-(1/\infty_0)\leqq a\leqq 1-(1/\infty_\alpha)$	$1-(1/\infty_\alpha)$
０＜有限＜１	$1/\infty_0<a<1-(1/\infty_0)$	$1-(1/\infty_\alpha)$
	$1/\infty_\alpha<a\leqq 1/\infty_0$	$1-(1/\infty_\alpha)$
	$1/\infty_\alpha$	$\{x : 1-(1/\infty_0)\leqq x\leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}$
	$1/\infty_{\alpha+1}$	$\{x : 1/\infty_{\alpha+1}\leqq x<1-(1/\infty_0)\}$
$\alpha+2\leqq\beta$	$1/\infty_\beta$	$1/\infty_\beta$

補足：（乗法・累乗の公式）

指数法則について調べるには，不定数を含む，乗法と累乗の演算が必要になるので，ここで，その演算公式を列記しておく．なお，公式の証明は，定義 1-3 の（ⅱ）に従って，実際に計算すれば得られる．ただし，Ａを不定数とすれば，$A^{-1}=\{a^{-1} : a\in A\}$とする．

（１） $\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\{1+(1/\infty_{\beta})\}=1+(1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}})$.

$$\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\{1-(1/\infty_{\beta})\}=\begin{cases} 1+(1/\infty_{\alpha}) & (\alpha<\beta), \\ 1+\Pi_{\alpha} & (\alpha=\beta), \\ 1-(1/\infty_{\beta}) & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

$\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\{1-(1/\infty_{\beta})\}=1-(1/\infty_{\min\{\alpha,\beta\}})$.

（２）
$$\begin{aligned}
A&=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\},\\
B&=\{x : 1+(1/\infty_{0})< x<\infty_{0}\},\\
C&=\{x : \infty_{0}\leqq x\leqq\infty_{\alpha}\},\\
D&=\{x : 1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\alpha})\},\\
E&=\{x : 1/\infty_{0}< x< 1-(1/\infty_{0})\},\\
F&=\{x : 1/\infty_{\alpha}\leqq x\leqq 1/\infty_{0}\}
\end{aligned}$$

とすれば，

$$A\{1+(1/\infty_{\beta})\}=\begin{cases} A & (\alpha\leqq\beta), \\ \{x : 1+(1/\infty_{\beta})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\} & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

$$A\{1-(1/\infty_{\beta})\}=\begin{cases} A & (\alpha\leqq\beta), \\ \{x : 1-(1/\infty_{\beta})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\} & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

$B\{1\pm(1/\infty_{\beta})\}=B$.

$C\{1\pm(1/\infty_{\beta})\}=C$.

$$D\{1+(1/\infty_{\beta})\}=\begin{cases} D & (\alpha<\beta), \\ \{x : 1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{\beta})\} & (\alpha\geqq\beta). \end{cases}$$

$$D\{1-(1/\infty_{\beta})\}=\begin{cases} D & (\alpha\leqq\beta), \\ \{x : 1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\beta})\} & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

$E\{1\pm(1/\infty_{\beta})\}=E$.

$F\{1\pm(1/\infty_{\beta})\}=F$.

$A\infty_{\beta}=\infty_{\beta}$.

$B\infty_{\beta}=\infty_{\beta}$.

$$C\infty_{\beta}=\begin{cases} \infty_{\beta} & (\alpha\leqq\beta), \\ \{x : \infty_{\beta}\leqq x\leqq\infty_{\alpha}\} & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

$D\infty_\beta=\infty_\beta$.

$E\infty_\beta=\infty_\beta$.

$$F\infty_\beta=\begin{cases}\infty_\beta & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1/\infty_\alpha\leqq x\leqq\infty_\beta\} & (\alpha\geqq\beta).\end{cases}$$

$A(1/\infty_\beta)=1/\infty_\beta$.

$B(1/\infty_\beta)=1/\infty_\beta$.

$$C(1/\infty_\beta)=\begin{cases}1/\infty_\beta & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1/\infty_\beta\leqq x\leqq\infty_\alpha\} & (\alpha\geqq\beta).\end{cases}$$

$D(1/\infty_\beta)=1/\infty_\beta$.

$E(1/\infty_\beta)=1/\infty_\beta$.

$$F(1/\infty_\beta)=\begin{cases}1/\infty_\beta & (\alpha\leqq\beta),\\ \{x : 1/\infty_\alpha\leqq x\leqq 1/\infty_\beta\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$AA=A$, $AB=B$, $AC=C$, $AD=1+\Pi_0$, $AE=E$, $AF=F$,

$BB=B$, $BC=C$, $BD=B$, $BE=\mathfrak{D}^+$, $BF=F$,

$CC=C$, $CD=C$, $CE=C$, $CF=\Sigma_\alpha$,

$DD=D$, $DE=E$, $DF=F$,

$EE=E$, $EF=F$,

$FF=F$,

$A^{-1}=D$, $B^{-1}=E$, $C^{-1}=F$.

(3) $$A=\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\},$$
$$A^{-1}=\{x : 1-(1/\infty_0)\leqq x\leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}$$

とすれば,

$$A^{-1}\{1+(1/\infty_\beta)\}=\begin{cases}A^{-1} & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1-(1/\infty_0)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_\beta)\} & (\alpha\geqq\beta).\end{cases}$$

$$A^{-1}\{1-(1/\infty_\beta)\}=\begin{cases}A^{-1} & (\alpha\leqq\beta),\\ \{x : 1-(1/\infty_0)\leqq x\leqq 1-(1/\infty_\beta)\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$AA^{-1}=DD^{-1}=1+\Pi_0.$$
$$BB^{-1}=EE^{-1}=\mathfrak{D}^+.$$
$$CC^{-1}=FF^{-1}=\Sigma_\alpha.$$

(4)
$$X=\{x : 1+(1/\infty_0)< x \leqq \infty_\alpha\},$$
$$A=\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x \leqq 1+(1/\infty_0)\},$$
$$B=\{x : 1+(1/\infty_0)< x < \infty_0\},$$
$$C=\{x : \infty_0 \leqq x \leqq \infty_\alpha\}$$

とすれば,

$$X\{1\pm(1/\infty_\beta)\}=X.$$

$$X\infty_\beta=\begin{cases}\infty_\beta & (\alpha\leqq\beta),\\ \{x : \infty_\beta\leqq x\leqq\infty_\alpha\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$X(1/\infty_\beta)=\begin{cases}1/\infty_\beta & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1/\infty_\beta\leqq x\leqq\infty_\alpha\} & (\alpha\geqq\beta).\end{cases}$$

$$XA=X,\qquad XB=X,\qquad XC=C,\qquad XX=X.$$

(5)
$$X=\{x : 1+(1/\infty_0)< x \leqq \infty_\alpha\},$$
$$X^{-1}=\{x : 1/\infty_\alpha \leqq x < 1-(1/\infty_0)\}$$

とすれば,

$$X^{-1}\{1\pm(1/\infty_\beta)\}=X^{-1}.$$

$$X^{-1}\infty_\beta=\begin{cases}\infty_\beta & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1/\infty_\alpha\leqq x\leqq\infty_\beta\} & (\alpha\geqq\beta).\end{cases}$$

$$X^{-1}(1/\infty_\beta)=\begin{cases}1/\infty_\beta & (\alpha\leqq\beta),\\ \{x : 1/\infty_\alpha\leqq x\leqq 1/\infty_\beta\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$XX^{-1}=\Sigma_\alpha.$$

(6) $$(1+\Sigma_\alpha)\{1+(1/\infty_\beta)\}=\begin{cases}1+\Sigma_\alpha & (\alpha\leqq\beta),\\ \{x : 1+(1/\infty_\beta)\leqq x\leqq\infty_\alpha\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$(1+\Sigma_\alpha)\{1-(1/\infty_\beta)\}=\begin{cases}1+\Sigma_\alpha & (\alpha\leqq\beta),\\ \{x : 1-(1/\infty_\beta)\leqq x\leqq\infty_\alpha\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$(1+\Sigma_\alpha)\infty_\beta=\begin{cases}\infty_\beta & (\alpha\leqq\beta),\\ \{x : \infty_\beta\leqq x\leqq\infty_\alpha\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$(1+\Sigma_\alpha)(1/\infty_\beta)=\begin{cases}1/\infty_\beta & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1/\infty_\beta\leqq x\leqq\infty_\alpha\} & (\alpha\geqq\beta).\end{cases}$$

(7) $$(1+\Sigma_\alpha)^{-1}\{1+(1/\infty_\beta)\}=\begin{cases}(1+\Sigma_\alpha)^{-1} & (\alpha<\beta),\\ \{x: 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1+(1/\infty_\beta)\} & (\alpha \geqq \beta).\end{cases}$$

$$(1+\Sigma_\alpha)^{-1}\{1-(1/\infty_\beta)\}=\begin{cases}(1+\Sigma_\alpha)^{-1} & (\alpha\leqq\beta),\\ \{x: 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\beta)\} & (\alpha > \beta).\end{cases}$$

$$(1+\Sigma_\alpha)^{-1}\infty_\beta=\begin{cases}\infty_\beta & (\alpha<\beta),\\ \{x: 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq \infty_\beta\} & (\alpha \geqq \beta).\end{cases}$$

$$(1+\Sigma_\alpha)^{-1}(1/\infty_\beta)=\begin{cases}1/\infty_\beta & (\alpha\leqq\beta),\\ \{x: 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1/\infty_\beta\} & (\alpha > \beta).\end{cases}$$

$(1+\Sigma_\alpha)(1+\Sigma_\alpha)=1+\Sigma_\alpha$.
$(1+\Sigma_\alpha)(1+\Sigma_\alpha)^{-1}=\Sigma_\alpha$.
$(1+\Sigma_\alpha)^{-1}(1+\Sigma_\alpha)^{-1}=(1+\Sigma_\alpha)^{-1}$.

(8) $\{1\pm(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}=1\pm(1/\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}})$.（複合同順）

(9)
$$\begin{aligned}
A&=\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x \leqq 1+(1/\infty_0)\},\\
B&=\{x : 1+(1/\infty_0)< x < \infty_0\},\\
C&=\{x : \infty_0\leqq x \leqq \infty_\alpha\},\\
D&=\{x : 1-(1/\infty_0)\leqq x \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\},\\
E&=\{x : 1/\infty_0 < x < 1-(1/\infty_0)\},\\
F&=\{x : 1/\infty_\alpha\leqq x \leqq 1/\infty_0\}
\end{aligned}$$

とすれば,

$$A^{\infty\beta}=\begin{cases}\infty_\beta & (\alpha<\beta),\\ \{x: 1+(1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq \infty_\beta\} & (\alpha \geqq \beta).\end{cases}$$

$B^{\infty\beta}=\infty_{\beta+1}$.

$$C^{\infty\beta}=\begin{cases}\infty_{\beta+1} & (\alpha\leqq\beta),\\ \{x: \infty_{\beta+1} \leqq x \leqq \infty_\alpha\} & (\alpha > \beta).\end{cases}$$

$$D^{\infty\beta}=\begin{cases}1/\infty_\beta & (\alpha<\beta),\\ \{x: 1/\infty_\beta \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\} & (\alpha \geqq \beta).\end{cases}$$

$E^{\infty\beta}=1/\infty_{\beta+1}$.

$$F^{\infty\beta}=\begin{cases}1/\infty_{\beta+1} & (\alpha\leqq\beta),\\ \{x: 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1/\infty_{\beta+1}\} & (\alpha > \beta).\end{cases}$$

$$A^{1/\infty_\beta}=\begin{cases}1+(1/\infty_\beta) & (\alpha\leqq\beta),\\ \\ \{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_\beta)\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$B^{1/\infty_\beta}=1+(1/\infty_\beta).$$

$$C^{1/\infty_\beta}=\begin{cases}1+(1/\infty_\beta) & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\} & (\alpha=\beta),\\ \{x : 1+(1/\infty_\beta)\leqq x\leqq \infty_\alpha\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$D^{1/\infty_\beta}=\begin{cases}1-(1/\infty_\beta) & (\alpha\leqq\beta),\\ \\ \{x : 1-(1/\infty_\beta)\leqq x\leqq 1-(1/\infty_\alpha)\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$E^{1/\infty_\beta}=1-(1/\infty_\beta).$$

$$F^{1/\infty_\beta}=\begin{cases}1-(1/\infty_\beta) & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1-(1/\infty_0)\leqq x\leqq 1-(1/\infty_\alpha)\} & (\alpha=\beta),\\ \{x : 1/\infty_\alpha\leqq x\leqq 1-(1/\infty_\beta)\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

(10) $X=\{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\}$ならば,

$$X^{\infty_\beta}=\begin{cases}\infty_{\beta+1} & (\alpha\leqq\beta),\\ \\ \{x : \infty_{\beta+1}\leqq x\leqq\infty_\alpha\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$X^{1/\infty_\beta}=\begin{cases}1+(1/\infty_\beta) & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\} & (\alpha=\beta),\\ \{x : 1+(1/\infty_\beta)\leqq x\leqq\infty_\alpha\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$(X^{-1})^{\infty_\beta}=\begin{cases}1/\infty_{\beta+1} & (\alpha\leqq\beta),\\ \\ \{x : 1/\infty_\alpha\leqq x\leqq 1/\infty_{\beta+1}\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$(X^{-1})^{1/\infty_\beta}=\begin{cases}1-(1/\infty_\beta) & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1-(1/\infty_0)\leqq x\leqq 1-(1/\infty_\alpha)\} & (\alpha=\beta),\\ \{x : 1/\infty_\alpha\leqq x\leqq 1-(1/\infty_\beta)\} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

(11) $$(1+\Sigma_\alpha)^{\infty_\beta}=\begin{cases}\{\infty_\beta,\ \infty_{\beta+1}\} & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq\infty_{\alpha+1}\} & (\alpha=\beta),\\ 1+\Sigma_\alpha & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$(1+\Sigma_\alpha)^{1/\infty_\beta}=\begin{cases}1+(1/\infty_\beta) & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\} & (\alpha=\beta),\\ 1+\Sigma_\alpha & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$\{(1+\Sigma_\alpha)^{-1}\}^{\infty_\beta}=\begin{cases}\{1/\infty_\beta,\ 1/\infty_{\beta+1}\} & (\alpha<\beta),\\ \{x : 1/\infty_{\alpha+1}\leqq x\leqq 1-(1/\infty_\alpha)\} & (\alpha=\beta),\\ (1+\Sigma_\alpha)^{-1} & (\alpha>\beta).\end{cases}$$

$$\{(1+\Sigma_\alpha)^{-1}\}^{1/\infty\beta} = \begin{cases} 1-(1/\infty_\beta) & (\alpha<\beta), \\ \{x : 1-(1/\infty_0) \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\} & (\alpha=\beta), \\ (1+\Sigma_\alpha)^{-1} & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

(12) $(1+\Pi_\alpha)^{-1} = 1+\Pi_\alpha$.

$$(1+\Pi_\alpha)^{\infty\beta} = \begin{cases} \Sigma_\beta & (\alpha \leqq \beta), \\ 1+\Pi_\alpha & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

$$(1+\Pi_\alpha)^{1/\infty\beta} = \begin{cases} 1+\Pi_\beta & (\alpha<\beta), \\ 1+\Pi_\alpha & (\alpha \geqq \beta). \end{cases}$$

$$\{(1+\Pi_\alpha)^{-1}\}^{\infty\beta} = \begin{cases} \Sigma_\beta & (\alpha \leqq \beta), \\ 1+\Pi_\alpha & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

$$\{(1+\Pi_\alpha)^{-1}\}^{1/\infty\beta} = \begin{cases} 1+\Pi_\beta & (\alpha<\beta), \\ 1+\Pi_\alpha & (\alpha \geqq \beta). \end{cases}$$

(13) $\Sigma_\alpha{}^{-1} = \Sigma_\alpha$.

$$\Sigma_\alpha{}^{\infty\beta} = \begin{cases} \Sigma_{\beta+1} & (\alpha \leqq \beta), \\ \Sigma_\alpha & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

$$\Sigma_\alpha{}^{1/\infty\beta} = \begin{cases} 1+\Pi_\beta & (\alpha<\beta), \\ 1+\Pi_0 & (\alpha=\beta), \\ \Sigma_\alpha & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

$$(\Sigma_\alpha{}^{-1})^{\infty\beta} = \begin{cases} \Sigma_{\beta+1} & (\alpha \leqq \beta), \\ \Sigma_\alpha & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

$$(\Sigma_\alpha{}^{-1})^{1/\infty\beta} = \begin{cases} 1+\Pi_\beta & (\alpha<\beta), \\ 1+\Pi_0 & (\alpha=\beta), \\ \Sigma_\alpha & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

(14) $n \in \mathfrak{D}^+$とするとき,

$$A = \{x : 1+(1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1+(1/\infty_0)\},$$
$$B = \{x : 1+(1/\infty_0) < x < \infty_0\},$$
$$C = \{x : \infty_0 \leqq x \leqq \infty_\alpha\},$$
$$D = \{x : 1-(1/\infty_0) \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\},$$
$$E = \{x : 1/\infty_0 < x < 1-(1/\infty_0)\},$$
$$F = \{x : 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1/\infty_0\},$$
$$X = \{x : 1+(1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\}$$

ならば，

$$A^n = A,\quad B^n = B,\quad C^n = C,$$
$$D^n = D,\quad E^n = E,\quad F^n = F,$$
$$X^n = X,\quad (X^{-1})^n = X^{-1},$$
$$(1+\Pi_\alpha)^n = 1+\Pi_\alpha,\quad \{(1+\Pi_\alpha)^{-1}\}^n = 1+\Pi_\alpha,$$
$$(1+\Sigma_\alpha)^n = 1+\Sigma_\alpha,\quad \{(1+\Sigma_\alpha)^{-1}\}^n = (1+\Sigma_\alpha)^{-1},$$
$$\Sigma_\alpha{}^n = \Sigma_\alpha,\quad (\Sigma_\alpha{}^{-1})^n = \Sigma_\alpha.$$

(15) $$\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\Sigma\beta} = \begin{cases} 1+\Sigma_\beta & (\alpha \leqq \beta), \\ 1+(1/\infty_\alpha) & (\alpha > \beta). \end{cases}$$

$$\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\Sigma\beta} = \begin{cases} (1+\Sigma_\beta)^{-1} & (\alpha \leqq \beta), \\ 1-(1/\infty_\alpha) & (\alpha > \beta). \end{cases}$$

$$\infty_\alpha{}^{\Sigma\beta} = \begin{cases} \begin{array}{l}\infty_\alpha{}^{\Sigma\beta} = \\ (\alpha \leqq \beta)\end{array} \begin{cases} \{x : 1+(1/\infty_\beta) \leqq x \leqq \infty_{\beta+1}\} \\ \qquad (\alpha\text{が極限数でない}), \\ \{x : 1+(1/\infty_\beta) \leqq x \leqq 1+(1/\infty_0)\} \\ \qquad \cup \{x : \infty_\alpha \leqq x \leqq \infty_{\beta+1}\}\ (\alpha\text{が極限数}). \end{cases} \\ \begin{array}{l}\infty_\alpha{}^{\Sigma\beta} = \\ (\alpha > \beta)\end{array} \begin{cases} \infty_\alpha & (\beta+2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1+(1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} & (\beta+1 = \alpha). \end{cases} \end{cases}$$

$$(1/\infty_\alpha)^{\Sigma\beta} = \begin{cases} \begin{array}{l}(1/\infty_\alpha)^{\Sigma\beta} = \\ (\alpha \leqq \beta)\end{array} \begin{cases} \{x : 1/\infty_{\beta+1} \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\beta)\} \\ \qquad (\alpha\text{が極限数でない}), \\ \{x : 1-(1/\infty_0) \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\beta)\} \\ \qquad \cup \{x : 1/\infty_{\beta+1} \leqq x \leqq 1/\infty_\alpha\} \\ \qquad (\alpha\text{が極限数}). \end{cases} \\ \begin{array}{l}(1/\infty_\alpha)^{\Sigma\beta} = \\ (\alpha > \beta)\end{array} \begin{cases} 1/\infty_\alpha & (\beta+2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1/\infty_\alpha \leqq x < 1-(1/\infty_0)\} \\ \qquad (\beta+1 = \alpha). \end{cases} \end{cases}$$

＊ 特に，$\alpha > \beta$ ならば，

$$\infty_\alpha{}^{\Sigma\beta} = \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta},\qquad (1/\infty_\alpha)^{\Sigma\beta} = (1/\infty_\alpha)^{1/\infty\beta}$$

が成り立つ．

第７章　指数法則

拡大実数の指数法則は，一般的には成り立たない．実際，

$x = \infty_1$，$y = 1 / \infty_0$，$m = \infty_0$とすれば，

$$(xy)^m = \{\infty_1 \cdot (1/\infty_0)\}^{\infty 0} = {\infty_1}^{\infty 0} = \infty_1.$$

$$x^m y^m = {\infty_1}^{\infty 0} \cdot (1/\infty_0)^{\infty 0} = \infty_1 \cdot (1/\infty_1) = \Sigma_1.$$

しかし，以下の定理が成り立つ．初めに，記号と約束について説明する．

（ｉ）記号：有界拡大実数すべての領域を$\mathfrak{D}$で表す．当然，次の式が成り立つ．

$$\begin{aligned} D &= \zeta(-\infty_0) \cup \mathfrak{D} \cup \zeta(\infty_0) \\ &= \zeta(-\infty_0) \cup \mathcal{D}^- \cup \Pi_0 \cup \mathcal{D}^+ \cup \zeta(\infty_0). \end{aligned}$$

（ⅱ）約束：次のことは，特にことわることなく用いる．

（１）$x \in D^+$を，$x = r + b$と表すときは，

（ア）rは非負の左実数，すなわち，$r \in \langle R \rangle^+ \cup \{0\}$．

（イ）bは右実数，すなわち，$b \in \Pi_0$．

（ウ）$r \in \zeta(\infty_0)$ならば，$b = 0$．

（エ）非負の左実数をr，s，tで表す．

（オ）右実数をb，c，dで表す．

（２）$x \in \mathcal{D}^+$を，$x = r + b$と表すときは，

（ア）rは正の有限左実数，すなわち，$r \in R^+$．

（イ）bは右実数，すなわち，$b \in \Pi_0$．

（ウ）正の有限左実数をr，s，tで表す．

（エ）右実数をb，c，dで表す．

（３）例えば，$1 \leqq x \in \mathfrak{D}^+$を，$x = r + b$と表せば，$r$と$b$の条件は，それぞれ，

$$1 \leqq r \in R^+,\ b \in \Pi_0 \quad \cdots (*)$$

となる．しかし，

$$r = 1 \text{の場合は，} b \in {\Pi_0}^+ \cup \{0\} \quad \cdots (**)$$

でなくてはならないので，本来ならば，この場合を特記しなくてはならないが，混乱が生じないと思われる場合は，$(**)$を省略する．

$x \in D^+$を，$x = r + b$と表すときも同様である．すなわち，

$$r = 0 \text{の場合は，} b \in {\Pi_0}^+$$

と特記することなく，単に，

$$r \in \langle R \rangle^+ \cup \{0\},\ b \in \Pi_0$$

と記す．

$\boxed{1}$ 定理7-1（定理7-6を証明するための予備定理１）

$$\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}\cdot\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}.$$

証明　両辺を実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}\cdot\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}\\
&=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}\\
&\qquad\cdot\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}\\
&=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}.\\
\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\alpha)+(1/\infty\alpha)}\\
&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}\\
&=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}.
\end{aligned}$$

$\alpha<\beta<\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}\cdot\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}\\
&=\{1+(1/\infty_{\beta})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\gamma})\}\\
&=1+(1/\infty_{\beta}).\\
\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}\\
&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}\\
&=1+(1/\infty_{\beta}).
\end{aligned}$$

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}\cdot\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}\\
&=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\gamma})\}\\
&=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}.\\
\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\alpha)+(1/\infty\gamma)}\\
&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}\\
&=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}.
\end{aligned}$$

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}\cdot\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}\\
&=\{1+(1/\infty_{\beta})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}\\
&=1+(1/\infty_{\beta}).\\
\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\beta)}\\
&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}\\
&=1+(1/\infty_{\beta}).
\end{aligned}$$

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}\cdot\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}\\
&=\{1+(1/\infty_{\beta})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\gamma})\}\\
&=1+(1/\infty_{\gamma}).\\
\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}\\
&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}\\
&=1+(1/\infty_{\gamma}).
\end{aligned}$$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta} \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\} \cdot \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$.

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\alpha)}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$.

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば, $\beta + 2 \leqq \alpha$ より,

左辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta} \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha \infty_\alpha = \infty_\alpha \quad (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \infty_\alpha \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} = \infty_\alpha \quad (\gamma + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$

$= \infty_\alpha$.

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta} \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha \infty_\alpha = \infty_\alpha \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \\ \qquad \cdot \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \\ \quad = \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\beta)}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば,

左辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta} \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\} = \infty_\alpha \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \\ \qquad \cdot \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\} \\ \quad = \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\alpha)}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば,

$$\text{左辺} = \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta} \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha\{1 + (1/\infty_\gamma)\} = \infty_\alpha \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \cdot \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \\ \quad = \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$$\text{右辺} = \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}$$

$$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば,

$$\text{左辺} = \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta} \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$$

$$= \begin{cases} \{1 + (1/\infty_\beta)\} \cdot \infty_\alpha = \infty_\alpha \quad (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{1 + (1/\infty_\beta)\} \cdot \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \\ \quad = \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\gamma + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$$\text{右辺} = \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}$$

$$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha \quad (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\gamma + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば,

$$\text{左辺} = \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha} \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$$

$$= \begin{cases} \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}\infty_\alpha = \infty_\alpha \\ \qquad\qquad (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\} \\ \qquad \cdot \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \\ \quad = \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\gamma + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$$\text{右辺} = \infty_\alpha{}^{(1/\infty\alpha)+(1/\infty\gamma)}$$

$$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha \quad (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\gamma + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば, $\gamma + 2 \leqq \alpha$ より,

$$\text{左辺} = \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta} \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha\infty_\alpha = \infty_\alpha \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\}\infty_\alpha = \infty_\alpha \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$$右辺 = \infty_\alpha^{(1/\infty_\beta)+(1/\infty_\gamma)}$$
$$= \infty_\alpha^{1/\infty_\gamma}$$
$$= \infty_\alpha$$ ■

$\boxed{2}$ 定理7-2（定理7-6を証明するための予備定理２）

$$\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta} \cdot \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma} = \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta+\infty_\gamma}.$$

証明　両辺を実際に計算すれば，定理6-5より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば，

$$左辺 = \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\alpha} \cdot \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\alpha}$$
$$= \{1+\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1+\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}$$
$$= (1+\Sigma_\alpha) \cdot (1+\Sigma_\alpha)$$
$$= 1+\Sigma_\alpha.$$
$$右辺 = \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\alpha+\infty_\alpha}$$
$$= \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\alpha}$$
$$= 1+\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)$$
$$= 1+\Sigma_\alpha.$$

$\alpha<\beta<\gamma$ ならば，

$$左辺 = \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta} \cdot \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$$
$$= \{1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}$$
$$= (1+\infty_\beta) \cdot (1+\infty_\gamma)$$
$$= \infty_\beta\infty_\gamma$$
$$= \infty_\gamma.$$
$$右辺 = \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta+\infty_\gamma}$$
$$= \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$$
$$= 1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)$$
$$= 1+\infty_\gamma$$
$$= \infty_\gamma.$$

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば，

$$左辺 = \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\alpha} \cdot \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$$
$$= \{1+\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}$$
$$= (1+\Sigma_\alpha) \cdot (1+\infty_\gamma)$$
$$= (1+\Sigma_\alpha)\infty_\gamma$$
$$= \infty_\gamma.$$
$$右辺 = \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta+\infty_\gamma}$$
$$= \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$$
$$= 1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)$$
$$= 1+\infty_\gamma$$
$$= \infty_\gamma.$$

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば，

左辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$

$= \{1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}$

$= (1 + \infty_\beta) \cdot (1 + \infty_\beta)$

$= \infty_\beta \infty_\beta$

$= \infty_\beta.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta + \infty\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\beta$

$= \infty_\beta.$

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば，

左辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}$

$= (1 + \infty_\beta) \cdot (1 + \infty_\gamma)$

$= \infty_\beta \infty_\gamma$

$= \infty_\beta.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta + \infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\beta$

$= \infty_\beta.$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば，

左辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}$

$= \{1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}$

$= (1 + \infty_\beta) \cdot (1 + \Sigma_\alpha)$

$= \infty_\beta(1 + \Sigma_\alpha)$

$= \infty_\beta.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta + \infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\beta$

$= \infty_\beta.$

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta + \infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$

$= 1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\alpha})$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha}).$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + \infty_{\beta}(1 / \infty_{\alpha})\}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha}).$

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\beta + \infty\beta}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_{\beta}(1 / \infty_{\alpha})$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha}).$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば,

左辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + \infty_{\alpha}(1 / \infty_{\alpha})\}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot (1 + \Sigma_{\alpha})$

$= 1 + \Sigma_{\alpha}.$

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\beta + \infty\alpha}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}$

$= 1 + \infty_{\alpha}(1 / \infty_{\alpha})$

$= 1 + \Sigma_{\alpha}.$

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば,

左辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\alpha})\}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot (1 + \infty_{\gamma})$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}\infty_{\gamma}$

$= \infty_{\gamma}.$

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\beta + \infty\gamma}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$= 1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\alpha})$

$= 1 + \infty_{\gamma}$

$= \infty_{\gamma}.$

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば,

左辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\alpha})\}$

$= (1 + \infty_{\beta}) \cdot \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}$

$= \infty_{\beta}\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}$

$= \infty_{\beta}.$

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\beta + \infty\gamma}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_{\beta}(1 / \infty_{\alpha})$

$= 1 + \infty_{\beta}$

$= \infty_{\beta}.$

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば,

左辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha} \cdot \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + \infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}$

$= (1 + \Sigma_{\alpha}) \cdot \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}$

$= 1 + \Sigma_{\alpha}.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha + \infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}$

$= 1 + \infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})$

$= 1 + \Sigma_{\alpha}.$

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば,

左辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + \infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}$

$= 1 + (1/\infty_{\alpha}).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta + \infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$= 1 + (1/\infty_{\alpha})$ ■

$\boxed{3}$ 定理7-3（定理7-6を証明するための予備定理３）

$$\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma} = \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta + (1/\infty\gamma)}.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha = \beta = \gamma$ ならば,

左辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha} \cdot \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\alpha}$

$= \{1 + \infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}$

$= (1 + \Sigma_{\alpha}) \cdot \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}$

$= 1 + \Sigma_{\alpha}.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha + (1/\infty\alpha)}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}$

$= 1 + \infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})$

$= 1 + \Sigma_{\alpha}.$

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1/\infty_{\gamma})\}$

$= (1 + \infty_{\beta}) \cdot \{1 + (1/\infty_{\gamma})\}$

$= \infty_{\beta}\{1 + (1/\infty_{\gamma})\}$

$= \infty_{\beta}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}+(1/\infty_{\gamma})}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}$

$=1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\infty_{\beta}$

$=\infty_{\beta}.$

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば,

左辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}$

$=\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\gamma})\}$

$=(1+\Sigma_{\alpha})\cdot\{1+(1/\infty_{\gamma})\}$

$=1+\Sigma_{\alpha}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}+(1/\infty_{\gamma})}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}}$

$=1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\Sigma_{\alpha}.$

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば,

左辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\beta}}$

$=\{1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}$

$=(1+\infty_{\beta})\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}$

$=\infty_{\beta}\{1+(1/\infty_{\beta})\}$

$=\infty_{\beta}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}+(1/\infty_{\beta})}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}$

$=1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\infty_{\beta}$

$=\infty_{\beta}.$

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば,

左辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}$

$=\{1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\gamma})\}$

$=(1+\infty_{\beta})\cdot\{1+(1/\infty_{\gamma})\}$

$=\infty_{\beta}\{1+(1/\infty_{\gamma})\}$

$=\infty_{\beta}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}+(1/\infty_{\gamma})}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}$

$=1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\infty_{\beta}$

$=\infty_{\beta}.$

$\alpha=\gamma<\beta$ ならば,

左辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\alpha}}$

$=\{1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=(1+\infty_{\beta})\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=\infty_\beta\{1+(1/\infty_\alpha)\}$

$=\infty_\beta.$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta+(1/\infty_\alpha)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}$

$=1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)$

$=1+\infty_\beta$

$=\infty_\beta.$

$\beta<\gamma<\alpha$ ならば，

左辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}$

$=1+(1/\infty_\alpha).$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta+(1/\infty_\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}$

$=1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)$

$=1+(1/\infty_\alpha).$

$\beta=\gamma<\alpha$ ならば，

左辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\beta}$

$=\{1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}$

$=1+(1/\infty_\alpha).$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta+(1/\infty_\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}$

$=1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)$

$=1+(1/\infty_\alpha).$

$\beta<\gamma=\alpha$ ならば，

左辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\alpha}$

$=\{1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}$

$=1+(1/\infty_\alpha).$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta+(1/\infty_\alpha)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}$

$=1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)$

$=1+(1/\infty_\alpha).$

$\beta<\alpha<\gamma$ ならば，

左辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$

$=1+(1/\infty_\alpha).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}+(1/\infty_{\gamma})}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}$

$=1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+(1/\infty_{\alpha}).$

$\gamma<\alpha<\beta$ならば，

左辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}$

$=\{1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=(1+\infty_{\beta})\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=\infty_{\beta}\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=\infty_{\beta}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}+(1/\infty_{\gamma})}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}$

$=1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\infty_{\beta}$

$=\infty_{\beta}.$

$\gamma<\alpha=\beta$ならば，

左辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}$

$=\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=(1+\Sigma_{\alpha})\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=1+\Sigma_{\alpha}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}+(1/\infty_{\gamma})}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}}$

$=1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\Sigma_{\alpha}.$

$\gamma<\beta<\alpha$ならば，

左辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}$

$=\{1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=1+(1/\infty_{\alpha}).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}+(1/\infty_{\gamma})}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}$

$=1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+(1/\infty_{\alpha})$ ■

$\boxed{4}$ 定理7-4（定理7-6を証明するための予備定理４）

$$\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$$
$$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば，

$$\text{左辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$$
$$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}$$
$$=1+(1/\infty_\alpha).$$
$$\text{右辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\alpha)+(1/\infty\alpha)}$$
$$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$$
$$=1+(1/\infty_\alpha).$$

$\alpha<\beta<\gamma$ ならば，

$$\text{左辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$$
$$=\{1+(1/\infty_\beta)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$$
$$=1+(1/\infty_\beta).$$
$$\text{右辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}$$
$$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$$
$$=1+(1/\infty_\beta).$$

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば，

$$\text{左辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$$
$$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$$
$$=1+(1/\infty_\alpha).$$
$$\text{右辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\alpha)+(1/\infty\gamma)}$$
$$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$$
$$=1+(1/\infty_\alpha).$$

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば，

$$\text{左辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$$
$$=\{1+(1/\infty_\beta)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}$$
$$=1+(1/\infty_\beta).$$
$$\text{右辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\beta)}$$
$$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$$
$$=1+(1/\infty_\beta).$$

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば，

$$\text{左辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$$
$$=\{1+(1/\infty_\beta)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$$
$$=1+(1/\infty_\gamma).$$
$$\text{右辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}$$
$$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$$
$$=1+(1/\infty_\gamma).$$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば，

左辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\alpha)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\beta)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば，

左辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\alpha)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば，

左辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\gamma)\}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば，

左辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_{\alpha})$.

$\gamma<\alpha=\beta$ならば,

左辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\alpha}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=1+(1/\infty_{\alpha})$.

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{(1/\infty\alpha)+(1/\infty\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_{\alpha})$.

$\gamma<\beta<\alpha$ならば,

左辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\beta}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=1+(1/\infty_{\alpha})$.

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_{\alpha})$■

$\boxed{5}$ 定理7-5（定理7-6を証明するための予備定理５）

$1\leqq x\in D^{+}$, $1\leqq y\in D^{+}$とすれば，次の式が成り立つ.

$$x^{-1}y^{-1}=(xy)^{-1}.$$

証明　$D^{+}=\mathfrak{D}^{+}\cup\zeta(\infty_{0})$である．また，$x$，$y\in\mathfrak{D}^{+}$ならば，条件$1\leqq x$，$1\leqq y$より，次のように表すことができる.

$$x=r+b,\ 「1\leqq r\in R^{+},\ b\in\Pi_{0}」.$$

$$y=s+c,\ 「1\leqq s\in R^{+},\ c\in\Pi_{0}」.$$

（ⅰ）「$x=\infty_{\alpha}$, $y=\infty_{\beta}$」の場合：

$$\begin{aligned}x^{-1}y^{-1}&=(1/\infty_{\alpha})\cdot(1/\infty_{\beta})\\&=1/\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}\\&={\infty_{\max\{\alpha,\beta\}}}^{-1}\\&=(xy)^{-1}.\end{aligned}$$

（ⅱ）「$x\in\mathfrak{D}^{+}$, $y=\infty_{\beta}$」の場合：

$$\begin{aligned}x^{-1}y^{-1}&=\{(1/r)-b\}\cdot(1/\infty_{\beta})\\&=1/\infty_{\beta}\\&={\infty_{\beta}}^{-1}\\&=(xy)^{-1}.\end{aligned}$$

（ⅲ）「$x=\infty_{\alpha}$, $y\in\mathfrak{D}^{+}$」の場合は，（ⅱ）と同様である.

（ⅳ）「$x\in\mathfrak{D}^{+}$, $y\in\mathfrak{D}^{+}$」の場合：

$$\begin{aligned}x^{-1}y^{-1}&=\{(1/r)-b\}\cdot\{(1/s)-c\}\\&=\{1/(rs)\}-(b+c)\\&=(xy)^{-1}\ ■\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ 定理7-6（指数法則の第１式）

$$x \in D^{+},\ x = r + b,\ 「r \in \langle R \rangle^{+} \cup \{0\},\ b \in \Pi_0」;$$
$$m \in D^{+},\ m = s + c,\ 「s \in \langle R \rangle^{+} \cup \{0\},\ c \in \Pi_0」;$$
$$n \in D^{+},\ n = t + d,\ 「t \in \langle R \rangle^{+} \cup \{0\},\ d \in \Pi_0」$$

とすれば，次の式が成り立つ．

$$x^m x^n = x^{m+n}.$$

証明（ｉ） $x = \infty_\alpha$ の場合：

（ア） $m = \infty_\beta$， $n = \infty_\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned} x^m x^n &= {\infty_\alpha}^{\infty_\beta} {\infty_\alpha}^{\infty_\gamma} \\ &= {\infty_\alpha}^{\infty_\beta + \infty_\gamma}.\ (\because \text{定義6-2}) \end{aligned}$$
$$x^{m+n} = {\infty_\alpha}^{\infty_\beta + \infty_\gamma}.$$

（イ） $m = \infty_\beta$， $n \in \mathcal{D}^{+}$ ならば，

$$\begin{aligned} x^m x^n &= {\infty_\alpha}^{\infty_\beta} {\infty_\alpha}^{n} \\ &= {\infty_\alpha}^{\infty_\beta} \infty_\alpha \ (\because \text{定理6-4}) \\ &= {\infty_\alpha}^{\infty_\beta + 1} \ (\because \text{定義6-2}) \\ &= {\infty_\alpha}^{\infty_\beta}. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x^{m+n} &= {\infty_\alpha}^{\infty_\beta + n} \\ &= {\infty_\alpha}^{\infty_\beta}. \end{aligned}$$

（ウ） $m = \infty_\beta$， $n = 1 / \infty_\gamma$ ならば，

$$ {\infty_\alpha}^{1/\infty_\gamma} = \begin{cases} \infty_\alpha & (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} & (\gamma + 1 = \alpha), \\ \{x : 1 + (1/\infty_\gamma) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\} & (\gamma = \alpha), \\ 1 + (1/\infty_\gamma) & (\alpha < \gamma) \end{cases}$$

であるので，

$$1 \leqq {\infty_\alpha}^{1/\infty_\gamma} \leqq \infty_\alpha$$

が成り立つ．また，

$${\infty_\alpha}^{\infty_\beta} \leqq {\infty_\alpha}^{\infty_\beta} \leqq {\infty_\alpha}^{\infty_\beta}, \qquad {\infty_\alpha}^{\infty_\beta} \cdot 1 = {\infty_\alpha}^{\infty_\beta} \cdot \infty_\alpha = {\infty_\alpha}^{\infty_\beta}$$

であるので，定理4-16より，

$${\infty_\alpha}^{\infty_\beta} \cdot {\infty_\alpha}^{1/\infty_\gamma} = {\infty_\alpha}^{\infty_\beta}$$

となる．したがって，
$$\begin{aligned} x^m x^n &= {\infty_\alpha}^{\infty_\beta} \cdot {\infty_\alpha}^{1/\infty_\gamma} \\ &= {\infty_\alpha}^{\infty_\beta} \\ &= {\infty_\alpha}^{\infty_\beta + (1/\infty_\gamma)} \\ &= {\infty_\alpha}^{m+n}. \end{aligned}$$

（エ） $m \in \mathcal{D}^{+}$， $n = \infty_\gamma$ ならば，（イ）と同様である．

（オ） $m \in \mathcal{D}^{+}$， $n \in \mathcal{D}^{+}$ ならば，

$$\begin{aligned} x^m x^n &= {\infty_\alpha}^{m} \cdot {\infty_\alpha}^{n} \\ &= \infty_\alpha \cdot \infty_\alpha \ (\because \text{定理6-4}) \\ &= \infty_\alpha. \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} x^{m+n} &= {\infty_\alpha}^{m+n} \\ &= \infty_\alpha.\ (\because \text{定理6-4},\ m + n \in \mathcal{D}^{+} \text{ または } m + n \subset \mathcal{D}^{+}) \end{aligned}$$

（カ） $m \in \mathcal{D}^+$， $n = 1/\infty_\gamma$ならば，

$$x^m x^n = \infty_\alpha{}^m \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$$
$$= \infty_\alpha \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma} \quad (\because 定理6\text{-}4)$$
$$= \infty_\alpha. \quad (\because 定理4\text{-}16,\ 1 \leqq \infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma} \leqq \infty_\alpha)$$
$$x^{m+n} = \infty_\alpha{}^{m+(1/\infty_\gamma)}$$
$$= \infty_\alpha. \ (\because 定理6\text{-}4, m+(1/\infty_\gamma) \in \mathcal{D}^+ \text{ または } m+(1/\infty_\gamma) \subset \mathcal{D}^+)$$

（キ） $m = 1/\infty_\beta$， $n = \infty_\gamma$ならば，（ウ）と同様である．

（ク） $m = 1/\infty_\beta$， $n \in \mathcal{D}^+$ならば，（カ）と同様である．

（ケ） $m = 1/\infty_\beta$， $n = 1/\infty_\gamma$ならば，定理7-1参照．

（ⅱ） $1 + (1/\infty_0) < x \in \mathcal{D}^+$の場合：

（ア） $m = \infty_\beta$， $n = \infty_\gamma$ならば，

$$x^m x^n = (r+b)^{\infty_\beta} \cdot (r+b)^{\infty_\gamma}$$
$$= \infty_{\beta+1} \infty_{\gamma+1}$$
$$= \infty_{\max\{\beta+1,\ \gamma+1\}}$$
$$= \infty_{\max\{\beta,\ \gamma\}+1}.$$
$$x^{m+n} = (r+b)^{\infty_\beta + \infty_\gamma}$$
$$= (r+b)^{\infty_{\max\{\beta,\ \gamma\}}}$$
$$= \infty_{\max\{\beta,\ \gamma\}+1}.$$

（イ） $m = \infty_\beta$， $n \in \mathcal{D}^+$ならば，

$$x^m x^n = (r+b)^{\infty_\beta} \cdot (r+b)^{t+d}$$
$$= \infty_{\beta+1}\{r^t + (b+d)\}$$
$$= \infty_{\beta+1}.$$
$$x^{m+n} = (r+b)^{\infty_\beta + (t+d)}$$
$$= (r+b)^{\infty_\beta}$$
$$= \infty_{\beta+1}.$$

（ウ） $m = \infty_\beta$， $n = 1/\infty_\gamma$ならば，

$$x^m x^n = x^{\infty_\beta} \cdot x^{1/\infty_\gamma}$$
$$= \infty_{\beta+1}\{1 + (1/\infty_\gamma)\}$$
$$= \infty_{\beta+1}.$$
$$x^{m+n} = x^{\infty_\beta + (1/\infty_\gamma)}$$
$$= x^{\infty_\beta}$$
$$= \infty_{\beta+1}.$$

（エ） $m \in \mathcal{D}^+$， $n = \infty_\gamma$ならば，（イ）と同様である．

（オ） $m \in \mathcal{D}^+$， $n \in \mathcal{D}^+$ならば，

$$x^m x^n = \{(r+b)^{s+c}\} \cdot \{(r+b)^{t+d}\}$$
$$= \{r^s + (b+c)\} \cdot \{r^t + (b+d)\}$$
$$= r^s \cdot r^t + \{(b+c) + (b+d)\}$$
$$= r^{s+t} + (b+c+d).$$
$$x^{m+n} = (r+b)^{\{(s+c)+(t+d)\}}$$
$$= (r+b)^{\{(s+t)+(c+d)\}}$$

$= r^{s+t} + \{b + (c + d)\}$

$= r^{s+t} + (b + c + d).$

（カ） $m \in \mathcal{D}^+$， $n = 1/\infty_\gamma$ ならば，

$x^m x^n = \{(r + b)^{s+c}\} \cdot x^{1/\infty\gamma}$

$= \{r^s + (b + c)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\gamma)\}$

$= r^s + \{(b + c) + (1/\infty_\gamma)\}$

$= r^s + \{b + c + (1/\infty_\gamma)\}.$

$x^{m+n} = (r + b)^{\{(s+c)+(1/\infty\gamma)\}}$

$= (r + b)^{s+\{c+(1/\infty\gamma)\}}$

$= r^s + [b + \{c + (1/\infty_\gamma)\}]$

$= r^s + \{b + c + (1/\infty_\gamma)\}.$

（キ） $m = 1/\infty_\beta$， $n = \infty_\gamma$ ならば，（ウ）と同様である．

（ク） $m = 1/\infty_\beta$， $n \in \mathcal{D}^+$ ならば，

$x^m x^n = (r + b)^{1/\infty\beta} \cdot \{(r + b)^{t+d}\}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\} \cdot \{r^t + (b + d)\}$

$= r^t + \{(1/\infty_\beta) + (b + d)\}$

$= r^t + \{(1/\infty_\beta) + b + d\}.$

$x^{m+n} = (r + b)^{\{(1/\infty\beta)+(t+d)\}}$

$= (r + b)^{t+\{(1/\infty\beta)+d\}}$

$= r^t + [b + \{(1/\infty_\beta) + d\}]$

$= r^t + \{b + (1/\infty_\beta) + d\}$

$= r^t + \{(1/\infty_\beta) + b + d\}.$

（ケ） $m = 1/\infty_\beta$， $n = 1/\infty_\gamma$ ならば，

$x^m x^n = x^{1/\infty\beta} \cdot x^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\gamma)\}$

$= 1 + (1/\infty_{\min\{\beta, \gamma\}}).$

$x^{m+n} = x^{(1/\infty\beta)+(1/\infty\gamma)}$

$= x^{1/\infty\min\{\beta, \gamma\}}$

$= 1 + (1/\infty_{\min\{\beta, \gamma\}}).$

（ⅲ） $x = 1 + (1/\infty_\alpha)$ の場合：

（ア） $m = \infty_\beta$， $n = \infty_\gamma$ ならば，定理7-2参照．

（イ） $m = \infty_\beta$， $n \in \mathcal{D}^+$ ならば，

$x^m x^n = \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^n$

$= \{1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + n(1/\infty_\alpha)\}$

$= \{1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}$

$$= \begin{cases} \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\} = 1 + (1/\infty_\alpha) \quad (\alpha > \beta), \\ (1 + \Sigma_\alpha) \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\} = 1 + \Sigma_\alpha \quad (\alpha = \beta), \\ (1 + \infty_\beta) \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\} = \infty_\beta\{1 + (1/\infty_\alpha)\} = \infty_\beta \quad (\alpha < \beta). \end{cases}$$

$x^{m+n} = \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta+n}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_\beta (1 / \infty_\alpha)$

$$= \begin{cases} 1 + (1 / \infty_\alpha) \ (\alpha > \beta), \\ 1 + \Sigma_\alpha \ (\alpha = \beta), \\ 1 + \infty_\beta = \infty_\beta \ (\alpha < \beta). \end{cases}$$

（ウ）$m = \infty_\beta$，$n = 1 / \infty_\gamma$ならば，定理7-3参照．

（エ）$m \in \mathfrak{D}^+$，$n = \infty_\gamma$ならば，（イ）と同様である．

（オ）$m \in \mathfrak{D}^+$，$n \in \mathfrak{D}^+$ならば，

$$x^m x^n = \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^m \cdot \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^n$$
$$= \{1 + m(1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 + n(1 / \infty_\alpha)\}$$
$$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}$$
$$= 1 + (1 / \infty_\alpha).$$

$$x^{m+n} = \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{m+n}$$
$$= 1 + (m + n)(1 / \infty_\alpha)$$
$$= 1 + (1 / \infty_\alpha). \quad (\because m + n \in \mathfrak{D}^+ \text{ または } m + n \subset \mathfrak{D}^+)$$

（カ）$m \in \mathfrak{D}^+$，$n = 1 / \infty_\gamma$ならば，

$$x^m x^n = \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^m \cdot \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty_\gamma}$$
$$= \{1 + m(1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty_\gamma}$$
$$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty_\gamma}$$
$$= \begin{cases} \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1 / \infty_\gamma)\} = 1 + (1 / \infty_\alpha) \ (\alpha \leqq \gamma), \\ \\ \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} = 1 + (1 / \infty_\alpha) \ (\alpha > \gamma). \end{cases}$$

$$x^{m+n} = \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{m + (1 / \infty_\gamma)}$$
$$= 1 + \{m + (1 / \infty_\gamma)\} \cdot (1 / \infty_\alpha)$$
$$= 1 + (1 / \infty_\alpha). \quad (\because m + (1 / \infty_\gamma) \in \mathfrak{D}^+ \text{ または } m + (1 / \infty_\gamma) \subset \mathfrak{D}^+)$$

（キ）$m = 1 / \infty_\beta$，$n = \infty_\gamma$ならば，（ウ）と同様である．

（ク）$m = 1 / \infty_\beta$，$n \in \mathfrak{D}^+$ならば，（カ）と同様である．

（ケ）$m = 1 / \infty_\beta$，$n = 1 / \infty_\gamma$ならば，定理7-4参照．

（ⅳ）$x = 1$ の場合：

定義6-8の（ⅳ）より，$x^m = 1$，$x^n = 1$，$x^{m+n} = 1$ であるので，定理は成り立つ．

（ⅴ）$0 < x < 1$ の場合：

$1 < x^{-1}$であるので，

$$x^m x^n = \{(x^{-1})^m\}^{-1} \cdot \{(x^{-1})^n\}^{-1} \quad (\because \text{定義6-8の（ⅴ）})$$
$$= \{(x^{-1})^m \cdot (x^{-1})^n\}^{-1} \quad (\because \text{定理7-5})$$
$$= \{(x^{-1})^{m+n}\}^{-1} \quad (\because \text{（ⅰ）〜（ⅲ）})$$
$$= \{(x^{m+n})^{-1}\}^{-1} \quad (\because \text{定理6-7})$$
$$= x^{m+n} \ \blacksquare$$

$\boxed{7}$ 定理7-7（定理7-14を証明するための予備定理１）

$$(\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta})^{1/\infty\gamma}=\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta(1/\infty\gamma)}.$$

ただし，次の場合を除く．

$$\alpha=\beta=\gamma,\ \alpha<\beta<\beta+1=\gamma,\ \beta=\alpha<\alpha+1=\gamma,\ \alpha<\beta=\gamma.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(\infty_{\alpha}{}^{\infty\alpha})^{1/\infty\alpha}\\&=\infty_{\alpha+1}{}^{1/\infty\alpha}\\&=\{x:1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_{\alpha+1}\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{\infty\alpha(1/\infty\alpha)}\\&=\infty_{\alpha}{}^{\Sigma\alpha}\\&=\begin{cases}\{x:1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq\infty_{\alpha+1}\}\ (\alpha\text{が極限数でない場合}),\\ \{x:1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}\cup\{\infty_{\alpha},\ \infty_{\alpha+1}\}\\ \qquad(\alpha\text{が極限数の場合}).\end{cases}\end{aligned}$$

$\alpha<\beta<\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta})^{1/\infty\gamma}\\&=\infty_{\beta+1}{}^{1/\infty\gamma}\\&=\begin{cases}1+(1/\infty_{\gamma})\ (\beta+1<\gamma),\\ \infty_{\gamma}{}^{1/\infty\gamma}=\{x:1+(1/\infty_{\gamma})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}\\ \qquad(\beta+1=\gamma).\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta(1/\infty\gamma)}\\&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}\\&=1+(1/\infty_{\gamma}).\end{aligned}$$

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(\infty_{\alpha}{}^{\infty\alpha})^{1/\infty\gamma}\\&=\infty_{\alpha+1}{}^{1/\infty\gamma}\\&=\begin{cases}1+(1/\infty_{\gamma})\ (\alpha+1<\gamma),\\ \infty_{\gamma}{}^{1/\infty\gamma}=\{x:1+(1/\infty_{\gamma})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}\\ \qquad(\alpha+1=\gamma).\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{\infty\alpha(1/\infty\gamma)}\\&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}\\&=1+(1/\infty_{\gamma}).\end{aligned}$$

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta})^{1/\infty\beta}\\&=\infty_{\beta+1}{}^{1/\infty\beta}\\&=\{x:1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_{\beta+1}\}.\end{aligned}$$

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta(1/\infty\beta)}$

$=\infty_{\alpha}{}^{\Sigma\beta}$

$$=\begin{cases}\{x : 1+(1/\infty_{\beta})\leqq x\leqq\infty_{\beta+1}\} & (\alpha\text{が極限数でない場合}),\\ \{x : 1+(1/\infty_{\beta})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\} \\ \quad\cup\{x : \infty_{\alpha}\leqq x\leqq\infty_{\beta+1}\} & (\alpha\text{が極限数の場合}).\end{cases}$$

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば,

左辺$=(\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=\infty_{\beta+1}{}^{1/\infty\gamma}$

$=\infty_{\beta+1}$. ($\because\gamma+2\leqq\beta+1$)

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta(1/\infty\gamma)}$

$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta}$

$=\infty_{\beta+1}$.

$\alpha=\gamma<\beta$ ならば,

左辺$=(\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta})^{1/\infty\alpha}$

$=\infty_{\beta+1}{}^{1/\infty\alpha}$

$=\infty_{\beta+1}$. ($\because\alpha+2\leqq\beta+1$)

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta(1/\infty\alpha)}$

$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta}$

$=\infty_{\beta+1}$.

$\beta<\gamma<\alpha$ ならば,

左辺$=(\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$.

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta(1/\infty\gamma)}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$.

$\beta=\gamma<\alpha$ ならば,

左辺$=(\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta})^{1/\infty\beta}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha} & (\beta+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\} & (\beta+1=\alpha).\end{cases}$$

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta(1/\infty\beta)}$

$=\infty_{\alpha}{}^{\Sigma\beta}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha} & (\beta+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\} & (\beta+1=\alpha).\end{cases}$$

$\beta<\gamma=\alpha$ ならば,

左辺$=(\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta})^{1/\infty\alpha}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}$.

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{\infty\beta(1/\infty\alpha)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}$.

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば,

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$.

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{\infty\beta(1/\infty\gamma)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$.

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば,

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_{\beta+1}{}^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_{\beta+1}$. $(\because \gamma + 2 \leqq \beta + 1)$

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{\infty\beta(1/\infty\gamma)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{\infty\beta}$

$= \infty_{\beta+1}$.

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば,

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{\infty\alpha})^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_{\alpha+1}{}^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_{\alpha+1}$. $(\because \gamma + 2 \leqq \alpha + 1)$

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{\infty\alpha(1/\infty\gamma)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{\infty\alpha}$

$= \infty_{\alpha+1}$.

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば,

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_{\alpha}$. $(\because \gamma + 2 \leqq \alpha)$

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{\infty\beta(1/\infty\gamma)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{\infty\beta}$

$= \infty_{\alpha}$ ■

$\boxed{8}$ 定理7-8（定理7-14を証明するための予備定理２）

$$(\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta})^{\infty\gamma} = \infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}.$$

ただし，次の場合を除く．

$\alpha = \beta = \gamma$, $\alpha < \beta < \gamma$, $\alpha = \beta < \gamma$, $\alpha < \beta = \gamma$,

$\gamma = \beta < \beta + 1 = \alpha$, $\gamma < \alpha = \beta$, $\gamma < \beta < \beta + 1 = \alpha$.

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha = \beta = \gamma$ ならば,

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha})^{\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_{\alpha}) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_{0})\}^{\infty\alpha}$

$= 1 + \Sigma_{\alpha}$.

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty_{\alpha})\infty_{\alpha}}$

$=\infty_{\alpha}{}^{\Sigma_{\alpha}}$

$$=\begin{cases}\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq \infty_{\alpha+1}\} & (\alpha\text{が極限数でない場合}),\\ \{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}\cup\{\infty_{\alpha},\ \infty_{\alpha+1}\} & (\alpha\text{が極限数の場合}).\end{cases}$$

$\alpha<\beta<\gamma$ ならば,

左辺$=(\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\beta}})^{\infty_{\gamma}}$

$=\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty_{\gamma}}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})$

$=1+\infty_{\gamma}$

$=\infty_{\gamma}$.

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty_{\beta})\infty_{\gamma}}$

$=\infty_{\alpha}{}^{\infty_{\gamma}}$

$=\infty_{\gamma+1}$.

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば,

左辺$=(\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\alpha}})^{\infty_{\gamma}}$

$=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}^{\infty_{\gamma}}$

$=\infty_{\gamma}$.

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty_{\alpha})\infty_{\gamma}}$

$=\infty_{\alpha}{}^{\infty_{\gamma}}$

$=\infty_{\gamma+1}$.

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば,

左辺$=(\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\beta}})^{\infty_{\beta}}$

$=\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty_{\beta}}$

$=1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\beta})$

$=1+\Sigma_{\beta}$.

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty_{\beta})\infty_{\beta}}$

$=\infty_{\alpha}{}^{\Sigma_{\beta}}$

$$=\begin{cases}\{x : 1+(1/\infty_{\beta})\leqq x\leqq \infty_{\beta+1}\} & (\alpha\text{が極限数でない場合}),\\ \{x : 1+(1/\infty_{\beta})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}\cup\{x : \infty_{\alpha}\leqq x\leqq \infty_{\beta+1}\} & (\alpha\text{が極限数の場合}).\end{cases}$$

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば,

左辺$=(\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\beta}})^{\infty_{\gamma}}$

$=\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty_{\gamma}}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})$

$=1+(1/\infty_{\beta})$.

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty_{\beta})\infty_{\gamma}}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\beta}}$

$= 1 + (1 / \infty_\beta)$.

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= (\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta})^{\infty\alpha}$

$= \{1 + (1 / \infty_\beta)\}^{\infty\alpha}$

$= 1 + \infty_\alpha (1 / \infty_\beta)$

$= 1 + (1 / \infty_\beta)$.

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)\infty\alpha}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1 / \infty_\beta)$.

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= (\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta})^{\infty\gamma}$

$= \infty_\alpha{}^{\infty\gamma}$. $(\because \beta + 2 \leqq \alpha)$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}$

$= \infty_\alpha{}^{\infty\gamma}$.

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= (\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta})^{\infty\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha{}^{\infty\beta} = \infty_\alpha \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1 / \infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\}^{\infty\beta} = \infty_\alpha \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)\infty\beta}$

$= \infty_\alpha{}^{\Sigma\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1 / \infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば,

左辺 $= (\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta})^{\infty\alpha}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha{}^{\infty\alpha} = \infty_{\alpha+1} \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1 / \infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\}^{\infty\alpha} = \infty_{\alpha+1} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)\infty\alpha}$

$= \infty_\alpha{}^{\infty\alpha}$

$= \infty_{\alpha+1}$.

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば,

左辺 $= (\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta})^{\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha{}^{\infty\gamma} = \infty_{\gamma+1} \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1 / \infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\}^{\infty\gamma} = \infty_{\gamma+1} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}$

$= \infty_\alpha{}^{\infty\gamma}$

$= \infty_{\gamma+1}$.

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば，

左辺 $= (\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta})^{\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$

$= 1 + \infty_\gamma(1/\infty_\beta)$

$= 1 + (1/\infty_\beta)$.

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_\beta)$.

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば，

左辺 $= (\infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha})^{\infty\gamma}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}^{\infty\gamma}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq \infty_\gamma\}$.

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\alpha)\infty\gamma}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$.

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば，

左辺 $= (\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta})^{\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha{}^{\infty\gamma} = \infty_\alpha & (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\}^{\infty\gamma} = \{x : \infty_{\gamma+1} \leqq x \leqq \infty_\alpha\} & (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha & (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} & (\beta + 1 = \alpha) \end{cases} \blacksquare$$

$\boxed{9}$ 定理7-9（定理7-14を証明するための予備定理３）

$$(\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta})^{1/\infty\gamma} = \infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}.$$

ただし，次の場合を除く．

$\alpha = \beta = \gamma$，$\gamma = \beta < \beta + 1 = \alpha$，$\gamma < \alpha = \beta$，$\gamma < \beta < \beta + 1 = \alpha$．

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha = \beta = \gamma$ ならば，

左辺 $= (\infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha})^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}^{1/\infty\alpha}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha)$.

右辺 $= \infty_\alpha{}^{(1/\infty\alpha)(1/\infty\alpha)}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$.

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_{\gamma})$.

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_{\gamma})$.

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha})^{1/\infty\gamma}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_{\alpha}) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_{0})\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_{\gamma})$.

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_{\gamma})$.

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば,

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta})^{1/\infty\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_{\beta})$.

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\beta)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_{\beta})$.

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_{\beta})$.

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_{\beta})$.

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta})^{1/\infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\alpha}$

$= 1 + (1/\infty_{\beta})$.

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\alpha)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_{\beta})$.

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$. ($\because \beta + 2 \leqq \alpha$)

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$.

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta})^{1/\infty\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta} = \infty_{\alpha} \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_{0}) < x \leqq \infty_{\alpha}\}^{1/\infty\beta} \\ \quad = \{x : 1 + (1/\infty_{\beta}) \leqq x \leqq \infty_{\alpha}\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\beta)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_{\alpha} \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_{0}) < x \leqq \infty_{\alpha}\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば，

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta})^{1/\infty\alpha}$

$$= \begin{cases} \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha} = \{x : 1 + (1/\infty_{\alpha}) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_{0})\} \\ \qquad\qquad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1 + (1/\infty_{0}) < x \leqq \infty_{\alpha}\}^{1/\infty\alpha} \\ \quad = \{x : 1 + (1/\infty_{\alpha}) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_{0})\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\alpha)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_{\alpha}) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_{0})\}.$

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば，

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma} = 1 + (1/\infty_{\gamma}) \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_{0}) < x \leqq \infty_{\alpha}\}^{1/\infty\gamma} = 1 + (1/\infty_{\gamma}) \\ \qquad\qquad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_{\gamma}).$

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば，

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_{\beta}).$

右辺 $= \infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$= \infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_{\beta}).$

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば，

左辺 $= (\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha})^{1/\infty\gamma}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_{\alpha}) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_{0})\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_{\alpha}) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_{\gamma})\}.$

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\alpha)(1/\infty\gamma)}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}$

$=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}.$

$\gamma<\beta<\alpha$ならば，$\gamma+2\leqq\alpha$より，

左辺$=(\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}=\infty_{\alpha} & (\beta+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\}^{1/\infty\gamma} & \\ \quad=\{x : 1+(1/\infty_{\gamma})\leqq x\leqq\infty_{\alpha}\} & (\beta+1=\alpha).\end{cases}$$

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha} & (\beta+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\} & (\beta+1=\alpha)\end{cases}\blacksquare$$

$\boxed{10}$ 定理7-10（定理7-14を証明するための予備定理４）

$$[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}]^{\infty\gamma}=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta\infty\gamma}.$$

ただし，次の場合を除く．

$$\alpha=\beta=\gamma,\quad \alpha<\beta<\gamma,\quad \alpha=\beta<\gamma,\quad \alpha<\beta=\gamma.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}]^{\infty\alpha}$

$=\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}$

$=(1+\Sigma_{\alpha})^{\infty\alpha}$

$=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq\infty_{\alpha+1}\}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}$

$=1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\Sigma_{\alpha}.$

$\alpha<\beta<\gamma$ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$=(1+\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\beta}{}^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\gamma+1}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\infty_{\gamma}$

$=\infty_{\gamma}.$

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_\alpha (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$

$= (1 + \Sigma_\alpha)^{\infty\gamma}$

$= \{\infty_\gamma,\ \ \infty_{\gamma+1}\}.$

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\alpha\infty\gamma}$

$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$

$= 1 + \infty_\gamma (1 / \infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\gamma$

$= \infty_\gamma.$

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\beta}]^{\infty\beta}$

$= \{1 + \infty_\beta (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$

$= (1 + \infty_\beta)^{\infty\beta}$

$= \infty_\beta{}^{\infty\beta}$

$= \infty_{\beta+1}.$

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\beta\infty\beta}$

$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_\beta (1 / \infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\beta$

$= \infty_\beta.$

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_\beta (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$

$= (1 + \infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$= \infty_\beta{}^{\infty\gamma}$

$= \infty_\beta.$

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\beta\infty\gamma}$

$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_\beta (1 / \infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\beta$

$= \infty_\beta.$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\beta}]^{\infty\alpha}$

$= \{1 + \infty_\beta (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}$

$= (1 + \infty_\beta)^{\infty\alpha}$

$= \infty_\beta{}^{\infty\alpha}$

$= \infty_\beta.$

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\beta\infty\alpha}$

$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$= 1 + \infty_{\beta}$

$= \infty_{\beta}.$

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば，

左辺$= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$= 1 + \infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha}).$

右辺$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$= 1 + \infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha}).$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば，

左辺$= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}]^{\infty\beta}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}.$

右辺$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta\infty\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}.$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば，

左辺$= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}]^{\infty\alpha}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}.$

右辺$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta\infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}.$

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば，

左辺$= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}.$

右辺$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}.$

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば，

左辺$= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$= (1 + \infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$= \infty_{\beta}{}^{\infty\gamma}$

$= \infty_{\beta}.$

右辺$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$= 1 + \infty_{\beta}$

$= \infty_{\beta}.$

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$

$= (1 + \Sigma_\alpha)^{\infty\gamma}$

$= 1 + \Sigma_\alpha.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}$

$= 1 + \infty_\alpha(1/\infty_\alpha)$

$= 1 + \Sigma_\alpha.$

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$

$= 1 + \infty_\gamma(1/\infty_\alpha)$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)$

$= 1 + (1/\infty_\alpha)$ ■

$\boxed{11}$ 定理7-11（定理7-14を証明するための予備定理５）

$$[\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}]^{1/\infty\gamma} = \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta(1/\infty\gamma)}.$$

ただし，次の場合を除く．

$\alpha = \beta = \gamma$， $\alpha < \beta = \gamma$， $\alpha < \gamma < \gamma + 1 = \beta$， $\gamma = \alpha < \alpha + 1 = \beta$．

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha = \beta = \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}]^{1/\infty\alpha}$

$= \{1 + \infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$

$= (1 + \Sigma_\alpha)^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha(1/\infty\alpha)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\Sigma\alpha}$

$= 1 + \Sigma_\alpha.$

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}]^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= (1 + \infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= {\infty_\beta}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_\gamma).$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta(1/\infty_\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\alpha}]^{1/\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\gamma}$

$=(1+\Sigma_\alpha)^{1/\infty_\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\alpha(1/\infty_\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}]^{1/\infty_\beta}$

$=\{1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\beta}$

$=(1+\infty_\beta)^{1/\infty_\beta}$

$=\infty_\beta{}^{1/\infty_\beta}$

$=\{x : 1+(1/\infty_\beta)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}$.

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta(1/\infty_\beta)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\Sigma_\beta}$

$=1+\Sigma_\beta$.

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}]^{1/\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\gamma}$

$=(1+\infty_\beta)^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\beta{}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\beta & (\gamma+2\leqq\beta),\\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\beta\} & (\gamma+1=\beta).\end{cases}$$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta(1/\infty_\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}$

$=1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)$

$=1+\infty_\beta$

$=\infty_\beta$.

$\alpha=\gamma<\beta$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}]^{1/\infty_\alpha}$

$=\{1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\alpha}$

$=(1+\infty_\beta)^{1/\infty_\alpha}$

$=\infty_\beta{}^{1/\infty_\alpha}$

$$= \begin{cases} \infty_{\beta} \quad (\alpha + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_{\beta}\} \quad (\alpha + 1 = \beta). \end{cases}$$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}$

$= 1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$= 1 + \infty_{\beta}$

$= \infty_{\beta}.$

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}]^{1/\infty_{\gamma}}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}(1/\infty_{\gamma})}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}.$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}]^{1/\infty_{\beta}}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\beta}}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\beta}}$

$= 1 + (1/\infty_{\alpha}).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}(1/\infty_{\beta})}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\Sigma_{\beta}}$

$= 1 + (1/\infty_{\alpha}).$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}]^{1/\infty_{\alpha}}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\alpha}}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\alpha}}.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\alpha}}.$

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}]^{1/\infty_{\gamma}}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}(1/\infty_{\gamma})}$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}.$

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\beta}}]^{1/\infty_{\gamma}}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}$

$= (1 + \infty_{\beta})^{1/\infty_{\gamma}}$

$= \infty_{\beta}{}^{1/\infty_{\gamma}}$

$= \infty_{\beta}.$ $(\because \gamma + 2 \leqq \beta)$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta(1/\infty\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}$

$=1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\infty_{\beta}$

$=\infty_{\beta}.$

$\gamma<\alpha=\beta$ ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}$

$=(1+\Sigma_{\alpha})^{1/\infty\gamma}$

$=1+\Sigma_{\alpha}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha(1/\infty\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}$

$=1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\Sigma_{\alpha}.$

$\gamma<\beta<\alpha$ ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_{\alpha}).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta(1/\infty\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}$

$=1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+(1/\infty_{\alpha})$ ■

$\boxed{12}$ 定理7-12（定理7-14を証明するための予備定理６）

$$[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\beta}]^{\infty\gamma}=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\alpha}]^{\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}$

$=1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\Sigma_{\alpha}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{(1/\infty\alpha)\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\Sigma\alpha}$

$=1+\Sigma_{\alpha}.$

$\alpha<\beta<\gamma$ ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\gamma}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})$

$=1+\infty_{\gamma}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\infty_{\gamma}.$

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\alpha}]^{\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{(1/\infty\alpha)\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}.$

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\beta}]^{\infty\beta}$

$=\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\beta}$

$=1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\beta})$

$=1+\Sigma_{\beta}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{(1/\infty\beta)\infty\beta}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\Sigma\beta}$

$=1+\Sigma_{\beta}.$

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\gamma}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})$

$=1+(1/\infty_{\beta}).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\beta}$

$=1+(1/\infty_{\beta}).$

$\alpha=\gamma<\beta$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\beta}]^{\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\alpha}$

$=1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})$

$=1+(1/\infty_{\beta}).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{(1/\infty\beta)\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\beta}$

$=1+(1/\infty_{\beta}).$

$\beta<\gamma<\alpha$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha}).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha}).$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{\infty\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$

$= 1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)$

$= 1 + (1/\infty_\alpha)$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)\infty\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\Sigma\beta}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha)$.

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{\infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)\infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}$.

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$.

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$

$= 1 + \infty_\gamma(1/\infty_\beta)$

$= 1 + (1/\infty_\beta)$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_\beta)$.

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$

$= 1 + \infty_\gamma(1/\infty_\alpha)$

$= 1 + (1/\infty_\alpha)$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\alpha)\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha)$.

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$

$= 1 + \infty_\gamma(1/\infty_\alpha)$

$= 1 + (1/\infty_\alpha)$.

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$=1+(1/\infty_\alpha)$ ■

$\boxed{13}$ 定理7-13（定理7-14を証明するための予備定理７）

$$[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{1/\infty\gamma}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば，

左辺 $=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}]^{1/\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}.$

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\alpha)(1/\infty\alpha)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}.$

$\alpha<\beta<\gamma$ ならば，

左辺 $=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma).$

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma).$

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば，

左辺 $=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}.$

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\alpha)(1/\infty\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}.$

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば，

左辺 $=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{1/\infty\beta}$

$=\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\beta}$

$=1+(1/\infty_\beta).$

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\beta)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$=1+(1/\infty_\beta).$

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば，

左辺 $=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_\beta).$

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$=1+(1/\infty_\beta).$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{1/\infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\alpha}$

$= 1 + (1/\infty_\beta).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\alpha)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_\beta).$

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{1/\infty\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\beta)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_\alpha).$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{1/\infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\alpha)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}.$

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_\gamma).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_\gamma).$

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_\beta).$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$= 1 + (1/\infty_\beta).$

$\gamma<\alpha=\beta$ ならば，

左辺 $=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_\alpha)$.

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\alpha)(1/\infty\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$

$=1+(1/\infty_\alpha)$.

$\gamma<\beta<\alpha$ ならば，

左辺 $=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_\alpha)$.

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$=1+(1/\infty_\alpha)$ ■

$\boxed{14}$ 定理7-14（指数法則の第２式）

$x\in D^+$， $x=r+b$， 「 $r\in\langle R\rangle^+\cup\{0\}$， $b\in\Pi_0$」；

$m\in D^+$， $m=s+c$， 「 $s\in\langle R\rangle^+\cup\{0\}$， $c\in\Pi_0$」；

$n\in D^+$， $n=t+d$， 「 $t\in\langle R\rangle^+\cup\{0\}$， $d\in\Pi_0$」

とすれば，次の式が成り立つ．

$$(x^m)^n=x^{mn}.$$

ただし，次の場合を除く．

（＊１） $x=\infty_\alpha$， $m=\infty_\beta$， $n=1/\infty_\gamma$ で，

$\alpha=\beta=\gamma$， $\alpha<\beta<\beta+1=\gamma$， $\beta=\alpha<\alpha+1=\gamma$， $\alpha<\beta=\gamma$．

（＊２） $x=\infty_\alpha$， $m=1/\infty_\beta$， $n=\infty_\gamma$ で，

$\alpha=\beta=\gamma$， $\alpha<\beta<\gamma$， $\alpha=\beta<\gamma$， $\alpha<\beta=\gamma$，

$\gamma=\beta<\beta+1=\alpha$， $\gamma<\alpha=\beta$， $\gamma<\beta<\beta+1=\alpha$．

（＊３） $x=\infty_\alpha$， $m=1/\infty_\beta$， $n=1/\infty_\gamma$ で，

$0<\alpha=\beta=\gamma$， $\gamma=\beta<\beta+1=\alpha$， $0<\gamma<\alpha=\beta$， $\gamma<\beta<\beta+1=\alpha$．

（＊４） $1+(1/\infty_0)<x\in\mathcal{D}^+$， $m=\infty_\beta$， $n=1/\infty_\gamma$ で，

$\gamma=\beta$， $\gamma=\beta+1$．

（＊５） $1+(1/\infty_0)<x\in\mathcal{D}^+$， $m=1/\infty_\beta$， $n=\infty_\gamma$ で，

$\beta=\gamma$， $\beta<\gamma$．

（＊６） $x=1+(1/\infty_\alpha)$， $m=\infty_\beta$， $n=\infty_\gamma$ で，

$\alpha=\beta=\gamma$， $\alpha<\beta<\gamma$， $\alpha=\beta<\gamma$， $\alpha<\beta=\gamma$．

（＊７） $x=1+(1/\infty_\alpha)$， $m=\infty_\beta$， $n=1/\infty_\gamma$ で，

$\alpha=\beta=\gamma$， $\alpha<\beta=\gamma$， $\alpha<\gamma<\gamma+1=\beta$， $\gamma=\alpha<\alpha+1=\beta$．

（＊８）（＊１）～（＊７）における x を x^{-1} に置き換えた場合．

例：（＊１）の x を x^{-1} で置き換えれば，「 $x^{-1}=\infty_\alpha$， $m=\infty_\beta$， $n=1/\infty_\gamma$ で，

$\alpha=\beta=\gamma$， $\alpha<\beta<\beta+1=\gamma$， $\beta=\alpha<\alpha+1=\gamma$， $\alpha<\beta=\gamma$．」となる．

証明 (i) $x=\infty_\alpha$の場合：

(ア) $m=\infty_\beta$, $n=\infty_\gamma$ならば,

$$(x^m)^n=(\infty_\alpha{}^{\infty\beta})^{\infty\gamma}$$
$$=\infty_\alpha{}^{\infty\beta\infty\gamma}.\ (\because \text{定義}6\text{-}2)$$
$$x^{mn}=\infty_\alpha{}^{\infty\beta\infty\gamma}.$$

(イ) $m=\infty_\beta$, $n\in\mathscr{D}^+$ならば,

$$(x^m)^n=(\infty_\alpha{}^{\infty\beta})^n$$
$$=\infty_\alpha{}^{\infty\beta}.\ (\because \infty_0\leqq\infty_\alpha{}^{\infty\beta})$$
$$x^{mn}=\infty_\alpha{}^{\infty\beta n}$$
$$=\infty_\alpha{}^{\infty\beta}.$$

(ウ) $m=\infty_\beta$, $n=1/\infty_\gamma$ならば, 定理7-7参照.

(エ) $m\in\mathscr{D}^+$, $n=\infty_\gamma$ならば,

$$(x^m)^n=(\infty_\alpha{}^m)^{\infty\gamma}$$
$$=\infty_\alpha{}^{\infty\gamma}.$$
$$x^{mn}=\infty_\alpha{}^{m\infty\gamma}$$
$$=\infty_\alpha{}^{\infty\gamma}.$$

(オ) $m\in\mathscr{D}^+$, $n\in\mathscr{D}^+$ならば,

$$(x^m)^n=(\infty_\alpha{}^m)^n$$
$$=\infty_\alpha{}^n$$
$$=\infty_\alpha.$$
$$x^{mn}=\infty_\alpha{}^{mn}$$
$$=\infty_\alpha.\ (\because mn\in\mathscr{D}^+ \text{ または } mn\subset\mathscr{D}^+)$$

(カ) $m\in\mathscr{D}^+$, $n=1/\infty_\gamma$ならば,

$$(x^m)^n=(\infty_\alpha{}^m)^{1/\infty\gamma}$$
$$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}.$$
$$x^{mn}=\infty_\alpha{}^{m(1/\infty\gamma)}$$
$$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}.$$

(キ) $m=1/\infty_\beta$, $n=\infty_\gamma$ならば, 定理7-8参照.

(ク) $m=1/\infty_\beta$, $n\in\mathscr{D}^+$ならば,

$$(x^m)^n=(\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta})^n$$
$$=\begin{cases}\infty_\alpha{}^n=\infty_\alpha\ (\beta+2\leqq\alpha),\\ \{x:1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\}^n\\ \quad=\{x:1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\}\ (\beta+1=\alpha),\\ \{x:1+(1/\infty_\beta)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}^n\\ \quad=\{x:1+(1/\infty_\beta)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}\ (\beta=\alpha),\\ \{1+(1/\infty_\beta)\}^n=1+(1/\infty_\beta)\ (\beta>\alpha).\end{cases}$$
$$x^{mn}=\infty_\alpha{}^{(1/\infty\beta)n}$$
$$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}\quad(\because (1/\infty_\beta)n=1/\infty_\beta)$$

$$=\begin{cases} \infty_\alpha & (\beta+2\leqq\alpha), \\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\beta+1=\alpha), \\ \{x : 1+(1/\infty_\beta)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\} & (\beta=\alpha), \\ \{1+(1/\infty_\beta)\}^n=1+(1/\infty_\beta) & (\beta>\alpha). \end{cases}$$

（ケ） $m=1/\infty_\beta$， $n=1/\infty_\gamma$ならば，定理7-9参照．

（ⅱ）$1+(1/\infty_0)<x\in\mathcal{D}^+$の場合：

（ア） $m=\infty_\beta$， $n=\infty_\gamma$ならば，

$$(x^m)^n=(x^{\infty\beta})^{\infty\gamma}$$
$$={\infty_{\beta+1}}^{\infty\gamma}$$
$$=\begin{cases} \infty_{\gamma+1} & (\beta+1\leqq\gamma), \\ \\ \infty_{\beta+1} & (\beta+1>\gamma). \end{cases}$$

$$x^{mn}=x^{\infty\beta\infty\gamma}$$
$$=x^{\infty\max\{\beta,\ \gamma\}}$$
$$=\begin{cases} \infty_{\gamma+1} & (\beta<\gamma\Leftrightarrow\beta+1\leqq\gamma), \\ \\ \infty_{\beta+1} & (\beta\geqq\gamma\Leftrightarrow\beta+1>\gamma). \end{cases}$$

（イ） $m=\infty_\beta$， $n\in\mathcal{D}^+$ならば，

$$(x^m)^n=(x^{\infty\beta})^n$$
$$={\infty_{\beta+1}}^n$$
$$=\infty_{\beta+1}.$$

$$x^{mn}=x^{\infty\beta n}$$
$$=x^{\infty\beta}$$
$$=\infty_{\beta+1}.$$

（ウ） $m=\infty_\beta$， $n=1/\infty_\gamma$ならば，

$$(x^m)^n=(x^{\infty\beta})^{1/\infty\gamma}$$
$$={\infty_{\beta+1}}^{1/\infty\gamma}$$
$$=\begin{cases} \infty_{\beta+1} & (\gamma+2\leqq\beta+1\Leftrightarrow\gamma+1\leqq\beta), \\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_{\beta+1}\} & \\ \qquad (\gamma+1=\beta+1\Leftrightarrow\gamma=\beta), & \\ \{x : 1+(1/\infty_\gamma)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\} & (\gamma=\beta+1), \\ 1+(1/\infty_\gamma) & (\gamma>\beta+1). \end{cases}$$

$$x^{mn}=x^{\infty\beta(1/\infty\gamma)}$$
$$=\begin{cases} x^{\infty\beta}=\infty_{\beta+1} & (\gamma<\beta\Leftrightarrow\gamma+1\leqq\beta), \\ x^{\Sigma\beta}=\{x : 1+(1/\infty_\beta)\leqq x\leqq\infty_{\beta+1}\} & (\gamma=\beta), \\ x^{1/\infty\gamma}=1+(1/\infty_\gamma) & (\gamma>\beta\Leftrightarrow\gamma\geqq\beta+1). \end{cases}$$

（エ） $m\in\mathcal{D}^+$， $n=\infty_\gamma$ならば，

$$(x^m)^n=\{(r+b)^{s+c}\}^{\infty\gamma}$$
$$=\{r^s+(b+c)\}^{\infty\gamma}$$
$$=\infty_{\gamma+1}.\ (\because r^s+(b+c)\in\mathcal{D}^+ \text{ または } r^s+(b+c)\subset\mathcal{D}^+)$$

$$x^{mn} = x^{m\infty\gamma} = x^{\infty\gamma} = \infty_{\gamma+1}.$$

（オ） $m \in \mathcal{D}^+$， $n \in \mathcal{D}^+$ならば，

$$(x^m)^n = \{(r+b)^{s+c}\}^{t+d}$$
$$= \{r^s + (b+c)\}^{t+d} \quad (\because \text{定義6-6の(i)})$$
$$= (r^s)^t + \{(b+c)+d\}$$
$$= r^{st} + (b+c+d). \quad (\because \text{定理4-4，定理2-24})$$

$$x^{mn} = (r+b)^{(s+c)(t+d)}$$
$$= (r+b)^{st+(c+d)}$$
$$= r^{st} + \{b+(c+d)\} \quad (\because \text{定義6-6の(i)})$$
$$= r^{st} + (b+c+d). \quad (\because \text{定理2-24})$$

（カ） $m \in \mathcal{D}^+$， $n = 1/\infty_\gamma$ならば，

$$(x^m)^n = \{(r+b)^{s+c}\}^{1/\infty\gamma}$$
$$= \{r^s + (b+c)\}^{1/\infty\gamma} \quad (\because \text{定義6-6の(i)})$$
$$= 1 + (1/\infty_\gamma).$$

$$x^{mn} = (r+b)^{(s+c)(1/\infty\gamma)}$$
$$= (r+b)^{1/\infty\gamma}$$
$$= 1 + (1/\infty_\gamma).$$

（キ） $m = 1/\infty_\beta$， $n = \infty_\gamma$ならば，

$$(x^m)^n = \{(r+b)^{1/\infty\beta}\}^{\infty\gamma}$$
$$= \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$$
$$= 1 + \infty_\gamma(1/\infty_\beta)$$
$$= \begin{cases} 1 + \infty_\gamma = \infty_\gamma & (\beta < \gamma), \\ 1 + \Sigma_\beta & (\beta = \gamma), \\ 1 + (1/\infty_\beta) & (\beta > \gamma). \end{cases}$$

$$x^{mn} = (r+b)^{(1/\infty\beta)\infty\gamma}$$
$$= \begin{cases} (r+b)^{\infty\gamma} = \infty_{\gamma+1} & (\beta < \gamma), \\ (r+b)^{\Sigma\beta} = \{x : 1 + (1/\infty_\beta) \leqq x \leqq \infty_{\beta+1}\} & (\beta = \gamma), \\ (r+b)^{1/\infty\beta} = 1 + (1/\infty_\beta) & (\beta > \gamma). \end{cases}$$

（ク） $m = 1/\infty_\beta$， $n \in \mathcal{D}^+$ならば，

$$(x^m)^n = \{(r+b)^{1/\infty\beta}\}^n$$
$$= \{1 + (1/\infty_\beta)\}^n$$
$$= 1 + n(1/\infty_\beta)$$
$$= 1 + (1/\infty_\beta).$$

$$x^{mn} = (r+b)^{(1/\infty\beta)n}$$
$$= (r+b)^{1/\infty\beta}$$
$$= 1 + (1/\infty_\beta).$$

（ケ） $m = 1/\infty_\beta$， $n = 1/\infty_\gamma$ならば，

$$(x^m)^n = \{(r+b)^{1/\infty\beta}\}^{1/\infty\gamma}$$
$$= \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$$
$$= \begin{cases} 1 + (1/\infty_\gamma) \ (\beta \leqq \gamma), \\ \\ 1 + (1/\infty_\beta) \ (\beta > \gamma). \end{cases}$$

$$x^{mn} = (r+b)^{(1/\infty\beta)(1/\infty\gamma)}$$
$$= \begin{cases} (r+b)^{1/\infty\gamma} = 1 + (1/\infty_\gamma) \ (\beta \leqq \gamma), \\ \\ (r+b)^{1/\infty\beta} = 1 + (1/\infty_\beta) \ (\beta > \gamma). \end{cases}$$

（ⅲ） $x = 1 + (1/\infty_\alpha)$の場合：

（ア） $m = \infty_\beta$， $n = \infty_\gamma$ならば，定理7-10参照．

（イ） $m = \infty_\beta$， $n \in \mathcal{D}^+$ならば，

$$(x^m)^n = [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}]^n$$
$$= \{1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}^n$$
$$= \begin{cases} \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^n = 1 + n(1/\infty_\alpha) = 1 + (1/\infty_\alpha) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\alpha > \beta), \\ \\ (1 + \Sigma_\alpha)^n = 1 + \Sigma_\alpha \ (\alpha = \beta), \\ (1 + \infty_\beta)^n = \infty_\beta{}^n = \infty_\beta \ (\alpha < \beta). \end{cases}$$

$$x^{mn} = \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta n}$$
$$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}$$
$$= 1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)$$
$$= \begin{cases} 1 + (1/\infty_\alpha) \ (\alpha > \beta), \\ 1 + \Sigma_\alpha \ (\alpha = \beta), \\ 1 + \infty_\beta = \infty_\beta \ (\alpha < \beta). \end{cases}$$

（ウ） $m = \infty_\beta$， $n = 1/\infty_\gamma$ならば，定理7-11参照．

（エ） $m \in \mathcal{D}^+$， $n = \infty_\gamma$ならば，

$$(x^m)^n = [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^m]^{\infty\gamma}$$
$$= \{1 + m(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}$$
$$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}.$$

$$x^{mn} = \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{m\infty\gamma}$$
$$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}.$$

（オ） $m \in \mathcal{D}^+$， $n \in \mathcal{D}^+$ならば，

$$(x^m)^n = [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^m]^n$$
$$= \{1 + m(1/\infty_\alpha)\}^n$$
$$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^n$$
$$= 1 + n(1/\infty_\alpha)$$
$$= 1 + (1/\infty_\alpha).$$

$$x^{mn} = \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{mn}$$
$$= 1 + mn(1/\infty_\alpha)$$

$= 1 + (1/\infty_\alpha)$. $(\because mn \in \mathcal{D}^+$ または $mn \subset \mathcal{D}^+)$

（カ） $m \in \mathcal{D}^+$, $n = 1/\infty_\gamma$ ならば，

$$(x^m)^n = [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^m]^{1/\infty\gamma}$$
$$= \{1 + m(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$$
$$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}.$$
$$x^{mn} = \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{m(1/\infty\gamma)}$$
$$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}.$$

（キ） $m = 1/\infty_\beta$, $n = \infty_\gamma$ ならば，定理7-12参照．

（ク） $m = 1/\infty_\beta$, $n \in \mathcal{D}^+$ ならば，

$$(x^m)^n = [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}]^n$$
$$= \begin{cases} \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^n = 1 + n(1/\infty_\alpha) = 1 + (1/\infty_\alpha) \ (\beta \leqq \alpha), \\ \\ \{1 + (1/\infty_\beta)\}^n = 1 + n(1/\infty_\beta) = 1 + (1/\infty_\beta) \ (\beta > \alpha). \end{cases}$$
$$x^{mn} = \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{(1/\infty\beta)n}$$
$$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$$
$$= \begin{cases} 1 + (1/\infty_\alpha) \ (\beta \leqq \alpha), \\ \\ 1 + (1/\infty_\beta) \ (\beta > \alpha). \end{cases}$$

（ケ） $m = 1/\infty_\beta$, $n = 1/\infty_\gamma$ ならば，定理7-13参照．

（ⅳ） $x = 1$ の場合：

定義6-8の（ⅳ）より，$1^m = 1^n = 1^{mn} = 1$ であるので，

$$(x^m)^n = (1^m)^n$$
$$= 1^n$$
$$= 1.$$
$$x^{mn} = 1^{mn}$$
$$= 1.$$

（ⅴ） $0 < x < 1$ の場合：

$1 < x^{-1}$ であるので，

$$(x^m)^n = [\{(x^{-1})^m\}^{-1}]^n \quad (\because \text{定義6-8の}(\text{v}))$$
$$= [\{(x^{-1})^m\}^n]^{-1} \quad (\because \text{定理6-7})$$
$$= \{(x^{-1})^{mn}\}^{-1} \quad (\because (\text{i}) \sim (\text{iii}),\ \text{条件}(*1) \sim (*8))$$
$$= \{(x^{mn})^{-1}\}^{-1} \quad (\because \text{定理6-7})$$
$$= x^{mn} \blacksquare$$

$\boxed{15}$ 定理7-15（定理7-31を証明するための予備定理１）

$$(\infty_\alpha \infty_\beta)^{1/\infty\gamma} = \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma} \cdot \infty_\beta{}^{1/\infty\gamma}.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha = \beta = \gamma$ ならば，

$$\text{左辺} = (\infty_\alpha \infty_\alpha)^{1/\infty\alpha}$$
$$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}.$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha} \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$

$\cdot \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}.$

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= (\infty_\alpha \infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_\beta{}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_\gamma).$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma} \cdot \infty_\beta{}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\gamma)\}$

$= 1 + (1/\infty_\gamma).$

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= (\infty_\alpha \infty_\alpha)^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_\gamma).$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma} \cdot \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\gamma)\}$

$= 1 + (1/\infty_\gamma).$

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば,

左辺 $= (\infty_\alpha \infty_\beta)^{1/\infty\beta}$

$= \infty_\beta{}^{1/\infty\beta}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\beta) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}.$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta} \cdot \infty_\beta{}^{1/\infty\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\} \cdot \{x : 1 + (1/\infty_\beta) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\beta) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}.$

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= (\infty_\alpha \infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_\beta{}^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \infty_\beta & (\gamma + 2 \leqq \beta), \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\beta\} & (\gamma + 1 = \beta). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma} \cdot \infty_\beta{}^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \{1 + (1/\infty_\gamma)\}\infty_\beta = \infty_\beta & (\gamma + 2 \leqq \beta), \\ \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\beta\} & \end{cases}$$

$= \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\beta\} \quad (\gamma + 1 = \beta).$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= (\infty_\alpha \infty_\beta)^{1/\infty\alpha}$

$= \infty_\beta{}^{1/\infty\alpha}$

$$= \begin{cases} \infty_\beta & (\alpha + 2 \leqq \beta), \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\beta\} & (\alpha + 1 = \beta). \end{cases}$$

右辺$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha} \cdot \infty_\beta{}^{1/\infty\alpha}$

$$= \begin{cases} \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}\infty_\beta = \infty_\beta \\ \qquad\qquad (\alpha + 2 \leqq \beta), \\ \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\} \\ \qquad \cdot \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\beta\} \end{cases}$$

$$= \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\beta\} \quad (\alpha + 1 = \beta).$$

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば，

左辺$= (\infty_\alpha \infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha & (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} & (\gamma + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma} \cdot \infty_\beta{}^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha\{1 + (1/\infty_\gamma)\} = \infty_\alpha & (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \cdot \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \end{cases}$$

$$= \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\gamma + 1 = \alpha).$$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば，

左辺$= (\infty_\alpha \infty_\beta)^{1/\infty\beta}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha & (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} & (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta} \cdot \infty_\beta{}^{1/\infty\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha\{x : 1 + (1/\infty_\beta) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\} = \infty_\alpha & (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \\ \qquad \cdot \{x : 1 + (1/\infty_\beta) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\} \end{cases}$$

$$= \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\beta + 1 = \alpha).$$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば，

左辺$= (\infty_\alpha \infty_\beta)^{1/\infty\alpha}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}.$

右辺$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha} \cdot \infty_\beta{}^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}.$

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば，

左辺$=(\infty_\alpha \infty_\beta)^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\cdot\infty_\beta{}^{1/\infty_\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば，$\gamma+2 \leqq \beta$ より，

左辺$=(\infty_\alpha \infty_\beta)^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\beta{}^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\beta$.

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\cdot\infty_\beta{}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha\infty_\beta=\infty_\beta & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\}\infty_\beta=\infty_\beta & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば，

左辺$=(\infty_\alpha \infty_\alpha)^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\cdot\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha\infty_\alpha=\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\}\cdot\{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\}\\ \quad =\{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば，$\gamma+2\leqq\alpha$ より，

左辺$=(\infty_\alpha \infty_\beta)^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha$.

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\cdot\infty_\beta{}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha\infty_\beta=\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\beta),\\ \\ \infty_\alpha\{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\beta\}=\infty_\alpha & (\gamma+1=\beta)\end{cases}$$ ■

$\boxed{16}$ 定理7-16（定理7-31を証明するための予備定理２）

$$[\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば，

左辺 $=[\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty\alpha}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$

$=\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}.$

右辺 $=\infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$

$=\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}$

$=\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}.$

$\alpha<\beta<\gamma$ ならば，

左辺 $=[\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma).$

右辺 $=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$

$=1+(1/\infty_\gamma).$

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば，

左辺 $=[\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma).$

右辺 $=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$

$=1+(1/\infty_\gamma).$

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば，

左辺 $=[\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\beta}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$

$=1+(1/\infty_\beta).$

右辺 $=\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\beta}$

$=\{1+(1/\infty_\beta)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}$

$=1+(1/\infty_\beta).$

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば，

左辺 $=[\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma).$

右辺 $=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}$

$=1+(1/\infty_\gamma).$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= [\infty_\alpha\{1 + (1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\alpha}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$.

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}\{1 + (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\beta)\}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$.

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= [\infty_\alpha\{1 + (1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha \quad (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\gamma + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}\{1 + (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha\{1 + (1/\infty_\gamma)\} = \infty_\alpha \quad (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \cdot \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \\ \quad = \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\gamma + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= [\infty_\alpha\{1 + (1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\beta}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}\{1 + (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\beta}$

$$= \begin{cases} \infty_\alpha\{1 + (1/\infty_\beta)\} = \infty_\alpha \quad (\beta + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \cdot \{1 + (1/\infty_\beta)\} \\ \quad = \{x : 1 + (1/\infty_0) < x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\beta + 1 = \alpha). \end{cases}$$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば,

左辺 $= [\infty_\alpha\{1 + (1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\alpha}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$.

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}\{1 + (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}$

$= \{x : 1 + (1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_0)\}$.

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\infty_\alpha\{1 + (1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_\gamma)$.

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty_\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

$\gamma<\alpha<\beta$ ならば,

左辺$=[\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\}=\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\} & \\ \quad=\{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

$\gamma<\alpha=\beta$ ならば,

左辺$=[\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\alpha)\}=\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\} & \\ \quad=\{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

$\gamma<\beta<\alpha$ ならば,

左辺$=[\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha$ ($\because\ \gamma+2\leqq\alpha$).

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\}$ ($\because\ \gamma+2\leqq\alpha$)

$=\infty_\alpha$ ■

$\boxed{17}$ 定理7-17（定理7-31を証明するための予備定理３）

$$[\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}.$$

ただし，次の場合を除く．

$\alpha=\beta=\gamma$，$\alpha<\beta<\gamma$，$\alpha=\beta<\gamma$，$\alpha<\beta=\gamma$，$\beta<\gamma=\alpha$，$\beta<\alpha<\gamma$．

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば，

左辺 $=[\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty\alpha}$
$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}$
$=\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}$.

右辺 $=\infty_\alpha{}^{1/\infty\alpha}\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$
$=\{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}$
$=\{x : 1-(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\}$.

$\alpha<\beta<\gamma$ ならば，

左辺 $=[\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$
$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$
$=1+(1/\infty_\gamma)$.

右辺 $=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$
$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1-(1/\infty_\gamma)\}$
$=1+\Pi_\gamma$.

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば，

左辺 $=[\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty\gamma}$
$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$
$=1+(1/\infty_\gamma)$.

右辺 $=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$
$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1-(1/\infty_\gamma)\}$
$=1+\Pi_\gamma$.

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば，

左辺 $=[\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\beta}$
$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}$
$=1+(1/\infty_\beta)$.

右辺 $=\infty_\alpha{}^{1/\infty\beta}\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\beta}$
$=\{1+(1/\infty_\beta)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}$
$=1+\Pi_\beta$.

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば，

左辺 $=[\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$
$=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$
$=1+(1/\infty_\gamma)$.

右辺 $=\infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma}\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$
$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}$
$=1+(1/\infty_\gamma)$.

$\alpha=\gamma<\beta$ ならば,

左辺 $=[\infty_{\alpha}\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{1/\infty\alpha}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}$

$=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}.$

右辺 $=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\alpha}$

$=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}$

$=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}.$

$\beta<\gamma<\alpha$ ならば,

左辺 $=[\infty_{\alpha}\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha} & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\} & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

右辺 $=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha}\{1-(1/\infty_{\gamma})\}=\infty_{\alpha} \quad (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\}\\ \quad =\{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\} \quad (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

$\beta=\gamma<\alpha$ ならば,

左辺 $=[\infty_{\alpha}\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{1/\infty\beta}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha} & (\beta+2\leqq\alpha),\\ \\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\} & (\beta+1=\alpha).\end{cases}$$

右辺 $=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\beta}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha}\{1-(1/\infty_{\beta})\}=\infty_{\alpha} \quad (\beta+2\leqq\alpha),\\ \\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}\\ \quad =\{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\} \quad (\beta+1=\alpha).\end{cases}$$

$\beta<\gamma=\alpha$ ならば,

左辺 $=[\infty_{\alpha}\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{1/\infty\alpha}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}$

$=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}.$

右辺 $=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\alpha}$

$=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\alpha})\}$

$=\{x : 1-(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}.$

$\beta<\alpha<\gamma$ ならば,

左辺 $=[\infty_{\alpha}\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_{\gamma}).$

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty_\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1-(1/\infty_\gamma)\}$

$=1+\Pi_\gamma$.

$\gamma<\alpha<\beta$ ならば,

左辺$=[\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\beta)\}=\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\} & \\ \quad=\{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

$\gamma<\alpha=\beta$ ならば,

左辺$=[\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\alpha)\}=\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\} & \\ \quad=\{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

$\gamma<\beta<\alpha$ ならば,

左辺$=[\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha$. ($\because\ \gamma+2\leqq\alpha$)

右辺$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty_\gamma}$

$=\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\beta)\}$ ($\because\ \gamma+2\leqq\alpha$)

$=\infty_\alpha$ ■

$\boxed{18}$ 定理7-18（定理7-31を証明するための予備定理４）

$$\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\gamma}=\infty_{\alpha}{}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}.$$

ただし，次の場合を除く．

$\alpha<\beta<\gamma$，$\alpha<\beta=\gamma$，$\alpha<\gamma<\gamma+1=\beta$，$\gamma=\alpha<\alpha+1=\beta$，

$\beta<\gamma<\gamma+1=\alpha$，$\gamma=\beta<\beta+1=\alpha$，$\beta<\gamma=\alpha$，$\beta<\alpha<\gamma$．

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ならば，

$$\begin{aligned}左辺&=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}\\&=\Sigma_{\alpha}{}^{\infty\alpha}\\&=\Sigma_{\alpha+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}右辺&=\infty_{\alpha}{}^{\infty\alpha}\cdot(1/\infty_{\alpha})^{\infty\alpha}\\&=\infty_{\alpha+1}(1/\infty_{\alpha+1})\\&=\Sigma_{\alpha+1}.\end{aligned}$$

$\alpha<\beta<\gamma$ならば，

$$\begin{aligned}左辺&=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\gamma}\\&=(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}\\&=1/\infty_{\gamma+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}右辺&=\infty_{\alpha}{}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}\\&=\infty_{\gamma+1}(1/\infty_{\gamma+1})\\&=\Sigma_{\gamma+1}.\end{aligned}$$

$\alpha=\beta<\gamma$ならば，

$$\begin{aligned}左辺&=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\\&=\Sigma_{\alpha}{}^{\infty\gamma}\\&=\Sigma_{\gamma+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}右辺&=\infty_{\alpha}{}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\alpha})^{\infty\gamma}\\&=\infty_{\gamma+1}(1/\infty_{\gamma+1})\\&=\Sigma_{\gamma+1}.\end{aligned}$$

$\alpha<\beta=\gamma$ならば，

$$\begin{aligned}左辺&=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\beta}\\&=(1/\infty_{\beta})^{\infty\beta}\\&=1/\infty_{\beta+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}右辺&=\infty_{\alpha}{}^{\infty\beta}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\beta}\\&=\infty_{\beta+1}(1/\infty_{\beta+1})\\&=\Sigma_{\beta+1}.\end{aligned}$$

$\alpha<\gamma<\beta$ならば，

$$\begin{aligned}左辺&=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\gamma}\\&=(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}\\&=1/\infty_{\beta}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}右辺&=\infty_{\alpha}{}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}\\&=\infty_{\gamma+1}(1/\infty_{\beta})\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1/\infty_\beta \quad (\gamma+1<\beta), \\ \\ \Sigma_\beta \quad (\gamma+1=\beta). \end{cases}$$

$\alpha=\gamma<\beta$ ならば,

$$\text{左辺} = \{\infty_\alpha(1/\infty_\beta)\}^{\infty\alpha}$$
$$= (1/\infty_\beta)^{\infty\alpha}$$
$$= 1/\infty_\beta.$$
$$\text{右辺} = \infty_\alpha{}^{\infty\alpha}\cdot(1/\infty_\beta)^{\infty\alpha}$$
$$= \infty_{\alpha+1}(1/\infty_\beta)$$
$$= \begin{cases} 1/\infty_\beta \quad (\alpha+1<\beta), \\ \\ \Sigma_\beta \quad (\alpha+1=\beta). \end{cases}$$

$\beta<\gamma<\alpha$ ならば,

$$\text{左辺} = \{\infty_\alpha(1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$$
$$= \infty_\alpha{}^{\infty\gamma}$$
$$= \infty_\alpha.$$
$$\text{右辺} = \infty_\alpha{}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$$
$$= \infty_\alpha(1/\infty_{\gamma+1})$$
$$= \begin{cases} \infty_\alpha \quad (\gamma+1<\alpha), \\ \\ \Sigma_\alpha \quad (\gamma+1=\alpha). \end{cases}$$

$\beta=\gamma<\alpha$ ならば,

$$\text{左辺} = \{\infty_\alpha(1/\infty_\beta)\}^{\infty\beta}$$
$$= \infty_\alpha{}^{\infty\beta}$$
$$= \infty_\alpha.$$
$$\text{右辺} = \infty_\alpha{}^{\infty\beta}\cdot(1/\infty_\beta)^{\infty\beta}$$
$$= \infty_\alpha(1/\infty_{\beta+1})$$
$$= \begin{cases} \infty_\alpha \quad (\beta+1<\alpha), \\ \\ \Sigma_\alpha \quad (\beta+1=\alpha). \end{cases}$$

$\beta<\gamma=\alpha$ ならば,

$$\text{左辺} = \{\infty_\alpha(1/\infty_\beta)\}^{\infty\alpha}$$
$$= \infty_\alpha{}^{\infty\alpha}$$
$$= \infty_{\alpha+1}.$$
$$\text{右辺} = \infty_\alpha{}^{\infty\alpha}\cdot(1/\infty_\beta)^{\infty\alpha}$$
$$= \infty_{\alpha+1}(1/\infty_{\alpha+1})$$
$$= \Sigma_{\alpha+1}.$$

$\beta<\alpha<\gamma$ ならば,

$$\text{左辺} = \{\infty_\alpha(1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$$
$$= \infty_\alpha{}^{\infty\gamma}$$

$=\infty_{\gamma+1}$.

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\gamma+1}(1/\infty_{\gamma+1})$

$=\Sigma_{\gamma+1}$.

$\gamma<\alpha<\beta$ ならば，

左辺$=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\gamma}$

$=(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$=1/\infty_{\beta}$.

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})$

$=1/\infty_{\beta}$.

$\gamma<\alpha=\beta$ ならば，

左辺$=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$=\Sigma_{\alpha}{}^{\infty\gamma}$

$=\Sigma_{\alpha}$.

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\alpha})^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})$

$=\Sigma_{\alpha}$.

$\gamma<\beta<\alpha$ ならば，

左辺$=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\alpha}$.

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})$

$=\infty_{\alpha}$■

$\boxed{19}$ 定理7-19（定理7-31を証明するための予備定理５）

$$\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}.$$

ただし，次の場合を除く．

$$\alpha<\beta<\gamma,\ \alpha<\beta=\gamma,\ \beta<\gamma=\alpha,\ \beta<\alpha<\gamma.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば，

左辺$=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\alpha}$

$=\Sigma_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}$

$=1+\Pi_{0}$.

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}\cdot(1/\infty_{\alpha})^{1/\infty\alpha}$

$=\{x:1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}$

$\cdot\{x:1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\alpha})\}$

$=1+\Pi_{0}$.

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= \{\infty_\alpha (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= 1 - (1/\infty_\gamma)$.

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\gamma)\}$

$= 1 + \Pi_\gamma$.

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= \{\infty_\alpha (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= \Sigma_\alpha{}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + \Pi_\gamma$.

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\alpha)^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\gamma)\}$

$= 1 + \Pi_\gamma$.

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば,

左辺 $= \{\infty_\alpha (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\beta}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\beta}$

$= \{x : 1 - (1/\infty_0) \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\}$.

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\beta} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\} \cdot \{x : 1 - (1/\infty_0) \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\}$

$= \{x : 1 - (1/\infty_0) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_\beta)\}$.

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= \{\infty_\alpha (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} 1/\infty_\beta \quad (\gamma + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \quad (\gamma + 1 = \beta). \end{cases}$$

右辺 $= \infty_\alpha{}^{1/\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot (1/\infty_\beta) = 1/\infty_\beta \quad (\gamma + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \\ \quad = \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \quad (\gamma + 1 = \beta). \end{cases}$$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= \{\infty_\alpha (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\alpha}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\alpha}$

$$= \begin{cases} 1/\infty_\beta \quad (\alpha + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \quad (\alpha + 1 = \beta). \end{cases}$$

右辺 $=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\alpha}$

$$=\begin{cases}\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}\cdot(1/\infty_{\beta}) \\ \quad =1/\infty_{\beta}\quad(\alpha+2\leqq\beta), \\ \{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\} \\ \qquad\qquad\cdot\{x : 1/\infty_{\beta}\leqq x<1-(1/\infty_{0})\} \\ \quad =\{x : 1/\infty_{\beta}\leqq x<1-(1/\infty_{0})\}\quad(\alpha+1=\beta).\end{cases}$$

$\beta<\gamma<\alpha$ ならば,

左辺 $=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha}\quad(\gamma+2\leqq\alpha), \\ \\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\}\quad(\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

右辺 $=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\}=\infty_{\alpha}\quad(\gamma+2\leqq\alpha), \\ \\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\} \\ \quad =\{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\}\quad(\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

$\beta=\gamma<\alpha$ ならば,

左辺 $=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\beta}$

$$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}$$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha}\quad(\beta+2\leqq\alpha), \\ \\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\}\quad(\beta+1=\alpha).\end{cases}$$

右辺 $=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\beta}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\beta}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha}\cdot\{x : 1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\beta})\}=\infty_{\alpha} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad(\beta+2\leqq\alpha), \\ \{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\} \\ \qquad\qquad\cdot\{x : 1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\beta})\} \\ \quad =\{x : 1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\}\quad(\beta+1=\alpha).\end{cases}$$

$\beta<\gamma=\alpha$ ならば,

左辺 $=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\alpha}$

$$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}$$

$$=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}.$$

右辺 $=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\alpha}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\alpha}$

$$=\{x : 1+(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\alpha})\}$$

$$=\{x : 1-(1/\infty_{\alpha})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}.$$

$\beta<\alpha<\gamma$ ならば,

左辺 $=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty\gamma}$$

$$=1+(1/\infty_{\gamma}).$$

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\gamma}}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty_{\gamma}}$

$=\{1+(1/\infty_{\gamma})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\}$

$=1+\Pi_{\gamma}.$

$\gamma<\alpha<\beta$ ならば，$\gamma+2\leqq\beta$ より，

左辺$=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty_{\gamma}}$

$=(1/\infty_{\beta})^{1/\infty_{\gamma}}$

$=1/\infty_{\beta}.$

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\gamma}}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty_{\gamma}}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})=1/\infty_{\beta}\quad(\gamma+2\leqq\alpha),\\ \\ \{x:1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\}\cdot(1/\infty_{\beta})=1/\infty_{\beta}\quad(\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

$\gamma<\alpha=\beta$ ならば，

左辺$=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty_{\gamma}}$

$=\Sigma_{\alpha}{}^{1/\infty_{\gamma}}$

$=\Sigma_{\alpha}.$

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\gamma}}\cdot(1/\infty_{\alpha})^{1/\infty_{\gamma}}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})=\Sigma_{\alpha}\quad(\gamma+2\leqq\alpha),\\ \\ \{x:1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\}\\ \qquad\cdot\{x:1/\infty_{\alpha}\leqq x<1-(1/\infty_{0})\}\\ \ =\Sigma_{\alpha}\quad(\gamma+1=\alpha).\end{cases}$$

$\gamma<\beta<\alpha$ ならば，$\gamma+2\leqq\alpha$ より，

左辺$=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty_{\gamma}}$

$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\gamma}}$

$=\infty_{\alpha}.$

右辺$=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\gamma}}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty_{\gamma}}$

$$=\begin{cases}\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})=\infty_{\alpha}\quad(\gamma+2\leqq\beta),\\ \\ \infty_{\alpha}\{x:1/\infty_{\beta}\leqq x<1-(1/\infty_{0})\}=\infty_{\alpha}\quad(\gamma+1=\beta)\end{cases}$$ ■

20 定理7-20（定理7-31を証明するための予備定理６）

$[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}]^{\infty_{\gamma}}=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\gamma}}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty_{\gamma}}.$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}]^{\infty_{\alpha}}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}}$

$=1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+\Sigma_{\alpha}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}}$

$=\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}$

$= (1 + \Sigma_\alpha) \cdot (1 + \Sigma_\alpha)$

$= 1 + \Sigma_\alpha.$

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$= 1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\gamma$

$= \infty_\gamma.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma} \cdot \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\beta)\}$

$= (1 + \infty_\gamma) \cdot (1 + \infty_\gamma)$

$= \infty_\gamma \infty_\gamma$

$= \infty_\gamma.$

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}]^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$= 1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\gamma$

$= \infty_\gamma.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma} \cdot \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\}$

$= (1 + \infty_\gamma) \cdot (1 + \infty_\gamma)$

$= \infty_\gamma \infty_\gamma$

$= \infty_\gamma.$

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}$

$= 1 + \infty_\beta (1/\infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\beta$

$= \infty_\beta.$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta} \cdot \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{\infty_\beta}$

$= \{1 + \infty_\beta (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\beta (1/\infty_\beta)\}$

$= (1 + \infty_\beta) \cdot (1 + \Sigma_\beta)$

$= \infty_\beta (1 + \Sigma_\beta)$

$= \infty_\beta.$

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$= 1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\gamma$

$=\infty_\gamma.$

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)\}$

$=(1+\infty_\gamma)\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}$

$=\infty_\gamma\{1+(1/\infty_\beta)\}$

$=\infty_\gamma.$

$\alpha=\gamma<\beta$ ならば,

左辺 $=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}$

$=1+\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)$

$=1+\Sigma_\alpha.$

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{\infty\alpha}$

$=\{1+\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+\infty_\alpha(1/\infty_\beta)\}$

$=(1+\Sigma_\alpha)\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}$

$=1+\Sigma_\alpha.$

$\beta<\gamma<\alpha$ ならば,

左辺 $=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$

$=1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)$

$=1+\infty_\gamma$

$=\infty_\gamma.$

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)\}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1+\infty_\gamma)$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\infty_\gamma$

$=\infty_\gamma.$

$\beta=\gamma<\alpha$ ならば,

左辺 $=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{\infty\beta}$

$=\{1+(1/\infty_\beta)\}^{\infty\beta}$

$=1+\infty_\beta(1/\infty_\beta)$

$=1+\Sigma_\beta.$

右辺 $=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{\infty\beta}$

$=\{1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+\infty_\beta(1/\infty_\beta)\}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1+\Sigma_\beta)$

$=1+\Sigma_\beta.$

$\beta<\gamma=\alpha$ ならば,

左辺 $=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_\beta)\}^{\infty\alpha}$

$=1+\infty_\alpha(1/\infty_\beta)$

$=1+\infty_\alpha$

$=\infty_{\alpha}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty_{\alpha}}$

$=\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}$

$=(1+\Sigma_{\alpha})\cdot(1+\infty_{\alpha})$

$=(1+\Sigma_{\alpha})\infty_{\alpha}$

$=\infty_{\alpha}.$

$\beta<\alpha<\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}]^{\infty_{\gamma}}$

$=\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty_{\gamma}}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})$

$=1+\infty_{\gamma}$

$=\infty_{\gamma}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\gamma}}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty_{\gamma}}$

$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})\}$

$=(1+\infty_{\gamma})\cdot(1+\infty_{\gamma})$

$=\infty_{\gamma}\infty_{\gamma}$

$=\infty_{\gamma}.$

$\gamma<\alpha<\beta$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}]^{\infty_{\gamma}}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\gamma}}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+(1/\infty_{\alpha}).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\gamma}}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty_{\gamma}}$

$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})\}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}$

$=1+(1/\infty_{\alpha}).$

$\gamma<\alpha=\beta$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}]^{\infty_{\gamma}}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\gamma}}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})$

$=1+(1/\infty_{\alpha}).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\gamma}}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty_{\gamma}}$

$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\alpha})\}$

$=1+(1/\infty_{\alpha}).$

$\gamma<\beta<\alpha$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}]^{\infty_{\gamma}}$

$=\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{\infty_{\gamma}}$

$=1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})$

$=1+(1/\infty_{\beta}).$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)\}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}$

$=1+(1/\infty_\beta)$ ■

$\boxed{21}$ 定理7-21（定理7-31を証明するための予備定理７）

$$[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$

$=1+(1/\infty_\alpha)$.

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}$

$=1+(1/\infty_\alpha)$.

$\alpha<\beta<\gamma$ ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\beta}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$=1+(1/\infty_\beta)$.

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\beta}$

$=\{1+(1/\infty_\beta)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}$

$=1+(1/\infty_\beta)$.

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば，

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1 / \infty_{\gamma}).$

右辺$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\gamma}} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\gamma})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}$

$= 1 + (1 / \infty_{\gamma}).$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

左辺$= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}]^{1 / \infty_{\alpha}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\alpha}}$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha}).$

右辺$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\alpha}} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\alpha}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha}).$

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば,

左辺$= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}]^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= 1 + (1 / \infty_{\gamma}).$

右辺$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\gamma}} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\gamma})\}$

$= 1 + (1 / \infty_{\gamma}).$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば,

左辺$= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}]^{1 / \infty_{\beta}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\beta}}$

$= 1 + (1 / \infty_{\beta}).$

右辺$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\beta}} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\beta}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}$

$= 1 + (1 / \infty_{\beta}).$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば,

左辺$= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}]^{1 / \infty_{\alpha}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\alpha}}$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha}).$

右辺$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\alpha}} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\alpha}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha}).$

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば,

左辺$= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}]^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= 1 + (1 / \infty_{\gamma}).$

右辺$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\gamma}} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\gamma})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\gamma})\}$

$= 1 + (1 / \infty_{\gamma}).$

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}]^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha})$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\gamma}} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha})$.

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}]^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha})$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\gamma}} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha})$.

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}]^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= 1 + (1 / \infty_{\beta})$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{1 / \infty_{\gamma}} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{1 / \infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}$

$= 1 + (1 / \infty_{\beta})$ ■

22 定理7-22（定理7-31を証明するための予備定理８）

$[\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\beta})\}]^{\infty_{\gamma}} = \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty_{\gamma}} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\beta})\}^{\infty_{\gamma}}$.

ただし，次の場合を除く．

$\alpha < \beta < \gamma$，$\alpha < \beta = \gamma$，$\beta < \gamma = \alpha$，$\beta < \alpha < \gamma$.

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5より，次の結果を得る．

$\alpha = \beta = \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\alpha})\}]^{\infty_{\alpha}}$

$= (1 + \Pi_{\alpha})^{\infty_{\alpha}}$

$= \Sigma_{\alpha}$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty_{\alpha}}$

$= \{1 + \infty_{\alpha}(1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + \infty_{\alpha}(1 / \infty_{\alpha})\}^{-1}$

$= (1 + \Sigma_{\alpha}) \cdot (1 + \Sigma_{\alpha})^{-1}$

$= \Sigma_{\alpha}$.

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\beta})\}]^{\infty_{\gamma}}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty_{\gamma}}$

$= 1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\alpha})$

$= 1 + \infty_{\gamma}$

$= \infty_\gamma .$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$= (1 + \infty_\gamma) \cdot (1 + \infty_\gamma)^{-1}$

$= \infty_\gamma \infty_\gamma^{-1}$

$= \infty_\gamma (1/\infty_\gamma)$

$= \Sigma_\gamma .$

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\alpha)\}]^{\infty_\gamma}$

$= (1 + \Pi_\alpha)^{\infty_\gamma}$

$= \Sigma_\gamma .$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma} \cdot \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$= (1 + \infty_\gamma) \cdot (1 + \infty_\gamma)^{-1}$

$= \infty_\gamma \infty_\gamma^{-1}$

$= \infty_\gamma (1/\infty_\gamma)$

$= \Sigma_\gamma .$

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}$

$= 1 + \infty_\beta (1/\infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\beta$

$= \infty_\beta .$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty_\beta}$

$= \{1 + \infty_\beta (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\beta (1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$= (1 + \infty_\beta) \cdot (1 + \Sigma_\beta)^{-1}$

$= \infty_\beta (1 + \Sigma_\beta)^{-1}$

$= \Sigma_\beta .$

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$= 1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)$

$= 1 + \infty_\gamma$

$= \infty_\gamma .$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$= (1 + \infty_\gamma) \cdot \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$= \infty_\gamma \{1 - (1/\infty_\beta)\}$

$= \infty_\gamma .$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{\infty\alpha} \\
&= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha} \\
&= 1 + \infty_\alpha (1/\infty_\alpha) \\
&= 1 + \Sigma_\alpha. \\
\text{右辺} &= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty\alpha} \\
&= \{1 + \infty_\alpha (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\alpha (1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= (1 + \Sigma_\alpha) \cdot \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= (1 + \Sigma_\alpha) \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\} \\
&= 1 + \Sigma_\alpha.
\end{aligned}$$

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば,

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{\infty\gamma} \\
&= \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma} \\
&= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= (1 + \infty_\gamma)^{-1} \\
&= \infty_\gamma{}^{-1} \\
&= 1/\infty_\gamma. \\
\text{右辺} &= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma} \\
&= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1 + \infty_\gamma)^{-1} \\
&= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \infty_\gamma{}^{-1} \\
&= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\gamma) \\
&= 1/\infty_\gamma.
\end{aligned}$$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば,

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{\infty\beta} \\
&= \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty\beta} \\
&= \{1 + \infty_\beta (1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= (1 + \Sigma_\beta)^{-1} \\
&= \{x : 1/\infty_\beta \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\}. \\
\text{右辺} &= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty\beta} \\
&= \{1 + \infty_\beta (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\beta (1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1 + \Sigma_\beta)^{-1} \\
&= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{x : 1/\infty_\beta \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\} \\
&= \{x : 1/\infty_\beta \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\}.
\end{aligned}$$

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば,

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{\infty\alpha} \\
&= \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty\alpha} \\
&= \{1 + \infty_\alpha (1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= (1 + \infty_\alpha)^{-1} \\
&= \infty_\alpha{}^{-1}
\end{aligned}$$

$= 1 / \infty_{\alpha}$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty \alpha} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\beta})\}^{\infty \alpha}$

$= \{1 + \infty_{\alpha}(1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + \infty_{\alpha}(1 / \infty_{\beta})\}^{-1}$

$= (1 + \Sigma_{\alpha}) \cdot (1 + \infty_{\alpha})^{-1}$

$= (1 + \Sigma_{\alpha}) \infty_{\alpha}{}^{-1}$

$= (1 + \Sigma_{\alpha}) \cdot (1 / \infty_{\alpha})$

$= \Sigma_{\alpha}$.

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\beta})\}]^{\infty \gamma}$

$= \{1 - (1 / \infty_{\beta})\}^{\infty \gamma}$

$= \{1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\beta})\}^{-1}$

$= (1 + \infty_{\gamma})^{-1}$

$= \infty_{\gamma}{}^{-1}$

$= 1 / \infty_{\gamma}$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty \gamma} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\beta})\}^{\infty \gamma}$

$= \{1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\beta})\}^{-1}$

$= (1 + \infty_{\gamma}) \cdot (1 + \infty_{\gamma})^{-1}$

$= \infty_{\gamma} \infty_{\gamma}{}^{-1}$

$= \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\gamma})$

$= \Sigma_{\gamma}$.

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\beta})\}]^{\infty \gamma}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty \gamma}$

$= 1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\alpha})$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha})$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty \gamma} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\beta})\}^{\infty \gamma}$

$= \{1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\beta})\}^{-1}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\beta})\}^{-1}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\beta})\}$

$= 1 + (1 / \infty_{\alpha})$.

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\alpha})\}]^{\infty \gamma}$

$= (1 + \Pi_{\alpha})^{\infty \gamma}$

$= 1 + \Pi_{\alpha}$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty \gamma} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\alpha})\}^{\infty \gamma}$

$= \{1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + \infty_{\gamma}(1 / \infty_{\alpha})\}^{-1}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\}^{-1}$

$= \{1 + (1 / \infty_{\alpha})\} \cdot \{1 - (1 / \infty_{\alpha})\}$

$= 1 + \Pi_{\alpha}$.

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば,

左辺$= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{\infty\gamma}$

$= \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$= 1 - (1/\infty_\beta)$.

右辺$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}$

$= 1 - (1/\infty_\beta)$ ■

$\boxed{23}$ 定理7-23（定理7-31を証明するための予備定理９）

$$[\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma} = \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}.$$

ただし，次の場合を除く.

$$\alpha < \beta < \gamma,\ \alpha < \beta = \gamma,\ \beta < \gamma = \alpha,\ \beta < \alpha < \gamma.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る.

$\alpha = \beta = \gamma$ ならば,

左辺$= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty\alpha}$

$= (1 + \Pi_\alpha)^{1/\infty\alpha}$

$= 1 + \Pi_\alpha$.

右辺$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha} \cdot \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\alpha)\}$

$= 1 + \Pi_\alpha$.

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば,

左辺$= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + (1/\infty_\gamma)$.

右辺$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\gamma)\}$

$= 1 + \Pi_\gamma$.

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば,

左辺$= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty\gamma}$

$= (1 + \Pi_\alpha)^{1/\infty\gamma}$

$= 1 + \Pi_\gamma$.

右辺$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma} \cdot \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\gamma)\}$

$= 1 + \Pi_\gamma$.

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}]^{1 / \infty \beta}$

$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty \beta}$

$= 1 + (1 / \infty_\beta)$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty \beta} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}^{1 / \infty \beta}$

$= \{1 + (1 / \infty_\beta)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}$

$= 1 + \Pi_\beta$.

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}]^{1 / \infty \gamma}$

$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty \gamma}$

$= 1 + (1 / \infty_\gamma)$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty \gamma} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}^{1 / \infty \gamma}$

$= \{1 + (1 / \infty_\gamma)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}$

$= 1 + (1 / \infty_\gamma)$.

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}]^{1 / \infty \alpha}$

$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty \alpha}$

$= 1 + (1 / \infty_\alpha)$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty \alpha} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}^{1 / \infty \alpha}$

$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}$

$= 1 + (1 / \infty_\alpha)$.

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}]^{1 / \infty \gamma}$

$= \{1 - (1 / \infty_\beta)\}^{1 / \infty \gamma}$

$= 1 - (1 / \infty_\gamma)$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty \gamma} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}^{1 / \infty \gamma}$

$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\gamma)\}$

$= 1 - (1 / \infty_\gamma)$.

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}]^{1 / \infty \beta}$

$= \{1 - (1 / \infty_\beta)\}^{1 / \infty \beta}$

$= 1 - (1 / \infty_\beta)$.

右辺 $= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty \beta} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}^{1 / \infty \beta}$

$= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}$

$= 1 - (1 / \infty_\beta)$.

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\beta)\}]^{1 / \infty \alpha}$

$= \{1 - (1 / \infty_\beta)\}^{1 / \infty \alpha}$

$= 1 - (1 / \infty_\alpha)$.

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\alpha}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\alpha})\}$

$=1+\Pi_{\alpha}.$

$\beta<\alpha<\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$=1-(1/\infty_{\gamma}).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\gamma})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\}$

$=1+\Pi_{\gamma}.$

$\gamma<\alpha<\beta$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_{\alpha}).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}$

$=1+(1/\infty_{\alpha}).$

$\gamma<\alpha=\beta$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\alpha})\}]^{1/\infty\gamma}$

$=(1+\Pi_{\alpha})^{1/\infty\gamma}$

$=1+\Pi_{\alpha}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\alpha})\}$

$=1+\Pi_{\alpha}.$

$\gamma<\beta<\alpha$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$=1-(1/\infty_{\beta}).$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}$

$=1-(1/\infty_{\beta})$ ■

$\boxed{24}$ 定理7-24（定理7-31を証明するための予備定理10）

$$[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{\infty\gamma}=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\alpha})]^{\infty\alpha}$

$=(1/\infty_{\alpha})^{\infty\alpha}$

$=1/\infty_{\alpha+1}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}\cdot(1/\infty_\alpha)^{\infty\alpha}$

$=\{1+\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_{\alpha+1})$

$=(1+\Sigma_\alpha)\cdot(1/\infty_{\alpha+1})$

$=1/\infty_{\alpha+1}.$

$\alpha<\beta<\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_\beta)]^{\infty\gamma}$

$=(1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$=1/\infty_{\gamma+1}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$=(1+\infty_\gamma)\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$=\infty_\gamma(1/\infty_{\gamma+1})$

$=1/\infty_{\gamma+1}.$

$\alpha=\beta<\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_\alpha)]^{\infty\gamma}$

$=(1/\infty_\alpha)^{\infty\gamma}$

$=1/\infty_{\gamma+1}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_\alpha)^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$=(1+\infty_\gamma)\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$=\infty_\gamma(1/\infty_{\gamma+1})$

$=1/\infty_{\gamma+1}.$

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_\beta)]^{\infty\beta}$

$=(1/\infty_\beta)^{\infty\beta}$

$=1/\infty_{\beta+1}.$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta}\cdot(1/\infty_\beta)^{\infty\beta}$

$=\{1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_{\beta+1})$

$=(1+\infty_\beta)\cdot(1/\infty_{\beta+1})$

$=\infty_\beta(1/\infty_{\beta+1})$

$=1/\infty_{\beta+1}.$

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_\beta)]^{\infty\gamma}$

$=(1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$=1/\infty_\beta.$

右辺$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_\beta)$

$=(1+\infty_\gamma)\cdot(1/\infty_\beta)$

$=\infty_\gamma(1/\infty_\beta)$

$=1/\infty_\beta.$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\beta})]^{\infty\alpha}$

$= (1/\infty_{\beta})^{\infty\alpha}$

$= 1/\infty_{\beta}$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha} \cdot (1/\infty_{\beta})^{\infty\alpha}$

$= \{1 + \infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\beta})$

$= (1 + \Sigma_{\alpha}) \cdot (1/\infty_{\beta})$

$= 1/\infty_{\beta}$.

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\beta})]^{\infty\gamma}$

$= (1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$= 1/\infty_{\gamma+1}$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma} \cdot (1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\gamma+1})$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\gamma+1})$

$= 1/\infty_{\gamma+1}$.

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\beta})]^{\infty\beta}$

$= (1/\infty_{\beta})^{\infty\beta}$

$= 1/\infty_{\beta+1}$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta} \cdot (1/\infty_{\beta})^{\infty\beta}$

$= \{1 + \infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\beta+1})$

$= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\beta+1})$

$= 1/\infty_{\beta+1}$.

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\beta})]^{\infty\alpha}$

$= (1/\infty_{\beta})^{\infty\alpha}$

$= 1/\infty_{\alpha+1}$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha} \cdot (1/\infty_{\beta})^{\infty\alpha}$

$= \{1 + \infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\alpha+1})$

$= (1 + \Sigma_{\alpha}) \cdot (1/\infty_{\alpha+1})$

$= 1/\infty_{\alpha+1}$.

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\beta})]^{\infty\gamma}$

$= (1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$= 1/\infty_{\gamma+1}$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma} \cdot (1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\} \cdot (1/\infty_{\gamma+1})$

$= (1 + \infty_{\gamma}) \cdot (1/\infty_{\gamma+1})$

$= \infty_{\gamma}(1/\infty_{\gamma+1})$

$=1/\infty_{\gamma+1}$.

$\gamma<\alpha<\beta$ ならば,

左辺 $=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{\infty\gamma}$
$=(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$
$=1/\infty_{\beta}$.

右辺 $=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$
$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})$
$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})$
$=1/\infty_{\beta}$.

$\gamma<\alpha=\beta$ ならば,

左辺 $=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\alpha})]^{\infty\gamma}$
$=(1/\infty_{\alpha})^{\infty\gamma}$
$=1/\infty_{\alpha}$.

右辺 $=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\alpha})^{\infty\gamma}$
$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\alpha})$
$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\alpha})$
$=1/\infty_{\alpha}$.

$\gamma<\beta<\alpha$ ならば,

左辺 $=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{\infty\gamma}$
$=(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$
$=1/\infty_{\beta}$.

右辺 $=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$
$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})$
$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})$
$=1/\infty_{\beta}$ ■

$\boxed{25}$ 定理7-25 (定理7-31を証明するための予備定理11)

$$[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{1/\infty\gamma}=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}.$$

ただし,次の場合を除く.

$\alpha=\beta=\gamma$, $\alpha<\beta<\gamma$, $\alpha=\beta<\gamma$, $\alpha<\beta=\gamma$, $\beta<\gamma=\alpha$, $\beta<\alpha<\gamma$.

証明　両辺を,実際に計算すれば,定理6-6より,次の結果を得る.

$\alpha=\beta=\gamma$ ならば,

左辺 $=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\alpha})]^{1/\infty\alpha}$
$=(1/\infty_{\alpha})^{1/\infty\alpha}$
$=\{x:1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\alpha})\}$.

右辺 $=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\alpha}\cdot(1/\infty_{\alpha})^{1/\infty\alpha}$
$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{x:1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\alpha})\}$
$=\{x:1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{\alpha})\}$.

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{1/\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= 1 - (1/\infty_\gamma)$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\gamma)\}$

$= 1 + \Pi_\gamma$.

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\alpha)]^{1/\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\alpha)^{1/\infty\gamma}$

$= 1 - (1/\infty_\gamma)$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\alpha)^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\gamma)\}$

$= 1 + \Pi_\gamma$.

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{1/\infty\beta}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\beta}$

$= \{x : 1 - (1/\infty_0) \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\}$.

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\beta}$

$= \{1 + (1/\infty_\beta)\} \cdot \{x : 1 - (1/\infty_0) \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\}$

$= \{x : 1 - (1/\infty_0) \leqq x \leqq 1 + (1/\infty_\beta)\}$.

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{1/\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} 1/\infty_\beta \quad (\gamma + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \quad (\gamma + 1 = \beta). \end{cases}$$

右辺 $= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot (1/\infty_\beta) = 1/\infty_\beta \quad (\gamma + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{1 + (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \\ \quad = \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \quad (\gamma + 1 = \beta). \end{cases}$$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば，

左辺 $= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{1/\infty\alpha}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\alpha}$

$$= \begin{cases} 1/\infty_\beta \quad (\alpha + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \quad (\alpha + 1 = \beta). \end{cases}$$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\alpha}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\alpha}$

$$=\begin{cases}\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})=1/\infty_{\beta}\quad(\alpha+2\leqq\beta),\\ \\ \{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{x:1/\infty_{\beta}\leqq x<1-(1/\infty_{0})\}\end{cases}$$

$$=\{x:1/\infty_{\beta}\leqq x<1-(1/\infty_{0})\}\quad(\alpha+1=\beta).$$

$\beta<\gamma<\alpha$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{1/\infty\gamma}$

$=(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=1-(1/\infty_{\gamma})$.

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\}$

$=1-(1/\infty_{\gamma})$.

$\beta=\gamma<\alpha$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{1/\infty\beta}$

$=(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\beta}$

$=\{x:1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\beta})\}$.

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\beta}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\beta}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{x:1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\beta})\}$

$=\{x:1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\beta})\}$.

$\beta<\gamma=\alpha$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{1/\infty\alpha}$

$=(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\alpha}$

$=1-(1/\infty_{\alpha})$.

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\alpha}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\alpha}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\alpha})\}$

$=1+\Sigma_{\alpha}$.

$\beta<\alpha<\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{1/\infty\gamma}$

$=(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=1-(1/\infty_{\gamma})$.

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\gamma})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\}$

$=1+\Pi_{\gamma}$.

$\gamma<\alpha<\beta$ ならば,

左辺$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{1/\infty\gamma}$

$=(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=1/\infty_{\beta}$. $(\because\gamma+2\leqq\beta)$

右辺$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})$ $(\because\gamma+2\leqq\beta)$

$=1/\infty_{\beta}$.

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば，

$$\text{左辺} = [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_\alpha)]^{1/\infty\gamma}$$
$$= (1/\infty_\alpha)^{1/\infty\gamma}$$
$$= \begin{cases} 1/\infty_\alpha \ (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{x : 1/\infty_\alpha \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \ (\gamma + 1 = \alpha). \end{cases}$$
$$\text{右辺} = \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_\alpha)^{1/\infty\gamma}$$
$$= \begin{cases} \{1 + (1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_\alpha) = 1/\infty_\alpha \ (\gamma + 2 \leqq \alpha), \\ \\ \{1 + (1/\infty_\alpha)\}\cdot\{x : 1/\infty_\alpha \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\}. \end{cases}$$
$$= \{x : 1/\infty_\alpha \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \ (\gamma + 1 = \alpha).$$

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば，

$$\text{左辺} = [\{1 + (1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_\beta)]^{1/\infty\gamma}$$
$$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$$
$$= \begin{cases} 1/\infty_\beta \ (\gamma + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \ (\gamma + 1 = \beta). \end{cases}$$
$$\text{右辺} = \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$$
$$= \begin{cases} \{1 + (1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_\beta) = 1/\infty_\beta \ (\gamma + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{1 + (1/\infty_\alpha)\}\cdot\{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \end{cases}$$
$$= \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \ (\gamma + 1 = \beta) \blacksquare$$

$\boxed{26}$ 定理7-26（定理7-31を証明するための予備定理12）

$$[\{1 - (1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{\infty\gamma}$$
$$= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma}\cdot\{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5より，次の結果を得る．

$\alpha = \beta = \gamma$ ならば，

$$\text{左辺} = [\{1 - (1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1 - (1/\infty_\alpha)\}]^{\infty\alpha}$$
$$= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}$$
$$= \{1 + \infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}^{-1}$$
$$= (1 + \Sigma_\alpha)^{-1}$$
$$= \{x : 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\alpha)\}.$$
$$\text{右辺} = \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}\cdot\{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha}$$
$$= \{1 + \infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}^{-1}\cdot\{1 + \infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}^{-1}$$
$$= (1 + \Sigma_\alpha)^{-1}\cdot(1 + \Sigma_\alpha)^{-1}$$
$$= \{x : 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\alpha)\}$$
$$\cdot\{x : 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\alpha)\}$$
$$= \{x : 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\alpha)\}.$$

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば,

左辺$= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\gamma}$

$= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$= (1 + \infty_\gamma)^{-1}$

$= \infty_\gamma{}^{-1}$

$= 1/\infty_\gamma.$

右辺$= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$= (1 + \infty_\gamma)^{-1} \cdot (1 + \infty_\gamma)^{-1}$

$= \infty_\gamma{}^{-1} \cdot \infty_\gamma{}^{-1}$

$= (1/\infty_\gamma) \cdot (1/\infty_\gamma)$

$= 1/\infty_\gamma.$

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば,

左辺$= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\alpha)\}]^{\infty_\gamma}$

$= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$= (1 + \infty_\gamma)^{-1}$

$= \infty_\gamma{}^{-1}$

$= 1/\infty_\gamma.$

右辺$= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma} \cdot \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot \{1 + \infty_\gamma (1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$= (1 + \infty_\gamma)^{-1} \cdot (1 + \infty_\gamma)^{-1}$

$= \infty_\gamma{}^{-1} \cdot \infty_\gamma{}^{-1}$

$= (1/\infty_\gamma) \cdot (1/\infty_\gamma)$

$= 1/\infty_\gamma.$

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば,

左辺$= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\beta}$

$= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}$

$= \{1 + \infty_\beta (1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$= (1 + \infty_\beta)^{-1}$

$= \infty_\beta{}^{-1}$

$= 1/\infty_\beta.$

右辺$= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^{\infty_\beta}$

$= \{1 + \infty_\beta (1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot \{1 + \infty_\beta (1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$= (1 + \infty_\beta)^{-1} \cdot (1 + \Sigma_\beta)^{-1}$

$= \infty_\beta{}^{-1} \cdot (1 + \Sigma_\beta)^{-1}$

$= (1/\infty_\beta) \cdot \{x : 1/\infty_\beta \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\}$

$= 1/\infty_\beta.$

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば，

左辺 $=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}$

$=(1+\infty_{\gamma})^{-1}$

$=\infty_{\gamma}^{-1}$

$=1/\infty_{\gamma}.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})\}^{-1}$

$=(1+\infty_{\gamma})^{-1}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{-1}$

$=\infty_{\gamma}^{-1}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}$

$=(1/\infty_{\gamma})\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}$

$=1/\infty_{\gamma}.$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば，

左辺 $=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{\infty\alpha}$

$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}$

$=\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}$

$=(1+\Sigma_{\alpha})^{-1}$

$=\{x : 1/\infty_{\alpha}\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\alpha})\}.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\alpha}$

$=\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{-1}$

$=(1+\Sigma_{\alpha})^{-1}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{-1}$

$=\{x : 1/\infty_{\alpha}\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}$

$=\{x : 1/\infty_{\alpha}\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\alpha})\}.$

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})\}^{-1}$

$=(1+\infty_{\gamma})^{-1}$

$=\infty_{\gamma}^{-1}$

$=1/\infty_{\gamma}.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})\}^{-1}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot(1+\infty_{\gamma})^{-1}$

$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\infty_{\gamma}^{-1}$

$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\gamma})$

$=1/\infty_{\gamma}.$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば，

左辺 $=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{\infty\beta}$

$=\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\beta}$

$=\{1+\infty_\beta(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=(1+\Sigma_\beta)^{-1}$

$=\{x : 1/\infty_\beta \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\beta)\}.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\beta}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\beta}$

$=\{1+\infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}^{-1}\cdot\{1+\infty_\beta(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{-1}\cdot(1+\Sigma_\beta)^{-1}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{x : 1/\infty_\beta \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\beta)\}$

$=\{x : 1/\infty_\beta \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\beta)\}.$

$\beta<\gamma=\alpha$ ならば,

左辺 $=[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\alpha}$

$=\{1-(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\alpha}$

$=\{1+\infty_\alpha(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=(1+\infty_\alpha)^{-1}$

$=\infty_\alpha{}^{-1}$

$=1/\infty_\alpha.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\alpha}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\alpha}$

$=\{1+\infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}^{-1}\cdot\{1+\infty_\alpha(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=(1+\Sigma_\alpha)^{-1}\cdot(1+\infty_\alpha)^{-1}$

$=\{x : 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\infty_\alpha{}^{-1}$

$=\{x : 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_\alpha)$

$=1/\infty_\alpha.$

$\beta<\alpha<\gamma$ ならば,

左辺 $=[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=(1+\infty_\gamma)^{-1}$

$=\infty_\gamma{}^{-1}$

$=1/\infty_\gamma.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1}\cdot\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=(1+\infty_\gamma)^{-1}\cdot(1+\infty_\gamma)^{-1}$

$=\infty_\gamma{}^{-1}\cdot\infty_\gamma{}^{-1}$

$=(1/\infty_\gamma)\cdot(1/\infty_\gamma)$

$=1/\infty_\gamma.$

$\gamma<\alpha<\beta$ ならば,

左辺 $=[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$=1-(1/\infty_\alpha).$

右辺$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1}\cdot\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{-1}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}$

$=1-(1/\infty_\alpha)$.

$\gamma<\alpha=\beta$ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}]^{\infty_\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$=1-(1/\infty_\alpha)$.

右辺$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1}\cdot\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{-1}\cdot\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{-1}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}$

$=1-(1/\infty_\alpha)$.

$\gamma<\beta<\alpha$ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=\{1+(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=1-(1/\infty_\beta)$.

右辺$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma}$

$=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1}\cdot\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^{-1}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{-1}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}$

$=1-(1/\infty_\beta)$■

$\boxed{27}$ 定理7-27（定理7-31を証明するための予備定理13）

$$[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty_\gamma}$$
$$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty_\gamma}.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha=\beta=\gamma$ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty_\alpha}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\alpha}$

$=1-(1/\infty_\alpha)$.

右辺$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\alpha}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\alpha}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}$

$=1-(1/\infty_\alpha)$.

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1-(1/\infty_\gamma)$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1-(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1-(1/\infty_\gamma)\}$

$= 1-(1/\infty_\gamma)$.

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty\gamma}$

$= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1-(1/\infty_\gamma)$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1-(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1-(1/\infty_\gamma)\}$

$= 1-(1/\infty_\gamma)$.

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\beta}$

$= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}$

$= 1-(1/\infty_\beta)$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\beta}$

$= \{1-(1/\infty_\beta)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}$

$= 1-(1/\infty_\beta)$.

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1-(1/\infty_\gamma)$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1-(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}$

$= 1-(1/\infty_\gamma)$.

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\alpha}$

$= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}$

$= 1-(1/\infty_\alpha)$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\alpha}$

$= \{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}$

$= 1-(1/\infty_\alpha)$.

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$= \{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1-(1/\infty_\gamma)$.

右辺$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\gamma)\}$

$=1-(1/\infty_\gamma).$

$\beta=\gamma<\alpha$ ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\beta}$

$=\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\beta}$

$=1-(1/\infty_\beta).$

右辺$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\beta}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}$

$=1-(1/\infty_\beta).$

$\beta<\gamma=\alpha$ ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\alpha}$

$=\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\alpha}$

$=1-(1/\infty_\alpha).$

右辺$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\alpha}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}$

$=1-(1/\infty_\alpha).$

$\beta<\alpha<\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$=1-(1/\infty_\gamma).$

右辺$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1-(1/\infty_\gamma)\}$

$=1-(1/\infty_\gamma).$

$\gamma<\alpha<\beta$ ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$=1-(1/\infty_\alpha).$

右辺$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}$

$=1-(1/\infty_\alpha).$

$\gamma<\alpha=\beta$ ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}]^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$=1-(1/\infty_\alpha).$

右辺$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\alpha)\}$

$=1-(1/\infty_\alpha).$

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば，

左辺 $= [\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{1/\infty\gamma}$

$= \{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$= 1-(1/\infty_{\beta})$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}$

$= 1-(1/\infty_{\beta})$ ■

$\boxed{28}$ 定理7-28（定理7-31を証明するための予備定理14）

$$[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{\infty\gamma} = \{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}.$$

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-5より，次の結果を得る．

$\alpha = \beta = \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\alpha})]^{\infty\alpha}$

$= (1/\infty_{\alpha})^{\infty\alpha}$

$= 1/\infty_{\alpha+1}$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}\cdot(1/\infty_{\alpha})^{\infty\alpha}$

$= \{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot(1/\infty_{\alpha+1})$

$= (1+\Sigma_{\alpha})^{-1}\cdot(1/\infty_{\alpha+1})$

$= \{x : 1/\infty_{\alpha} \leqq x \leqq 1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\alpha+1})$

$= 1/\infty_{\alpha+1}$.

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{\infty\gamma}$

$= (1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$= 1/\infty_{\gamma+1}$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$= \{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$= (1+\infty_{\gamma})^{-1}\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$= \infty_{\gamma}^{-1}(1/\infty_{\gamma+1})$

$= (1/\infty_{\gamma})\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$= 1/\infty_{\gamma+1}$.

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば，

左辺 $= [\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\alpha})]^{\infty\gamma}$

$= (1/\infty_{\alpha})^{\infty\gamma}$

$= 1/\infty_{\gamma+1}$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\alpha})^{\infty\gamma}$

$= \{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$= (1+\infty_{\gamma})^{-1}\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$= \infty_{\gamma}^{-1}(1/\infty_{\gamma+1})$

$= (1/\infty_{\gamma})\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$= 1/\infty_{\gamma+1}$.

$\alpha<\beta=\gamma$ ならば，

左辺 $=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{\infty\beta}$

$=(1/\infty_{\beta})^{\infty\beta}$

$=1/\infty_{\beta+1}.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\beta}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\beta}$

$=\{1+\infty_{\beta}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot(1/\infty_{\beta+1})$

$=(1+\infty_{\beta})^{-1}\cdot(1/\infty_{\beta+1})$

$=\infty_{\beta}{}^{-1}(1/\infty_{\beta+1})$

$=(1/\infty_{\beta})\cdot(1/\infty_{\beta+1})$

$=1/\infty_{\beta+1}.$

$\alpha<\gamma<\beta$ ならば，

左辺 $=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{\infty\gamma}$

$=(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$=1/\infty_{\beta}.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot(1/\infty_{\beta})$

$=(1+\infty_{\gamma})^{-1}\cdot(1/\infty_{\beta})$

$=\infty_{\gamma}{}^{-1}(1/\infty_{\beta})$

$=(1/\infty_{\gamma})\cdot(1/\infty_{\beta})$

$=1/\infty_{\beta}.$

$\alpha=\gamma<\beta$ ならば，

左辺 $=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{\infty\alpha}$

$=(1/\infty_{\beta})^{\infty\alpha}$

$=1/\infty_{\beta}.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\alpha}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\alpha}$

$=\{1+\infty_{\alpha}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot(1/\infty_{\beta})$

$=(1+\Sigma_{\alpha})^{-1}\cdot(1/\infty_{\beta})$

$=\{x:1/\infty_{\alpha}\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})$

$=1/\infty_{\beta}.$

$\beta<\gamma<\alpha$ ならば，

左辺 $=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{\infty\gamma}$

$=(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$=1/\infty_{\gamma+1}.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{\infty\gamma}$

$=\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\gamma+1})$

$=1/\infty_{\gamma+1}.$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{\infty\beta}$

$= (1/\infty_\beta)^{\infty\beta}$

$= 1/\infty_{\beta+1}$.

右辺 $= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\beta} \cdot (1/\infty_\beta)^{\infty\beta}$

$= \{1 + \infty_\beta(1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot (1/\infty_{\beta+1})$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot (1/\infty_{\beta+1})$

$= \{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_{\beta+1})$

$= 1/\infty_{\beta+1}$.

$\beta < \gamma = \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{\infty\alpha}$

$= (1/\infty_\beta)^{\infty\alpha}$

$= 1/\infty_{\alpha+1}$.

右辺 $= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\alpha} \cdot (1/\infty_\beta)^{\infty\alpha}$

$= \{1 + \infty_\alpha(1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot (1/\infty_{\alpha+1})$

$= (1 + \Sigma_\alpha)^{-1} \cdot (1/\infty_{\alpha+1})$

$= \{x : 1/\infty_\alpha \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_{\alpha+1})$

$= 1/\infty_{\alpha+1}$.

$\beta < \alpha < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$= 1/\infty_{\gamma+1}$.

右辺 $= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot (1/\infty_{\gamma+1})$

$= (1 + \infty_\gamma)^{-1} \cdot (1/\infty_{\gamma+1})$

$= \infty_\gamma{}^{-1}(1/\infty_{\gamma+1})$

$= (1/\infty_\gamma) \cdot (1/\infty_{\gamma+1})$

$= 1/\infty_{\gamma+1}$.

$\gamma < \alpha < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$= 1/\infty_\beta$.

右辺 $= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$= \{1 + \infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot (1/\infty_\beta)$

$= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot (1/\infty_\beta)$

$= \{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)$

$= 1/\infty_\beta$.

$\gamma < \alpha = \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\alpha)]^{\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\alpha)^{\infty\gamma}$

$= 1/\infty_\alpha$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\alpha)^{\infty\gamma}$

$= \{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot (1/\infty_\alpha)$

$= \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot (1/\infty_\alpha)$

$= \{1-(1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\alpha)$

$= 1/\infty_\alpha$.

$\gamma < \beta < \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1-(1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$= 1/\infty_\beta$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$= \{1+\infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot (1/\infty_\beta)$

$= \{1+(1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot (1/\infty_\beta)$

$= \{1-(1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)$

$= 1/\infty_\beta$ ■

29 定理7-29（定理7-31を証明するための予備定理15）

$[\{1-(1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{1/\infty\gamma} = \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$.

証明　両辺を，実際に計算すれば，定理6-6より，次の結果を得る．

$\alpha = \beta = \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1-(1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\alpha)]^{1/\infty\alpha}$

$= (1/\infty_\alpha)^{1/\infty\alpha}$

$= \{x : 1-(1/\infty_0) \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha} \cdot (1/\infty_\alpha)^{1/\infty\alpha}$

$= \{1-(1/\infty_\alpha)\} \cdot \{x : 1-(1/\infty_0) \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}$

$= \{x : 1-(1/\infty_0) \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\alpha)\}$.

$\alpha < \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1-(1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{1/\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= 1-(1/\infty_\gamma)$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= \{1-(1/\infty_\gamma)\} \cdot \{1-(1/\infty_\gamma)\}$

$= 1-(1/\infty_\gamma)$.

$\alpha = \beta < \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1-(1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\alpha)]^{1/\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\alpha)^{1/\infty\gamma}$

$= 1-(1/\infty_\gamma)$.

右辺 $= \{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\alpha)^{1/\infty\gamma}$

$= \{1-(1/\infty_\gamma)\} \cdot \{1-(1/\infty_\gamma)\}$

$= 1-(1/\infty_\gamma)$.

$\alpha < \beta = \gamma$ ならば,

左辺 $= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{1/\infty\beta}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\beta}$

$= \{x : 1 - (1/\infty_0) \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\}.$

右辺 $= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\beta} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\beta}$

$= \{1 - (1/\infty_\beta)\} \cdot \{x : 1 - (1/\infty_0) \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\}$

$= \{x : 1 - (1/\infty_0) \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\}.$

$\alpha < \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{1/\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} 1/\infty_\beta \quad (\gamma + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \quad (\gamma + 1 = \beta). \end{cases}$$

右辺 $= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \{1 - (1/\infty_\gamma)\} \cdot (1/\infty_\beta) = 1/\infty_\beta \quad (\gamma + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{1 - (1/\infty_\gamma)\} \cdot \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \\ \quad = \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \quad (\gamma + 1 = \beta). \end{cases}$$

$\alpha = \gamma < \beta$ ならば,

左辺 $= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{1/\infty\alpha}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\alpha}$

$$= \begin{cases} 1/\infty_\beta \quad (\alpha + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \quad (\alpha + 1 = \beta). \end{cases}$$

右辺 $= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\alpha} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\alpha}$

$$= \begin{cases} \{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta) = 1/\infty_\beta \quad (\alpha + 2 \leqq \beta), \\ \\ \{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \\ \quad = \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1 - (1/\infty_0)\} \quad (\alpha + 1 = \beta). \end{cases}$$

$\beta < \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{1/\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= 1 - (1/\infty_\gamma).$

右辺 $= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty\gamma} \cdot (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$= \{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\gamma)\}$

$= 1 - (1/\infty_\gamma).$

$\beta = \gamma < \alpha$ ならば,

左辺 $= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^{1/\infty\beta}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\beta}$

$= \{x : 1 - (1/\infty_0) \leqq x \leqq 1 - (1/\infty_\beta)\}.$

右辺$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\beta}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\beta}$

$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{x : 1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\beta})\}$

$=\{x : 1-(1/\infty_{0})\leqq x\leqq 1-(1/\infty_{\beta})\}.$

$\beta<\gamma=\alpha$ ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{1/\infty\alpha}$

$=(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\alpha}$

$=1-(1/\infty_{\alpha}).$

右辺$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\alpha}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\alpha}$

$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\alpha})\}$

$=1-(1/\infty_{\alpha}).$

$\beta<\alpha<\gamma$ ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{1/\infty\gamma}$

$=(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=1-(1/\infty_{\gamma}).$

右辺$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_{\gamma})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\}$

$=1-(1/\infty_{\gamma}).$

$\gamma<\alpha<\beta$ ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{1/\infty\gamma}$

$=(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=1/\infty_{\beta}.$ $(\because \gamma+2\leqq\beta)$

右辺$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})$ $(\because \gamma+2\leqq\beta)$

$=1/\infty_{\beta}.$

$\gamma<\alpha=\beta$ ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\alpha})]^{1/\infty\gamma}$

$=(1/\infty_{\alpha})^{1/\infty\gamma}$

$$=\begin{cases} 1/\infty_{\alpha} \quad (\gamma+2\leqq\alpha), \\ \\ \{x : 1/\infty_{\alpha}\leqq x<1-(1/\infty_{0})\} \quad (\gamma+1=\alpha). \end{cases}$$

右辺$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_{\alpha})^{1/\infty\gamma}$

$$=\begin{cases} \{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\alpha})=1/\infty_{\alpha} \quad (\gamma+2\leqq\alpha), \\ \\ \{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{x : 1/\infty_{\alpha}\leqq x<1-(1/\infty_{0})\} \end{cases}$$

$=\{x : 1/\infty_{\alpha}\leqq x<(1-(1/\infty_{0}))\}$ $(\gamma+1=\alpha).$

$\gamma<\beta<\alpha$ ならば,

左辺$=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{1/\infty\gamma}$

$=(1/\infty_{\beta})^{1/\infty\gamma}$

$$
= \begin{cases} 1/\infty_\beta \quad (\gamma+2 \leqq \beta), \\ \\ \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1-(1/\infty_0)\} \quad (\gamma+1=\beta). \end{cases}
$$

右辺 $=\{1-(1/\infty_\alpha)\}^{1/\infty_\gamma}\cdot(1/\infty_\beta)^{1/\infty_\gamma}$

$$
= \begin{cases} \{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot(1/\infty_\beta)=1/\infty_\beta \quad (\gamma+2 \leqq \beta), \\ \\ \{1-(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1-(1/\infty_0)\} \end{cases}
$$

$$
=\{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1-(1/\infty_0)\} \quad (\gamma+1=\beta) \blacksquare
$$

$\boxed{30}$ 定理7-30（定理7-31を証明するための予備定理16）

x，$y \in \mathfrak{D}^+$で，$0<x<1$，$0<y<1$とすれば，次の式が成り立つ．

$$x^{-1}y^{-1}=(xy)^{-1}.$$

証明　$\mathfrak{D}^+=\mathcal{D}^+\cup\Pi_0{}^+$である．また，$x$，$y\in\mathfrak{D}^+$ならば，条件$0<x<1$，$0<y<1$より，次のように表すことができる．

$$x=r+b,\ 「0\leqq r\leqq 1,\ b\in\Pi_0」.$$
$$y=s+c,\ 「0\leqq s\leqq 1,\ c\in\Pi_0」.$$

ただし，次の約束に従う．

（ア）$r=0$ならば，$b\in\Pi_0{}^+$.　　　（イ）$r=1$ならば，$b\in\Pi_0{}^-$.

（ウ）$s=0$ならば，$c\in\Pi_0{}^+$.　　　（エ）$s=1$ならば，$c\in\Pi_0{}^-$.

（ⅰ）「$x=1/\infty_\alpha$，$y=1/\infty_\beta$」の場合：

$$
\begin{aligned}
x^{-1}y^{-1} &= \infty_\alpha\infty_\beta \\
&= \infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}} \\
&= (1/\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}})^{-1} \\
&= \{(1/\infty_\alpha)(1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= (xy)^{-1}.
\end{aligned}
$$

（ⅱ）「$x\in\mathcal{D}^+$，$y=1/\infty_\beta$」の場合：

$$
\begin{aligned}
x^{-1}y^{-1} &= \{(1/r)-b\}\cdot\infty_\beta \\
&= \infty_\beta \\
&= (1/\infty_\beta)^{-1} \\
&= \{(r+b)(1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= (xy)^{-1}.
\end{aligned}
$$

（ⅲ）「$x=1/\infty_\alpha$，$y\in\mathcal{D}^+$」の場合は，（ⅱ）と同様である．

（ⅳ）「$x\in\mathcal{D}^+$，$y\in\mathcal{D}^+$」の場合：

$$
\begin{aligned}
x^{-1}y^{-1} &= \{(1/r)-b\}\cdot\{(1/s)-c\} \\
&= \{1/(rs)\}-(b+c) \\
&= (xy)^{-1} \blacksquare
\end{aligned}
$$

$\boxed{31}$ 定理7-31（指数法則の第３式）

$$x \in D^{+},\ x = r + b,\ 「r \in \langle R \rangle^{+} \cup \{0\},\ b \in \Pi_{0}」;$$
$$y \in D^{+},\ y = s + c,\ 「s \in \langle R \rangle^{+} \cup \{0\},\ c \in \Pi_{0}」;$$
$$m \in D^{+},\ m = t + d,\ 「t \in \langle R \rangle^{+} \cup \{0\},\ d \in \Pi_{0}」$$

とすれば，次の式が成り立つ．

$$(x\,y)^{m} = x^{m} y^{m}.$$

ただし，次の場合を除く．

（＊１） $x = \infty_{\alpha},\ y = 1 - (1/\infty_{\beta}),\ m = 1/\infty_{\gamma}$ で，

$\alpha = \beta = \gamma,\ \alpha < \beta < \gamma,\ \alpha = \beta < \gamma,\ \alpha < \beta = \gamma,\ \beta < \gamma = \alpha,\ \beta < \alpha < \gamma.$

（＊２） $x = \infty_{\alpha},\ 1/\infty_{0} < y < 1 - (1/\infty_{0}),\ m = \infty_{\gamma}$ で，

$\gamma + 1 = \alpha,\ \gamma + 1 > \alpha.$

（＊３） $x = \infty_{\alpha},\ 1/\infty_{0} < y < 1 - (1/\infty_{0}),\ m = 1/\infty_{\gamma}$ で，

$\gamma = \alpha,\ \gamma > \alpha.$

（＊４） $x = \infty_{\alpha},\ y = 1/\infty_{\beta},\ m = \infty_{\gamma}$ で，

$\alpha < \beta < \gamma,\ \alpha < \beta = \gamma,\ \alpha < \gamma < \gamma + 1 = \beta,\ \gamma = \alpha < \alpha + 1 = \beta,$

$\beta < \gamma < \gamma + 1 = \alpha,\ \gamma = \beta < \beta + 1 = \alpha,\ \beta < \gamma = \alpha,\ \beta < \alpha < \gamma.$

（＊５） $x = \infty_{\alpha},\ y = 1/\infty_{\beta},\ m = 1/\infty_{\gamma}$ で，

$\alpha < \beta < \gamma,\ \alpha < \beta = \gamma,\ \beta < \gamma = \alpha,\ \beta < \alpha < \gamma.$

（＊６） $1 + (1/\infty_{0}) < x \in \mathcal{D}^{+},\ y = 1 - (1/\infty_{\beta}),\ m = 1/\infty_{\gamma}$ で，

$\gamma = \beta,\ \gamma > \beta.$

（＊７） $1 + (1/\infty_{0}) < x \in \mathcal{D}^{+},\ 1/\infty_{0} < y < 1 - (1/\infty_{0}),\ m = \infty_{\gamma}.$

（＊８） $1 + (1/\infty_{0}) < x \in \mathcal{D}^{+},\ 1/\infty_{0} < y < 1 - (1/\infty_{0}),\ m \in \mathcal{D}^{+}$ で，

$1 < r\,s < \infty_{0}$ ならば，$b + c + d \neq b + c + d - d$；

$r\,s = 1$ ならば，$b + c \neq b + c + d - d$；

$0 < r\,s < 1$ ならば，$b + c - d \neq b + c + d - d.$

（＊９） $1 + (1/\infty_{0}) < x \in \mathcal{D}^{+},\ 1/\infty_{0} < y < 1 - (1/\infty_{0}),\ m = 1/\infty_{\gamma}.$

（＊10） $1 + (1/\infty_{0}) < x \in \mathcal{D}^{+},\ y = 1/\infty_{\beta},\ m = \infty_{\gamma}$ で，

$\beta = \gamma + 1,\ \beta < \gamma + 1.$

（＊11） $1 + (1/\infty_{0}) < x \in \mathcal{D}^{+},\ y = 1/\infty_{\beta},\ m = 1/\infty_{\gamma}$ で，

$\gamma = \beta,\ \gamma > \beta.$

（＊12） $x = 1 + (1/\infty_{\alpha}),\ y = 1 - (1/\infty_{\beta}),\ m = \infty_{\gamma}$ で，

$\alpha < \beta < \gamma,\ \alpha < \beta = \gamma,\ \beta < \gamma = \alpha,\ \beta < \alpha < \gamma.$

（＊13） $x = 1 + (1/\infty_{\alpha}),\ y = 1 - (1/\infty_{\beta}),\ m = 1/\infty_{\gamma}$ で，

$\alpha < \beta < \gamma,\ \alpha < \beta = \gamma,\ \beta < \gamma = \alpha,\ \beta < \alpha < \gamma.$

（＊14） $x = 1 + (1/\infty_{\alpha}),\ 1/\infty_{0} < y < 1 - (1/\infty_{0}),\ m = \infty_{\gamma}$ で，

$\alpha = \gamma,\ \alpha < \gamma.$

（＊15） $x = 1 + (1/\infty_{\alpha}),\ 1/\infty_{0} < y < 1 - (1/\infty_{0}),\ m = 1/\infty_{\gamma}$ で，

$\alpha = \gamma,\ \alpha < \gamma.$

（＊16） $x = 1 + (1/\infty_{\alpha}),\ y = 1/\infty_{\beta},\ m = 1/\infty_{\gamma}$ で，

$\alpha = \beta = \gamma,\ \alpha < \beta < \gamma,\ \alpha = \beta < \gamma,\ \alpha < \beta = \gamma,\ \beta < \gamma = \alpha,\ \beta < \alpha < \gamma.$

(＊17)　$x = 1 - (1/\infty_\alpha)$，$y = \infty_\beta$，$m = 1/\infty_\gamma$で，

$\beta = \alpha = \gamma$，$\beta < \alpha < \gamma$，$\beta = \alpha < \gamma$，$\beta < \alpha = \gamma$，$\alpha < \gamma = \beta$，$\alpha < \beta < \gamma$．

(＊18)　$x = 1 - (1/\infty_\alpha)$，$1 + (1/\infty_0) < y \in \mathcal{D}^+$，$m = 1/\infty_\gamma$で，

$\gamma = \alpha$，$\gamma > \alpha$．

(＊19)　$x = 1 - (1/\infty_\alpha)$，$y = 1 + (1/\infty_\beta)$，$m = \infty_\gamma$で，

$\beta < \alpha < \gamma$，$\beta < \alpha = \gamma$，$\alpha < \gamma = \beta$，$\alpha < \beta < \gamma$．

(＊20)　$x = 1 - (1/\infty_\alpha)$，$y = 1 + (1/\infty_\beta)$，$m = 1/\infty_\gamma$で，

$\beta < \alpha < \gamma$，$\beta < \alpha = \gamma$，$\alpha < \gamma = \beta$，$\alpha < \beta < \gamma$．

(＊21)　$1/\infty_0 < x < 1 - (1/\infty_0)$，$y = \infty_\beta$，$m = \infty_\gamma$で，

$\gamma + 1 = \beta$，$\gamma + 1 > \beta$．

(＊22)　$1/\infty_0 < x < 1 - (1/\infty_0)$，$y = \infty_\beta$，$m = 1/\infty_\gamma$で，

$\gamma = \beta$，$\gamma > \beta$．

(＊23)　$1/\infty_0 < x < 1 - (1/\infty_0)$，$1 + (1/\infty_0) < y \in \mathcal{D}^+$，$m = \infty_\gamma$．

(＊24)　$1/\infty_0 < x < 1 - (1/\infty_0)$，$1 + (1/\infty_0) < y \in \mathcal{D}^+$，$m \in \mathcal{D}^+$で，

$1 < r\,s < \infty_0$ならば，$b + c + d \neq b + c + d - d$；

$r\,s = 1$ならば，$b + c \neq b + c + d - d$；

$0 < r\,s < 1$ならば，$b + c - d \neq b + c + d - d$．

(＊25)　$1/\infty_0 < x < 1 - (1/\infty_0)$，$1 + (1/\infty_0) < y \in \mathcal{D}^+$，$m = 1/\infty_\gamma$．

(＊26)　$1/\infty_0 < x < 1 - (1/\infty_0)$，$y = 1 + (1/\infty_\beta)$，$m = \infty_\gamma$で，

$\beta = \gamma$，$\beta < \gamma$．

(＊27)　$1/\infty_0 < x < 1 - (1/\infty_0)$，$y = 1 + (1/\infty_\beta)$，$m = 1/\infty_\gamma$で，

$\beta = \gamma$，$\beta < \gamma$．

(＊28)　$x = 1/\infty_\alpha$，$y = \infty_\beta$，$m = \infty_\gamma$で，

$\beta < \alpha < \gamma$，$\beta < \alpha = \gamma$，$\beta < \gamma < \gamma + 1 = \alpha$，$\gamma = \beta < \beta + 1 = \alpha$，

$\alpha < \gamma < \gamma + 1 = \beta$，$\gamma = \alpha < \alpha + 1 = \beta$，$\alpha < \gamma = \beta$，$\alpha < \beta < \gamma$．

(＊29)　$x = 1/\infty_\alpha$，$y = \infty_\beta$，$m = 1/\infty_\gamma$で，

$\beta < \alpha < \gamma$，$\beta < \alpha = \gamma$，$\alpha < \gamma = \beta$，$\alpha < \beta < \gamma$．

(＊30)　$x = 1/\infty_\alpha$，$1 + (1/\infty_0) < y \in \mathcal{D}^+$，$m = \infty_\gamma$で，

$\alpha = \gamma + 1$，$\alpha < \gamma + 1$．

(＊31)　$x = 1/\infty_\alpha$，$1 + (1/\infty_0) < y \in \mathcal{D}^+$，$m = 1/\infty_\gamma$で，

$\gamma = \alpha$，$\gamma > \alpha$．

(＊32)　$x = 1/\infty_\alpha$，$y = 1 + (1/\infty_\beta)$，$m = 1/\infty_\gamma$で，

$\beta = \alpha = \gamma$，$\beta < \alpha < \gamma$，$\beta = \alpha < \gamma$，$\beta < \alpha = \gamma$，$\alpha < \gamma = \beta$，$\alpha < \beta < \gamma$．

証明　初めに，$x = 1$とすれば，

$$左辺 = (1\,y)^m = y^m = 1\,y^m = 1^m y^m = 右辺$$

である．$y = 1$としても同様である．したがって，xとyの少なくとも片方が1ならば定理は成り立つので，以下は，「$x \neq 1$，$y \neq 1$」として証明する．

（１） $x=\infty_\alpha$， $y=\infty_\beta$ の場合：

（ア） $m=\infty_\gamma$ ならば，

$$\text{左辺}=(\infty_\alpha\infty_\beta)^{\infty_\gamma}$$
$$=\infty_\alpha{}^{\infty_\gamma}\infty_\beta{}^{\infty_\gamma}.\quad(\because \text{定義6-2})$$
$$\text{右辺}=\infty_\alpha{}^{\infty_\gamma}\infty_\beta{}^{\infty_\gamma}.$$

（イ） $m\in\mathcal{D}^+$ ならば，

$$\text{左辺}=(\infty_\alpha\infty_\beta)^m$$
$$=\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}{}^m$$
$$=\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}.$$
$$\text{右辺}=\infty_\alpha{}^m\infty_\beta{}^m$$
$$=\infty_\alpha\infty_\beta$$
$$=\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}.$$

（ウ） $m=1/\infty_\gamma$ ならば，定理7-15参照．

（２） $x=\infty_\alpha$， $1+(1/\infty_0)<y\in\mathcal{D}^+$ の場合：

（ア） $m=\infty_\gamma$ ならば，

$$\text{左辺}=(\infty_\alpha y)^{\infty_\gamma}$$
$$=\infty_\alpha{}^{\infty_\gamma}.$$
$$\text{右辺}=\infty_\alpha{}^{\infty_\gamma}y^{\infty_\gamma}$$
$$=\infty_\alpha{}^{\infty_\gamma}\infty_{\gamma+1}$$
$$=\infty_\alpha{}^{\infty_\gamma}.\quad(\because \infty_{\gamma+1}\leqq\infty_\alpha{}^{\infty_\gamma})$$

（イ） $m\in\mathcal{D}^+$ ならば，

$$\text{左辺}=(\infty_\alpha y)^m$$
$$=\infty_\alpha{}^m$$
$$=\infty_\alpha.$$
$$\text{右辺}=\infty_\alpha{}^m y^m$$
$$=\infty_\alpha y^m$$
$$=\infty_\alpha.\quad(\because y^m\in\mathcal{D}^+ \text{ または } y^m\subset\mathcal{D}^+)$$

（ウ） $m=1/\infty_\gamma$ ならば，

$$\text{左辺}=(\infty_\alpha y)^{1/\infty_\gamma}$$
$$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}$$
$$=\begin{cases}\infty_\alpha & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_0)<x\leqq\infty_\alpha\} & (\gamma+1=\alpha),\\ \{x : 1+(1/\infty_\alpha)\leqq x\leqq 1+(1/\infty_0)\} & (\gamma=\alpha),\\ 1+(1/\infty_\gamma) & (\alpha<\gamma).\end{cases}$$
$$\text{右辺}=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}y^{1/\infty_\gamma}$$
$$=\infty_\alpha{}^{1/\infty_\gamma}\{1+(1/\infty_\gamma)\}$$

$$
= \begin{cases}
\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\gamma)\}=\infty_\alpha \quad (\gamma+2 \leqq \alpha), \\
\{x : 1+(1/\infty_0)< x \leqq \infty_\alpha\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\} \\
\quad =\{x : 1+(1/\infty_0)< x \leqq \infty_\alpha\} \quad (\gamma+1=\alpha), \\
\{x : 1+(1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1+(1/\infty_0)\} \cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\} \\
\quad =\{x : 1+(1/\infty_\alpha) \leqq x \leqq 1+(1/\infty_0)\} \quad (\gamma=\alpha), \\
\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}=1+(1/\infty_\gamma) \quad (\alpha<\gamma).
\end{cases}
$$

（３） $x=\infty_\alpha$， $y=1+(1/\infty_\beta)$の場合：

（ア） $m=\infty_\gamma$ならば，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\gamma} \\
&= {\infty_\alpha}^{\infty_\gamma}. \\
\text{右辺} &= {\infty_\alpha}^{\infty_\gamma}\{1+(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma} \\
&= {\infty_\alpha}^{\infty_\gamma}.
\end{aligned}
$$

$$(\because \{1+(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma}=1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)<\infty_{\gamma+1} \leqq {\infty_\alpha}^{\infty_\gamma})$$

（イ） $m\in\mathcal{D}^+$ならば，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\}]^m \\
&= {\infty_\alpha}^m \\
&= \infty_\alpha. \\
\text{右辺} &= {\infty_\alpha}^m\{1+(1/\infty_\beta)\}^m \\
&= \infty_\alpha\{1+m(1/\infty_\beta)\} \\
&= \infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\} \\
&= \infty_\alpha.
\end{aligned}
$$

（ウ） $m=1/\infty_\gamma$ならば，定理7-16参照．

（４） $x=\infty_\alpha$， $y=1-(1/\infty_\beta)$の場合：

（ア） $m=\infty_\gamma$ならば，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{\infty_\gamma} \\
&= {\infty_\alpha}^{\infty_\gamma}. \\
\text{右辺} &= {\infty_\alpha}^{\infty_\gamma}\{1-(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma} \\
&= {\infty_\alpha}^{\infty_\gamma}.
\end{aligned}
$$

$$(\because 1/\infty_\gamma \leqq \{1-(1/\infty_\beta)\}^{\infty_\gamma}=\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)\}^{-1}<1)$$

（イ） $m\in\mathcal{D}^+$ならば，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\infty_\alpha\{1-(1/\infty_\beta)\}]^m \\
&= {\infty_\alpha}^m \\
&= \infty_\alpha. \\
\text{右辺} &= {\infty_\alpha}^m\{1-(1/\infty_\beta)\}^m \\
&= \infty_\alpha[\{1+(1/\infty_\beta)\}^m]^{-1} \\
&= \infty_\alpha\{1+m(1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= \infty_\alpha\{1+(1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= \infty_\alpha\{1-(1/\infty_\beta)\} \\
&= \infty_\alpha.
\end{aligned}
$$

（ウ） $m=1/\infty_\gamma$ならば，定理7-17参照．

(5) $x=\infty_{\alpha}$, $1/\infty_{0}<y<1-(1/\infty_{0})$ の場合：

(ア) $m=\infty_{\gamma}$ ならば,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}&=(\infty_{\alpha}y)^{\infty_{\gamma}}\\
&=\infty_{\alpha}{}^{\infty_{\gamma}}\\
&=\begin{cases}\infty_{\alpha} & (\gamma+1<\alpha),\\ \\ \infty_{\gamma+1} & (\gamma+1\geqq\alpha).\end{cases}\\
\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{\infty_{\gamma}}\,y^{\infty_{\gamma}}\\
&=\begin{cases}\infty_{\alpha}\cdot(1/\infty_{\gamma+1})=\infty_{\alpha} & (\gamma+1<\alpha),\\ \\ \infty_{\gamma+1}\cdot(1/\infty_{\gamma+1})=\Sigma_{\gamma+1} & (\gamma+1\geqq\alpha).\end{cases}
\end{aligned}
$$

(イ) $m\in\mathcal{D}^{+}$ ならば,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}&=(\infty_{\alpha}y)^{m}\\
&=\infty_{\alpha}{}^{m}\\
&=\infty_{\alpha}.\\
\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{m}\,y^{m}\\
&=\infty_{\alpha}.\quad(\because 1/\infty_{0}<y^{m}<1-(1/\infty_{0}))
\end{aligned}
$$

(ウ) $m=1/\infty_{\gamma}$ ならば,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}&=(\infty_{\alpha}y)^{1/\infty_{\gamma}}\\
&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\gamma}}\\
&=\begin{cases}\infty_{\alpha} & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \{x:1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\} & (\gamma+1=\alpha),\\ \{x:1+(1/\infty_{\gamma})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\} & (\gamma=\alpha),\\ 1+(1/\infty_{\gamma}) & (\gamma>\alpha).\end{cases}\\
\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{1/\infty_{\gamma}}\,y^{1/\infty_{\gamma}}\\
&=\begin{cases}\infty_{\alpha}\{1-(1/\infty_{\gamma})\}=\infty_{\alpha} & (\gamma+2\leqq\alpha),\\ \{x:1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\}\\ \quad=\{x:1+(1/\infty_{0})<x\leqq\infty_{\alpha}\} & (\gamma+1=\alpha),\\ \{x:1+(1/\infty_{\gamma})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\}\\ \quad=\{x:1-(1/\infty_{\gamma})\leqq x\leqq 1+(1/\infty_{0})\} & (\gamma=\alpha),\\ \{1+(1/\infty_{\gamma})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\}=1+\Pi_{\gamma} & (\gamma>\alpha).\end{cases}
\end{aligned}
$$

(6) $x=\infty_{\alpha}$, $y=1/\infty_{\beta}$ の場合：

(ア) $m=\infty_{\gamma}$ ならば，定理7-18参照.

(イ) $m\in\mathcal{D}^{+}$ ならば,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}&=\{\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})\}^{m}\\
&=\begin{cases}\infty_{\alpha}{}^{m}=\infty_{\alpha} & (\beta<\alpha),\\ \Sigma_{\alpha}{}^{m}=\Sigma_{\alpha} & (\beta=\alpha),\\ (1/\infty_{\beta})^{m}=1/\infty_{\beta} & (\beta>\alpha).\end{cases}\\
\text{右辺}&=\infty_{\alpha}{}^{m}\cdot(1/\infty_{\beta})^{m}\\
&=\infty_{\alpha}(1/\infty_{\beta})
\end{aligned}
$$

$$=\begin{cases} \infty_\alpha & (\beta<\alpha), \\ \Sigma_\alpha & (\beta=\alpha), \\ 1/\infty_\beta & (\beta>\alpha). \end{cases}$$

（ウ）$m=1/\infty_\gamma$ならば，定理7-19参照.

（7）$1+(1/\infty_0)<x\in\mathcal{D}^+$，$y=\infty_\beta$の場合は，（2）と同様である.

（8）$1+(1/\infty_0)<x\in\mathcal{D}^+$，$1+(1/\infty_0)<y\in\mathcal{D}^+$の場合：

（ア）$m=\infty_\gamma$ならば，

左辺$=(xy)^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\gamma+1}$.（$\because 1+(1/\infty_0)<xy$，$xy\in\mathcal{D}^+$ または $xy\subset\mathcal{D}^+$）

右辺$=x^{\infty\gamma}y^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\gamma+1}\infty_{\gamma+1}$

$=\infty_{\gamma+1}$.

（イ）$m\in\mathcal{D}^+$ならば，

左辺$=\{(r+b)\cdot(s+c)\}^{t+d}$

$=\{rs+(b+c)\}^{t+d}$

$=(rs)^t+\{(b+c)+d\}$

$=r^ts^t+(b+c+d)$.

右辺$=(r+b)^{t+d}\cdot(s+c)^{t+d}$

$=\{r^t+(b+d)\}\cdot\{s^t+(c+d)\}$

$=r^ts^t+\{(b+d)+(c+d)\}$

$=r^ts^t+\{b+c+(d+d)\}$

$=r^ts^t+(b+c+d)$.（$\because d\in\Pi_0$より$d+d=d$）

（ウ）$m=1/\infty_\gamma$ならば，

左辺$=(xy)^{1/\infty\gamma}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

（$\because 1+(1/\infty_0)<xy$，$xy\in\mathcal{D}^+$ または $xy\subset\mathcal{D}^+$）

右辺$=x^{1/\infty\gamma}\cdot y^{1/\infty\gamma}$

$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1+(1/\infty_\gamma)\}$

$=1+(1/\infty_\gamma)$.

（9）$1+(1/\infty_0)<x\in\mathcal{D}^+$，$y=1+(1/\infty_\beta)$の場合：

（ア）$m=\infty_\gamma$ならば，

左辺$=[(r+b)\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}]^{\infty\gamma}$

$=[r+\{b+(1/\infty_\beta)\}]^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\gamma+1}$.

右辺$=(r+b)^{\infty\gamma}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$

$=\infty_{\gamma+1}\{1+\infty_\gamma(1/\infty_\beta)\}$

$$=\begin{cases} \infty_{\gamma+1}(1+\infty_\gamma)=\infty_{\gamma+1}\infty_\gamma=\infty_{\gamma+1} & (\beta<\gamma), \\ \infty_{\gamma+1}(1+\Sigma_\gamma)=\infty_{\gamma+1} & (\beta=\gamma), \\ \infty_{\gamma+1}\{1+(1/\infty_\beta)\}=\infty_{\gamma+1} & (\beta>\gamma). \end{cases}$$

（イ） $m \in \mathcal{D}^{+}$ならば,

$$\text{左辺} = [(r+b)\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}]^{t+d}$$
$$= [r+\{b+(1/\infty_{\beta})\}]^{t+d}$$
$$= r^{t} + [\{b+(1/\infty_{\beta})\}+d]$$
$$= r^{t} + \{b+(1/\infty_{\beta})+d\}.$$
$$\text{右辺} = (r+b)^{t+d}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{t+d}$$
$$= \{r^{t}+(b+d)\}\cdot\{1+\ (t+d)\cdot(1/\infty_{\beta})\}$$
$$= \{r^{t}+(b+d)\}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}$$
$$= r^{t}+\{(b+d)+(1/\infty_{\beta})\}$$
$$= r^{t}+\{b+(1/\infty_{\beta})+d\}.$$

（ウ） $m = 1/\infty_{\gamma}$ならば,

$$\text{左辺} = [(r+b)\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}]^{1/\infty\gamma}$$
$$= [r+\{b+(1/\infty_{\beta})\}]^{1/\infty\gamma}$$
$$= 1+(1/\infty_{\gamma}).$$
$$\text{右辺} = (r+b)^{1/\infty\gamma}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{1/\infty\gamma}$$
$$= \{1+(1/\infty_{\gamma})\}\cdot\{1+(1/\infty_{\max\{\beta,\ \gamma\}})\}$$
$$= 1+\{(1/\infty_{\gamma})+(1/\infty_{\max\{\beta,\ \gamma\}})\}$$
$$= 1+(1/\infty_{\gamma}).$$

(10)　$1+(1/\infty_{0}) < x \in \mathcal{D}^{+}$,　$y = 1-(1/\infty_{\beta})$の場合：

（ア） $m = \infty_{\gamma}$ならば,

$$\text{左辺} = [(r+b)\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{\infty\gamma}$$
$$= [r+\{b-(1/\infty_{\beta})\}]^{\infty\gamma}$$
$$= \infty_{\gamma+1}.$$

(∵ $r+\{b-(1/\infty_{\beta})\}$は$r+b$,　$r+\Pi_{\beta}$,　$r-(1/\infty_{\beta})$のいずれか)

$$\text{右辺} = (r+b)^{\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{\infty\gamma}$$
$$= \infty_{\gamma+1}\{1+\infty_{\gamma}(1/\infty_{\beta})\}^{-1}$$
$$= \begin{cases} \infty_{\gamma+1}(1+\infty_{\gamma})^{-1} = \infty_{\gamma+1}(1/\infty_{\gamma}) = \infty_{\gamma+1} & (\beta<\gamma), \\ \infty_{\gamma+1}(1+\Sigma_{\gamma})^{-1} = \infty_{\gamma+1} & (\beta=\gamma), \\ \qquad (\because 1/\infty_{\gamma} \leqq (1+\Sigma_{\gamma})^{-1} \leqq 1-(1/\infty_{\gamma})) & \\ \infty_{\gamma+1}\{1-(1/\infty_{\beta})\} = \infty_{\gamma+1} & (\beta>\gamma). \end{cases}$$

（イ） $m \in \mathcal{D}^{+}$ならば,

$$\text{左辺} = [(r+b)\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}]^{t+d}$$
$$= [r+\{b-(1/\infty_{\beta})\}]^{t+d}$$
$$= r^{t}+[\{b-(1/\infty_{\beta})\}+d]$$
$$= r^{t}+\{b-(1/\infty_{\beta})+d\}.$$
$$\text{右辺} = (r+b)^{t+d}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}^{t+d}$$
$$= \{r^{t}+(b+d)\}\cdot\{1+(t+d)\cdot(1/\infty_{\beta})\}^{-1}$$
$$= \{r^{t}+(b+d)\}\cdot\{1+(1/\infty_{\beta})\}^{-1}$$
$$= \{r^{t}+(b+d)\}\cdot\{1-(1/\infty_{\beta})\}$$
$$= r^{t}+\{(b+d)-(1/\infty_{\beta})\}$$

$= r^t + \{b - (1/\infty_\beta) + d\}.$

（ウ） $m = 1/\infty_\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= [(r+b)\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma} \\
&= [r + \{b-(1/\infty_\beta)\}]^{1/\infty\gamma} \\
&= 1 + (1/\infty_\gamma).
\end{aligned}$$

$(\because r + \{b-(1/\infty_\beta)\}$ は $r+b$， $r+\Pi_\beta$， $r-(1/\infty_\beta)$ のいずれか$)$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= (r+b)^{1/\infty\gamma}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma} \\
&= \{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1+(1/\infty_{\max\{\beta,\ \gamma\}})\}^{-1} \\
&= \{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1-(1/\infty_{\max\{\beta,\ \gamma\}})\} \\
&= 1 + \{(1/\infty_\gamma)-(1/\infty_{\max\{\beta,\ \gamma\}})\} \\
&= \begin{cases} 1+\{(1/\infty_\gamma)-(1/\infty_\beta)\} = 1+(1/\infty_\gamma) & (\gamma<\beta), \\ \\ 1+\{(1/\infty_\gamma)-(1/\infty_\gamma)\} = 1+\Pi_\gamma & (\gamma \geqq \beta). \end{cases}
\end{aligned}$$

(11) $1+(1/\infty_0) < x \in \mathcal{D}^+$， $1/\infty_0 < y < 1-(1/\infty_0)$ の場合：

（ア） $m = \infty_\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (xy)^{\infty\gamma} \\
&= \{(r+b)\cdot(s+c)\}^{\infty\gamma} \quad (\text{ただし，} 1<r<\infty_0,\ 0<s<1) \\
&= \{rs+(b+c)\}^{\infty\gamma} \\
&= \begin{cases} \infty_{\gamma+1} & (1<rs<\infty_0), \\ \{1+(b+c)\}^{\infty\gamma} = 1+\infty_\gamma(b+c) & (rs=1), \\ 1/\infty_{\gamma+1} & (0<rs<1). \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= x^{\infty\gamma}y^{\infty\gamma} \\
&= \infty_{\gamma+1}\cdot(1/\infty_{\gamma+1}) \\
&= \Sigma_{\gamma+1}.
\end{aligned}$$

ここで， $1+\infty_\gamma(b+c) \neq \Sigma_{\gamma+1}$ より，左辺＝右辺となる場合はない．

（イ） $m \in \mathcal{D}^+$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \{(r+b)\cdot(s+c)\}^{t+d} \\
&= \{rs+(b+c)\}^{t+d} \\
&= \begin{cases} (rs)^t + (b+c+d) & (1<rs<\infty_0), \\ 1+(t+d)\cdot(b+c) = 1+(b+c) & (rs=1), \\ [\{(rs)^{-1}-(b+c)\}^{t+d}]^{-1} & \\ = [\{(rs)^{-1}\}^t + \{d-(b+c)\}]^{-1} & \\ = [\{(rs)^t\}^{-1} + \{d-(b+c)\}]^{-1} & (\because r,\ s,\ t \in R^+) \\ = (rs)^t - \{d-(b+c)\} & \\ = (rs)^t + (b+c-d) & (0<rs<1). \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= (r+b)^{t+d}\cdot(s+c)^{t+d} \\
&= \{r^t+(b+d)\}\cdot\{(s^{-1}-c)^{t+d}\}^{-1} \\
&= \{r^t+(b+d)\}\cdot\{(s^{-1})^t-(c-d)\}^{-1} \\
&= \{r^t+(b+d)\}\cdot\{(s^t)^{-1}-(c-d)\}^{-1} \\
&= \{r^t+(b+d)\}\cdot\{s^t+(c-d)\}
\end{aligned}$$

$= r^t s^t + \{(b+d)+(c-d)\}$

$= (rs)^t + (b+c+d-d)$. ($\because r, s, t \in R^+$)

（ウ） $m = 1/\infty_\gamma$ ならば,

左辺 $= \{(r+b)\cdot(s+c)\}^{1/\infty\gamma}$

$= \{rs+(b+c)\}^{1/\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} 1+(1/\infty_\gamma) \\ \qquad (1+(1/\infty_\gamma) \leqq rs+(b+c) < \infty_0), \\ 1+(b+c) \\ \qquad (1-(1/\infty_\gamma) < rs+(b+c) < 1+(1/\infty_\gamma)), \quad (※) \\ 1-(1/\infty_\gamma) \\ \qquad (1/\infty_0 < rs+(b+c) \leqq 1-(1/\infty_\gamma)). \end{cases}$$

右辺 $= (r+b)^{1/\infty\gamma}\cdot(s+c)^{1/\infty\gamma}$

$= \{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1-(1/\infty_\gamma)\}$

$= 1+\Pi_\gamma$.

ここで，(※)において， $b+c \neq \Pi_\gamma$ より，左辺≠右辺.

(12) $1+(1/\infty_0) < x \in \mathcal{D}^+$， $y = 1/\infty_\beta$ の場合：

（ア） $m = \infty_\gamma$ ならば,

左辺 $= (xy)^{\infty\gamma}$

$= \{(r+b)\cdot(1/\infty_\beta)\}^{\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} 1/\infty_{\gamma+1} \quad (\beta \leqq \gamma+1), \\ 1/\infty_\beta \quad (\beta > \gamma+1). \end{cases}$$

右辺 $= (r+b)^{\infty\gamma}\cdot(1/\infty_\beta)^{\infty\gamma}$

$$= \begin{cases} \infty_{\gamma+1}(1/\infty_{\gamma+1}) = \Sigma_{\gamma+1} \quad (\beta \leqq \gamma+1), \\ \infty_{\gamma+1}(1/\infty_\beta) = 1/\infty_\beta \quad (\beta > \gamma+1). \end{cases}$$

（イ） $m \in \mathcal{D}^+$ ならば,

左辺 $= \{(r+b)\cdot(1/\infty_\beta)\}^{t+d}$

$= (1/\infty_\beta)^{t+d}$

$= 1/\infty_\beta$.

右辺 $= (r+b)^{t+d}\cdot(1/\infty_\beta)^{t+d}$

$= \{r^t+(b+d)\}\cdot(1/\infty_\beta)$

$= 1/\infty_\beta$.

（ウ） $m = 1/\infty_\gamma$ ならば,

左辺 $= \{(r+b)\cdot(1/\infty_\beta)\}^{1/\infty\gamma}$

$= (1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$

$$=\begin{cases} 1/\infty_\beta & (\gamma+2\leqq\beta), \\ \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1-(1/\infty_0)\} & (\gamma+1=\beta), \\ \{x : 1-(1/\infty_0) \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\beta)\} & (\gamma=\beta), \\ 1-(1/\infty_\gamma) & (\gamma>\beta). \end{cases}$$

$$\text{右辺}=(r+b)^{1/\infty\gamma}\cdot(1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$$

$$=\{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot(1/\infty_\beta)^{1/\infty\gamma}$$

$$=\begin{cases} \{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot(1/\infty_\beta)=1/\infty_\beta \quad (\gamma+2\leqq\beta), \\ \{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\ \{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1-(1/\infty_0)\} \\ \quad =\{x : 1/\infty_\beta \leqq x < 1-(1/\infty_0)\} \quad (\gamma+1=\beta), \\ \{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{x : 1-(1/\infty_0) \leqq x \leqq 1-(1/\infty_\beta)\} \\ \quad =\{x : 1-(1/\infty_0) \leqq x \leqq 1+(1/\infty_\beta)\} \quad (\gamma=\beta), \\ \{1+(1/\infty_\gamma)\}\cdot\{1-(1/\infty_\gamma)\}=1+\Sigma_\gamma \quad (\gamma>\beta). \end{cases}$$

(13) $x=1+(1/\infty_\alpha)$, $y=\infty_\beta$ の場合は，(3)と同様である．

(14) $x=1+(1/\infty_\alpha)$, $1+(1/\infty_0)<y\in\mathcal{D}^+$ の場合は，(9)と同様である．

(15) $x=1+(1/\infty_\alpha)$, $y=1+(1/\infty_\beta)$ の場合：

（ア） $m=\infty_\gamma$ ならば，定理7-20参照．

（イ） $m\in\mathcal{D}^+$ ならば，

$$\text{左辺}=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}]^m$$

$$=\{1+(1/\infty_{\min\{\alpha,\ \beta\}})\}^m$$

$$=1+m(1/\infty_{\min\{\alpha,\ \beta\}})$$

$$=1+(1/\infty_{\min\{\alpha,\ \beta\}}).$$

$$\text{右辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^m\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^m$$

$$=\{1+m(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+m(1/\infty_\beta)\}$$

$$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}$$

$$=1+(1/\infty_{\min\{\alpha,\ \beta\}}).$$

（ウ） $m=1/\infty_\gamma$ ならば，定理7-21参照．

(16) $x=1+(1/\infty_\alpha)$, $y=1-(1/\infty_\beta)$ の場合：

（ア） $m=\infty_\gamma$ ならば，定理7-22参照．

（イ） $m\in\mathcal{D}^+$ ならば，

$$\text{左辺}=[\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}]^m$$

$$=\begin{cases} \{1+(1/\infty_\alpha)\}^m=1+m(1/\infty_\alpha)=1+(1/\infty_\alpha) & (\alpha<\beta), \\ (1+\Pi_\alpha)^m=1+\Pi_\alpha & (\alpha=\beta), \\ \{1-(1/\infty_\beta)\}^m=1-(1/\infty_\beta) & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

$$\text{右辺}=\{1+(1/\infty_\alpha)\}^m\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}^m$$

$$=\{1+m(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+m(1/\infty_\beta)\}^{-1}$$

$$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1+(1/\infty_\beta)\}^{-1}$$

$$=\{1+(1/\infty_\alpha)\}\cdot\{1-(1/\infty_\beta)\}$$

$$=\begin{cases} 1+(1/\infty_\alpha) & (\alpha<\beta), \\ 1+\Pi_\alpha & (\alpha=\beta), \\ 1-(1/\infty_\beta) & (\alpha>\beta). \end{cases}$$

（ウ） $m = 1 / \infty_\gamma$ ならば，定理7-23参照．

(17) $x = 1 + (1 / \infty_\alpha)$，$1 / \infty_0 < y < 1 - (1 / \infty_0)$ の場合：

（ア） $m = \infty_\gamma$ ならば，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot (s + c)]^{\infty_\gamma} \\
&= [s + \{(1 / \infty_\alpha) + c\}]^{\infty_\gamma} \\
&= 1 - (1 / \infty_\gamma). \\
&\qquad (\because 1 / \infty_0 < [s + \{(1 / \infty_\alpha) + c\}] < 1 - (1 / \infty_0))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{\infty_\gamma} \cdot (s + c)^{\infty_\gamma} \\
&= \{1 + \infty_\gamma (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\gamma)\} \\
&= \begin{cases} (1 + \infty_\gamma)\{1 - (1 / \infty_\gamma)\} = \infty_\gamma \{1 - (1 / \infty_\gamma)\} = \infty_\gamma & (\alpha < \gamma), \\ (1 + \Sigma_\gamma) \cdot \{1 - (1 / \infty_\gamma)\} & \\ \quad = \{x : 1 - (1 / \infty_\gamma) \leqq x \leqq \infty_\gamma\} & (\alpha = \gamma), \\ \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\gamma)\} = 1 - (1 / \infty_\gamma) & (\alpha > \gamma). \end{cases}
\end{aligned}
$$

（イ） $m \in \mathcal{D}^+$ ならば，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot (s + c)]^{t + d} \\
&= [s + \{(1 / \infty_\alpha) + c\}]^{t + d} \\
&= [\{s^{-1} - ((1 / \infty_\alpha) + c)\}^{t + d}]^{-1} \\
&\qquad (\because 1 / \infty_0 < [s + \{(1 / \infty_\alpha) + c\}] < 1 - (1 / \infty_0)) \\
&= [(s^{-1})^t - \{(1 / \infty_\alpha) + c - d\}]^{-1} \\
&= [(s^t)^{-1} - \{(1 / \infty_\alpha) + c - d\}]^{-1} \quad (\because s,\ t \in R^+) \\
&= s^t + \{(1 / \infty_\alpha) + c - d\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{t + d} \cdot (s + c)^{t + d} \\
&= [1 + \{(t + d) \cdot (1 / \infty_\alpha)\}] \cdot \{(s^{-1} - c)^{t + d}\}^{-1} \\
&= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{(s^{-1})^t - (c - d)\}^{-1} \\
&= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{(s^t)^{-1} - (c - d)\}^{-1} \quad (\because s,\ t \in R^+) \\
&= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{s^t + (c - d)\} \\
&= s^t + \{(1 / \infty_\alpha) + c - d\}.
\end{aligned}
$$

（ウ） $m = 1 / \infty_\gamma$ ならば，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot (s + c)]^{1 / \infty_\gamma} \\
&= [s + \{(1 / \infty_\alpha) + c\}]^{1 / \infty_\gamma} \\
&= 1 - (1 / \infty_\gamma). \\
&\qquad (\because 1 / \infty_0 < s + \{(1 / \infty_\alpha) + c\} < 1 - (1 / \infty_0))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺} &= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty_\gamma} \cdot (s + c)^{1 / \infty_\gamma} \\
&= \{1 + (1 / \infty_\alpha)\}^{1 / \infty_\gamma} \cdot \{1 - (1 / \infty_\gamma)\} \\
&= \begin{cases} \{1 + (1 / \infty_\gamma)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\gamma)\} = 1 + \Pi_\gamma & (\alpha < \gamma), \\ \{1 + (1 / \infty_\gamma)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\gamma)\} = 1 + \Pi_\gamma & (\alpha = \gamma), \\ \{1 + (1 / \infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1 / \infty_\gamma)\} = 1 - (1 / \infty_\gamma) & (\alpha > \gamma). \end{cases}
\end{aligned}
$$

(18) $x = 1 + (1 / \infty_\alpha)$，$y = 1 / \infty_\beta$ の場合：

（ア） $m = \infty_\gamma$ ならば，定理7-24参照．

（イ） $m \in \mathcal{D}^+$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta)]^m \\
&= (1/\infty_\beta)^m \\
&= 1/\infty_\beta .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^m \cdot (1/\infty_\beta)^m \\
&= \{1 + m(1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta) \\
&= \{1 + (1/\infty_\alpha)\} \cdot (1/\infty_\beta) \\
&= 1/\infty_\beta .
\end{aligned}$$

（ウ） $m = 1/\infty_\gamma$ ならば，定理7-25参照．

(19) $x = 1 - (1/\infty_\alpha)$，$y = \infty_\beta$ の場合は，（4）と同様である．

(20) $x = 1 - (1/\infty_\alpha)$，$1 + (1/\infty_0) < y \in \mathcal{D}^+$ の場合は，(10)と同様である．

(21) $x = 1 - (1/\infty_\alpha)$，$y = 1 + (1/\infty_\beta)$ の場合は，(16)と同様である．

(22) $x = 1 - (1/\infty_\alpha)$，$y = 1 - (1/\infty_\beta)$ の場合：

（ア） $m = \infty_\gamma$ ならば，定理7-26参照．

（イ） $m \in \mathcal{D}^+$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}]^m \\
&= \{1 - (1/\infty_{\min\{\alpha, \beta\}})\}^m \\
&= \{1 + m(1/\infty_{\min\{\alpha, \beta\}})\}^{-1} \\
&= \{1 + (1/\infty_{\min\{\alpha, \beta\}})\}^{-1} \\
&= 1 - (1/\infty_{\min\{\alpha, \beta\}}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^m \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\}^m \\
&= \{1 + m(1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot \{1 + m(1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= \{1 + (1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot \{1 + (1/\infty_\beta)\}^{-1} \\
&= \{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot \{1 - (1/\infty_\beta)\} \\
&= 1 - (1/\infty_{\min\{\alpha, \beta\}}).
\end{aligned}$$

（ウ） $m = 1/\infty_\gamma$ ならば，定理7-27参照．

(23) $x = 1 - (1/\infty_\alpha)$，$1/\infty_0 < y < 1 - (1/\infty_0)$ の場合：

（ア） $m = \infty_\gamma$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (s + c)]^{\infty\gamma} \\
&= [s - \{(1/\infty_\alpha) - c\}]^{\infty\gamma} \\
&= 1/\infty_{\gamma+1}. \quad (\because 1/\infty_0 < s - \{(1/\infty_\alpha) - c\} < 1 - (1/\infty_0))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \{1 - (1/\infty_\alpha)\}^{\infty\gamma} \cdot (s + c)^{\infty\gamma} \\
&= \{1 + \infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1} \cdot (1/\infty_{\gamma+1}) \\
&= 1/\infty_{\gamma+1}. \\
&\qquad (\because 1/\infty_\gamma \leqq \{1 + \infty_\gamma(1/\infty_\alpha)\}^{-1} \leqq 1 - (1/\infty_{\max\{\alpha, \gamma\}}))
\end{aligned}$$

（イ） $m \in \mathcal{D}^+$ ならば，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{1 - (1/\infty_\alpha)\} \cdot (s + c)]^{t+d} \\
&= [s - \{(1/\infty_\alpha) - c\}]^{t+d} \\
&= [\{s^{-1} + ((1/\infty_\alpha) - c))\}^{t+d}]^{-1} \\
&\qquad\qquad (\because 1/\infty_0 < s - \{(1/\infty_\alpha) - c\} < 1 - (1/\infty_0))
\end{aligned}$$

$=[(s^{-1})^{t}+\{(1/\infty_{\alpha})-c+d\}]^{-1}$

$=[(s^{t})^{-1}+\{(1/\infty_{\alpha})-c+d\}]^{-1}$ $(\because s,\ t\in R^{+})$

$=s^{t}-\{(1/\infty_{\alpha})-c+d\}.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{t+d}\cdot(s+c)^{t+d}$

$=[\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{t+d}]^{-1}\cdot\{(s^{-1}-c)^{t+d}\}^{-1}$

$=\{1+(t+d)\cdot(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot\{(s^{-1})^{t}-(c-d)\}^{-1}$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot\{(s^{t})^{-1}-(c-d)\}^{-1}$

$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot\{s^{t}+(c-d)\}$

$=s^{t}-\{(1/\infty_{\alpha})-(c-d)\}$

$=s^{t}-\{(1/\infty_{\alpha})-c+d\}.$

（ウ） $m=1/\infty_{\gamma}$ ならば，

左辺 $=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(s+c)]^{1/\infty\gamma}$

$=[s-\{(1/\infty_{\alpha})-c\}]^{1/\infty\gamma}$

$=1-(1/\infty_{\gamma}).$

$(\because 1/\infty_{0}<s-\{(1/\infty_{\alpha})-c\}<1-(1/\infty_{0}))$

右辺 $=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{1/\infty\gamma}\cdot(s+c)^{1/\infty\gamma}$

$=\{1-(1/\infty_{\max\{\alpha,\ \gamma\}})\}\cdot\{1-(1/\infty_{\gamma})\}$

$=1-(1/\infty_{\gamma}).$

(24)　$x=1-(1/\infty_{\alpha})$，$y=1/\infty_{\beta}$ の場合：

（ア） $m=\infty_{\gamma}$ ならば，定理7-28参照．

（イ） $m\in\mathcal{D}^{+}$ ならば，

左辺 $=[\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})]^{m}$

$=(1/\infty_{\beta})^{m}$

$=1/\infty_{\beta}.$

右辺 $=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}^{m}\cdot(1/\infty_{\beta})^{m}$

$=\{1+m(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot(1/\infty_{\beta})$

$=\{1+(1/\infty_{\alpha})\}^{-1}\cdot(1/\infty_{\beta})$

$=\{1-(1/\infty_{\alpha})\}\cdot(1/\infty_{\beta})$

$=1/\infty_{\beta}.$

（ウ） $m=1/\infty_{\gamma}$ ならば，定理7-29参照．

(25)　$1/\infty_{0}<x<1-(1/\infty_{0})$，$y=\infty_{\beta}$ の場合は，(5)と同様である．

(26)　$1/\infty_{0}<x<1-(1/\infty_{0})$，$1+(1/\infty_{0})<y\in\mathcal{D}^{+}$ の場合は，(11)と同様である．

(27)　$1/\infty_{0}<x<1-(1/\infty_{0})$，$y=1+(1/\infty_{\beta})$ の場合は，(17)と同様である．

(28)　$1/\infty_{0}<x<1-(1/\infty_{0})$，$y=1-(1/\infty_{\beta})$ の場合は，(23)と同様である．

(29)　$x=1/\infty_{\alpha}$，$y=\infty_{\beta}$ の場合は，(6)と同様である．

(30)　$x=1/\infty_{\alpha}$，$1+(1/\infty_{0})<y\in\mathcal{D}^{+}$ の場合は，(12)と同様である．

(31)　$x=1/\infty_{\alpha}$，$y=1+(1/\infty_{\beta})$ の場合は，(18)と同様である．

(32)　$x=1/\infty_{\alpha}$，$y=1-(1/\infty_{\beta})$ の場合は，(24)と同様である．

(33) $0 < x < 1-(1/\infty_0)$, $0 < y < 1-(1/\infty_0)$の場合：

上述の中で，x，yがともに$1+(1/\infty_0)$より大の場合だけを見れば，定理は成り立っている．また，$1+(1/\infty_0) < x^{-1}$，$1+(1/\infty_0) < y^{-1}$であるので，

$$\{(x^{-1})(y^{-1})\}^m = (x^{-1})^m \cdot (y^{-1})^m$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= [\{(xy)^{-1}\}^m]^{-1} \quad (\because 0 < xy < 1) \\
&= [\{(x^{-1})(y^{-1})\}^m]^{-1} \quad (\because \text{定理7-30}) \\
&= \{(x^{-1})^m (y^{-1})^m\}^{-1} \\
&= [\{(x^{-1})^m\}^{-1}] \cdot [\{(y^{-1})^m\}^{-1}] \quad (\because \text{定理7-5}) \\
&= x^m y^m \\
&= \text{右辺} \blacksquare
\end{aligned}$$

補足：定理 7-6，定理 7-14，定理 7-31 は，指数法則が成り立つための必要十分条件を示している．すなわち，定理 7-14，定理 7-31 で除かれた場合以外においては，指数法則が成り立つ．しかし，このままでは繁雑で，わかりにくいので，最後に，簡便な十分条件の定理を示すことにする．

定理 7-32

$x \in D^+$，$y \in D^+$，$m \in D^+$，$n \in D^+$のとき，次の式(ｉ)～(ｖ)が成り立つ．

(ｉ) $x^m x^n = x^{m+n}$.

(ⅱ) $1+(1/\infty_0) < x$，$1/\infty_0 < m$，$1/\infty_0 < n$ならば，$(x^m)^n = x^{mn}$.

(ⅲ) $0 < x < 1-(1/\infty_0)$，$1/\infty_0 < m$，$1/\infty_0 < n$ならば，$(x^m)^n = x^{mn}$.

(ⅳ) $1+(1/\infty_0) < x$，$1+(1/\infty_0) < y$ならば，$(xy)^m = x^m y^m$.

(ｖ) $0 < x < 1-(1/\infty_0)$，$0 < y < 1-(1/\infty_0)$ならば，$(xy)^m = x^m y^m$.

定理 7-32 は，次の定理を含んでいる．

定理 7-33

$x \in D^+$，$y \in D^+$，$m \in D^+$，$n \in D^+$のとき，

$$1+(1/\infty_0) < x,\quad 1+(1/\infty_0) < y,\quad 1/\infty_0 < m,\quad 1/\infty_0 < n$$

ならば，次の指数法則が成り立つ．

(ｉ) $x^m x^n = x^{m+n}$，(ⅱ) $(x^m)^n = x^{mn}$，(ⅲ) $(xy)^m = x^m y^m$.

定理 7-34

$x \in D^+$，$y \in D^+$，$m \in D^+$，$n \in D^+$のとき，

$$0 < x < 1-(1/\infty_0),\quad 0 < y < 1-(1/\infty_0),\quad 1/\infty_0 < m,\quad 1/\infty_0 < n$$

ならば，次の指数法則が成り立つ．

(ｉ) $x^m x^n = x^{m+n}$，(ⅱ) $(x^m)^n = x^{mn}$，(ⅲ) $(xy)^m = x^m y^m$.

第８章　実数点

この章では，実数点の大きさを表す無限小を特定することで，実数点の存在を示す．

1 有限実核の基本性質

定理4-4より，有限実核の基に，その有限実核が対応する写像 ζ： R → $\boldsymbol{R}$ は，大小関係，加法，乗法についての同型写像である．すなわち，ａ，ｂ∈Ｒとすれば，次の式が成り立つ．

（ｉ）大小関係

$$a < b \Leftrightarrow \zeta(a) < \zeta(b).$$
$$a = b \Leftrightarrow \zeta(a) = \zeta(b).$$
$$a > b \Leftrightarrow \zeta(a) > \zeta(b).$$

（ii）加法

$$\zeta(a) + \zeta(b) = \zeta(a+b).$$

（iii）乗法

$$\zeta(a) \cdot \zeta(b) = \zeta(a \cdot b).$$

2 有限実核による数直線の矛盾

上記の基本性質は，有限実核上にも，従来の実数上における点集合論と同じ理論が存在することを示している．しかし，従来の実数直線の座標ａの位置に$\zeta(a)$を配置して得られる数直線（この数直線を「有限実核直線」という）を考えれば，矛盾が生じる．実際，

$$\zeta(a) = a + \Pi_0 = \{x : a - (1/\infty_0) \leqq x \leqq a + (1/\infty_0)\}.$$
$$\{a + (1/\infty_0)\} - \{a - (1/\infty_0)\} = 1/\infty_0 \quad \cdots \quad (*)$$

であるので，「有限実核直線」における点$\zeta(a)$は，長さが$1/\infty_0$の線分である．

ここで，無限小$1/\infty_0$が，長さが１の線分を連続濃度に等分割した長さに等しいと考えれば，可符番個に等分割した長さは，$1/\infty_0$よりも大なる無限小でなくてはならないが，そのような無限小は存在しない．

そして，無限小$1/\infty_0$が，長さが１の線分を可符番個に等分割した長さに等しいと考えれば，連続濃度に等分割した長さは，$1/\infty_0$よりも小なる無限小でなくてはならない．このことは，(＊)に矛盾する．したがって，$\zeta(a)$を実数点とすることはできない．

3 定義8-1（基本不定数）

（ｉ）ａ∈Ｒのとき，不定数 $\mathbf{a} = a + \Pi_1$ を基本不定数という．

（ii）基本不定数すべての集合を**R**で表す．

補足：基本不定数**a**は，有限実核$\zeta(a)$から，$a + (1/\infty_0)$，$a - (1/\infty_0)$の２つの数を除いた不定数である．

$\boxed{4}$ 定理8-1（基本不定数の基本性質）

$a,\ b \in R$とすれば，次の式が成り立つ．

（ⅰ）大小関係

$$a < b \Leftrightarrow a + \Pi_1 < b + \Pi_1.$$
$$a = b \Leftrightarrow a + \Pi_1 = b + \Pi_1.$$
$$a > b \Leftrightarrow a + \Pi_1 > b + \Pi_1.$$

（ⅱ）加法

$$(a + \Pi_1) + (b + \Pi_1) = (a + b) + \Pi_1.$$

（ⅲ）乗法

$$(a + \Pi_1)\cdot(b + \Pi_1) = (a \cdot b) + \Pi_1.$$

証明　（ⅰ）は明らか．（ⅱ）と（ⅲ）は左辺を実際に計算すれば右辺が得られる■

$\boxed{5}$ 実数点

定理8-1より，写像 $f : a \to \mathbf{a}$ は，Rから$\mathbf{R}$への，大小関係，加法，乗法についての同型写像であるので，$\mathbf{R}$上にも，R上と同じ点集合論が存在する．そして，

$$\mathbf{a} = a + \Pi_1 = \{x : a - (1/\infty_1) \leqq x \leqq a + (1/\infty_1)\}.$$
$$\{a + (1/\infty_1)\} - \{a - (1/\infty_1)\} = 1/\infty_1.$$

であるので，従来の実数直線の座標aの位置に$\mathbf{a}$を配置して得られる数直線（この数直線を「基本直線」という）を考えれば，$\boxed{2}$ と同じ問題は生じない．

実際，$1/\infty_1$を，長さが１の線分を連続濃度に等分割した長さに等しいとすれば，可符番個に等分割した長さは，$1/\infty_0$と考えることができる．

そして，$1/\infty_1$を，長さが１の線分を可符番個に等分割した長さに等しいとすれば，$1/\infty_0$は，可符番個よりも小なる無限個に等分割した長さになるが，そのような無限は存在しない．以上により，基本不定数$\mathbf{a}$が実数点であり，その長さは$1/\infty_1$である．

$\boxed{6}$ 超実数点

拡大実数は従来の実数の拡張であり，超実数も従来の実数の拡張である．そして，両者は全く異なる数のように見えるが,以下のように考えれば,両者を融合することができる．

すなわち，$\mathbf{R}$を導く過程で用いるRの代わりにR^*(超実数すべての集合)を用いれば，次の２つの理由で，$\mathbf{R}^* = \{\mathbf{a} : a \in R^*\}$を得ることができる．

（ⅰ）超実数は，$x_n \in R$の無限列$\{x_n\}$によって作り出される．(参考文献[６])

そして，定義 1-3 の（ⅲ）に従えば，「$x_n \in R^+$ならば，$1/\infty_\alpha < \{x_n\}$」である．

これは，$\{x_n\}$が，いかなる正の無限小超実数としても，$1/\infty_\alpha$は，それよりも更に小さい無限小であることを示している．したがって，超実数aと無限小拡大実数$1/\infty_\alpha$の，

$$\text{和}\ a + (1/\infty_\alpha),\qquad \text{差}\ a - (1/\infty_\alpha)$$

は超実数でも，拡大実数でもないので，新たに，

$$\text{順序対}(a,\ b),\ a \in R^*,\ b \in \Pi_0$$

を考えて，超実数を拡張すれば，「拡大超実数」，及び，その不定数である「超実核」$\zeta(a)$を導くことができる．

（ⅱ）R^*はRと同じ連続濃度の集合であるので，実数点の場合と同様に，R^*による数直線（これを「超実数直線」という）を考えれば，超実数直線上の１点は，長さが$1/\infty_1$の「超実数点」であると考えることができる．

ここで，$a \in R^*$，$\mathbf{a} \in \mathbf{R}^*$として，写像 $f : a \to \mathbf{a}$ を考えれば，fは，R^*から$\mathbf{R}^*$への，大小関係，加法，乗法についての同型写像になるので，R^*上における超準解析と同じ理論が，$\mathbf{R}^*$上にも存在する．

補足：「$\boxed{1}$ 有限実核の基本性質」は，次のように拡張して考えることができる．

実核の基すべての集合$R \cup \{-\infty_0, \infty_0\}$を$[R]$，

実核すべての集合$\boldsymbol{R} \cup \{\zeta(-\infty_0), \zeta(\infty_0)\}$を$[\boldsymbol{R}]$

で表せば，

実核の基に，その実核が対応する写像 $f : [R] \to [\boldsymbol{R}]$

は，定理4-1と同じ例外を除けば，大小関係，加法，乗法についての同型写像になる．証明も，定理4-4より，定理4-1と同様である．

補足：$\zeta(\infty_0) = \boldsymbol{\infty}$，$\zeta(-\infty_0) = -\boldsymbol{\infty}$とすれば，次の式が成り立つ．これらの式は，測度論において，特別に約束して用いることが多い式であるが，拡大実数論においては，自然に導かれる式である．

（ⅰ）$-\boldsymbol{\infty} = (-1)\boldsymbol{\infty}$.

（ⅱ）$-\boldsymbol{\infty} < \mathbf{a} < \boldsymbol{\infty}$.

（ⅲ）$\boldsymbol{\infty} + \mathbf{a} = \boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty}) + \mathbf{a} = -\boldsymbol{\infty}$.

（ⅳ）$\boldsymbol{\infty} - \mathbf{a} = \boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty}) - \mathbf{a} = -\boldsymbol{\infty}$.

（ⅴ）$\boldsymbol{\infty} + \boldsymbol{\infty} = \boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty}) + (-\boldsymbol{\infty}) = -\boldsymbol{\infty}$.

（ⅵ）$\mathbf{a} > \mathbf{0}$ならば，$\boldsymbol{\infty}\mathbf{a} = \boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty})\mathbf{a} = -\boldsymbol{\infty}$.

（ⅶ）$\mathbf{a} < \mathbf{0}$ならば，$\boldsymbol{\infty}\mathbf{a} = -\boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty})\mathbf{a} = \boldsymbol{\infty}$.

（ⅷ）$\boldsymbol{\infty}\boldsymbol{\infty} = \boldsymbol{\infty}$，　$(-\boldsymbol{\infty})(-\boldsymbol{\infty}) = \boldsymbol{\infty}$.

（ⅸ）$\boldsymbol{\infty}(-\boldsymbol{\infty}) = -\boldsymbol{\infty}$.

（ⅹ）$\boldsymbol{\infty}\, 0 = 0$，　$(-\boldsymbol{\infty})\, 0 = 0$.

しかし，

（ア）$\boldsymbol{\infty} + (-\boldsymbol{\infty}) = \bigcup \Theta_\alpha$.

（イ）$\boldsymbol{\infty}\,\mathbf{0} = (\bigcup(-\Sigma_\alpha)) \cup \{0\} \cup (\bigcup \Sigma_\alpha)$ $(\alpha \geqq 1)$

である．(ア)，(イ)は，拡大実数すべての領域Dに等しい．

おわりに

私は，この小冊子の冒頭で，カージナル数を仮定して「拡大実数」を創れば，次の２つのことができるのではないかと述べた．

（ｉ）「可能的無限」と「実無限」を統一すること．

（ⅱ）数直線上の１点の大きさを表す無限小を特定すること．

そして，(ｉ)の意味は，「可能的無限」の概念を用いて導かれる数学（例えば，標準的な微分積分）と同じ内容の理論を，「拡大実数」を用いて導くことである，と述べた．しかし，このままでは説明不足であるので，(ｉ)について補足する．

通常の数学で，無限を用いる理論は，次の２つに分類することができる．

理論Ⅰ：「可能的無限」の概念を用いる理論．

(すなわち，εδ論法を用いる理論で，無限を数としてとらえることができない理論)

理論Ⅱ：「実無限」の概念を用いる理論．

(すなわち，一般集合論を用いる理論で，無限を数としてとらえることができる理論)

したがって，「可能的無限」と「実無限」を統一するということは，次の３つの方法のいずれか１つを意味するものと考えることができる．

（ア）理論Ⅰに含まれる数学と同じ内容の理論を，理論Ⅱを仮定して導く．

（イ）理論Ⅱに含まれる数学と同じ内容の理論を，理論Ⅰを仮定して導く．

（ウ）第Ⅲの理論を仮定して，理論Ⅰと理論Ⅱに含まれる数学と同じ内容の理論を導く．

上記(ｉ)の意味は，(ア)による方法のことである．そして，

〈１〉第８章の「$\boxed{5}$ 超実数点」より，**R＊**上には，R＊上と同じ超準解析が存在する．

〈２〉R＊上の無限小を用いた極限，連続性，一様連続性の定義は，R上のεδ論法を用いた極限，連続性，一様連続性の定義と同値である．(参考文献[７] P.79)

したがって，「可能的無限」の概念を用いた理論(理論Ⅰ)は，すべて，「実無限」の概念を用いた理論(理論Ⅱ)に書き換えることができるので，(ア)は完成したと考えてよい．

なお，従来の実数を含み，無限大や無限小も含む数としては，

（ａ）実数の集合に記号∞を付加した便宜的な数，(参考文献[５]P.44)

（ｂ）超実数

が知られているが，

(ａ)は，εδ論法を用いずに微分積分を導くことはできないし，数直線上の１点の大きさを表す無限小を特定することもできない．

(ｂ)は，εδ論法を用いずに微分積分を導くことができるし，無限を数としてとらえることもできるので，「可能的無限」と「実無限」を統一している．しかし，数直線上の１点の大きさを表す無限小を特定することはできない．

したがって，(ａ)も(ｂ)も今回の目的には適さない．

巻末資料

この資料は，本編を書き進める過程で気付いた疑問についての解答例である．

ただし，この資料において，単に，整数，有理数，実数といえば，それは，それぞれ，従来の整数，従来の有理数，従来の実数を表すものとする．本編の用語を用いれば，それぞれ，有限整数，有限有理数，有限実数のことである．

【疑問Ａ】拡大実数は「自然数」から順に拡張することで得られるが，拡大実数は実数の拡張であるので，実数を仮定して，その上に拡大実数を導く方法もあるのではないか，また，その方が容易なのではないか？

【疑問Ｂ】本編の第８章において，Ｒ上に存在する微分積分は$\mathbf{R}$上にも存在することが分かった．しかし，同時に，次の不自然も認めなくてはならない．

Ｒ上での測度論においては，零集合の測度は０であるので，$\mathbf{R}$上での測度論においては，零集合の測度は$\mathbf{0}$となる．ここで，

$$\mathbf{0}=\Pi_1=\{x : -(1/\infty_1)\leqq x\leqq 1/\infty_1\}$$

であるので，このままでは，測度を表すのに，負の数を用いることになり，不自然である．この不自然を回避する方法はないのか？

【疑問Ｃ】本編の第８章において，実数点を定める際に，実核$\zeta(a)$から，

$$a+(1/\infty_0),\quad a-(1/\infty_0)$$

の２つの数を除いた基本不定数$\mathbf{a}$を用いた．では，除かれた２つの数は何を表す数なのか？

目　次

疑問Ａの解答例

次の２つの命題を公理として，拡大実数を構成する．

【公理１】実数すべての集合Ｒが存在する．
【公理２】順序数すべての領域Ｗが存在する．

ただし，使用する用語や記号の意味は，必ずしも本編と一致していないので注意を要する．また，導かれる定理は，当然のことであるが，本編と同じであるので，ここでは，加法と乗法についての，交換法則と結合法則を示すにとどめる．

（１）【公理２】から得られる領域
Ｗ＝{０，１，２，・・・，ω，・・・}に，

$$W_{(1)}=\{0_{(1)},\ 1_{(1)},\ 2_{(1)},\ \cdots,\ \omega_{(1)},\ \cdots\}.$$
$$W_{(2)}=\{0_{(2)},\ 1_{(2)},\ 2_{(2)},\ \cdots,\ \omega_{(2)},\ \cdots\}.$$
$$W_{(3)}=\{0_{(3)},\ 1_{(3)},\ 2_{(3)},\ \cdots,\ \omega_{(3)},\ \cdots\}.$$
$$W_{(4)}=\{0_{(4)},\ 1_{(4)},\ 2_{(4)},\ \cdots,\ \omega_{(4)},\ \cdots\}$$

のように添え数を付けることで，Ｗと同等で互いに素な領域：

$$W_{(1)},\quad W_{(2)},\quad W_{(3)},\quad W_{(4)}$$

を得ることができる．

（２）定義A-1
$W_{(1)}$の元に大小関係を導入する．$\alpha\in W$に対して，$\alpha_{(1)}\in W_{(1)}$が対応する１対１写像をf^{+}で表す．すなわち，

$$f^{+}:\alpha\to\alpha_{(1)}$$

とする．ここで，$\alpha,\ \beta\in W$において，

（ⅰ）$\alpha<\beta$　ならば，$f^{+}(\alpha)>f^{+}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(1)}>\beta_{(1)}$．
（ⅱ）$\alpha=\beta$　ならば，$f^{+}(\alpha)=f^{+}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(1)}=\beta_{(1)}$．
（ⅲ）$\alpha>\beta$　ならば，$f^{+}(\alpha)<f^{+}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(1)}<\beta_{(1)}$

とする．

補足：Ｗが全順序な領域であるので，

$$\cdots<f^{+}(\omega)<\cdots<f^{+}(2)<f^{+}(1)<f^{+}(0)$$

となり，$W_{(1)}$も全順序な領域である．

（３）定義A-2
$W_{(2)}$の元に大小関係を導入する．$\alpha\in W$に対して，$\alpha_{(2)}\in W_{(2)}$が対応する１対１写像をf^{-}で表す．すなわち，

$$f^{-}:\alpha\to\alpha_{(2)}$$

とする．ここで，$\alpha,\ \beta\in W$において，

（ⅰ）$\alpha < \beta$ ならば，$f^{-}(\alpha) < f^{-}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(2)} < \beta_{(2)}$.

（ⅱ）$\alpha = \beta$ ならば，$f^{-}(\alpha) = f^{-}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(2)} = \beta_{(2)}$.

（ⅲ）$\alpha > \beta$ ならば，$f^{-}(\alpha) > f^{-}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(2)} > \beta_{(2)}$

とする．

補足：Wが全順序な領域であるので，

$$f^{-}(0) < f^{-}(1) < f^{-}(2) < \cdots < f^{-}(\omega) < \cdots$$

となり，$W_{(2)}$も全順序な領域である．

（4）定義A-3

$W_{(3)}$の元に大小関係を導入する．$\alpha \in W$に対して，$\alpha_{(3)} \in W_{(3)}$が対応する１対１写像をg^{+}で表す．すなわち，

$$g^{+} : \alpha \to \alpha_{(3)}$$

とする．ここで，α，$\beta \in W$において，

（ⅰ）$\alpha < \beta$ ならば，$g^{+}(\alpha) < g^{+}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(3)} < \beta_{(3)}$.

（ⅱ）$\alpha = \beta$ ならば，$g^{+}(\alpha) = g^{+}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(3)} = \beta_{(3)}$.

（ⅲ）$\alpha > \beta$ ならば，$g^{+}(\alpha) > g^{+}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(3)} > \beta_{(3)}$

とする．

補足：Wが全順序な領域であるので，

$$g^{+}(0) < g^{+}(1) < g^{+}(2) < \cdots < g^{+}(\omega) < \cdots$$

となり，$W_{(3)}$も全順序な領域である．

（5）定義A-4

$W_{(4)}$の元に大小関係を導入する．$\alpha \in W$に対して，$\alpha_{(4)} \in W_{(4)}$が対応する１対１写像をg^{-}で表す．すなわち，

$$g^{-} : \alpha \to \alpha_{(4)}$$

とする．ここで，α，$\beta \in W$において，

（ⅰ）$\alpha < \beta$ ならば，$g^{-}(\alpha) > g^{-}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(4)} > \beta_{(4)}$.

（ⅱ）$\alpha = \beta$ ならば，$g^{-}(\alpha) = g^{-}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(4)} = \beta_{(4)}$.

（ⅲ）$\alpha > \beta$ ならば，$g^{-}(\alpha) < g^{-}(\beta)$，すなわち，$\alpha_{(4)} < \beta_{(4)}$

とする．

補足：Wが全順序な領域であるので，

$$\cdots < g^{-}(\omega) < \cdots < g^{-}(2) < g^{-}(1) < g^{-}(0)$$

となり，$W_{(4)}$も全順序な領域である．

（６） 定義A-5

$0 \in R$として，領域$\Pi = W_{(2)} \cup \{0\} \cup W_{(1)}$の元に大小関係を導入する．$a$，$b \in \Pi$とするとき，

（ｉ） a，$b \in W_{(1)}$で，$W_{(1)}$において$a < b$ならば，Πにおいても$a < b$．
a，$b \in W_{(1)}$で，$W_{(1)}$において$a = b$ならば，Πにおいても$a = b$．
a，$b \in W_{(1)}$で，$W_{(1)}$において$a > b$ならば，Πにおいても$a > b$．

（ii） a，$b \in W_{(2)}$で，$W_{(2)}$において$a < b$ならば，Πにおいても$a < b$．
a，$b \in W_{(2)}$で，$W_{(2)}$において$a = b$ならば，Πにおいても$a = b$．
a，$b \in W_{(2)}$で，$W_{(2)}$において$a > b$ならば，Πにおいても$a > b$．

（iii） $a \in W_{(1)}$，$b \in W_{(2)}$ならば，$b < a$．

（iv） $a = 0$，$b \in W_{(1)}$ならば，$a < b$．
$a = 0$，$b \in W_{(2)}$ならば，$b < a$．
$a = 0$，$b = 0$ならば，$a = b$

とする．

補足：$W_{(2)}$，$\{0\}$，$W_{(1)}$が，それぞれ，全順序な領域であるので，$\alpha < \beta$とすれば，

$$f^-(0) < f^-(1) < f^-(2) < \cdots < f^-(\alpha) < \cdots < f^-(\beta) < \cdots < 0$$
$$< \cdots < f^+(\beta) < \cdots < f^+(\alpha) < \cdots < f^+(2) < f^+(1) < f^+(0)$$

となり，Πも全順序な領域である．

（７） 定義A-6

$a \in \Pi$の符号は，$a \in W_{(1)}$ならば正，$a \in W_{(2)}$ならば負，$a = 0$ならば零とする．

（８） 定義A-7

$a \in \Pi$のとき，記号$-a$の意味を，次のように定める．

（ｉ） $a = f^+(\alpha)$ならば，$-a = f^-(\alpha)$．
（ii） $a = f^-(\alpha)$ならば，$-a = f^+(\alpha)$．
（iii） $a = 0$ならば，$-a = 0$．

（９） 定義A-8

領域$\{t : f^-(\alpha) \leqq t \leqq f^+(\alpha),\ t \in \Pi\}$を，$\Pi_\alpha$で表す．

補足：$\Pi_0 = \Pi$．

（10） 定義A-9

$a \in \Pi$，$a \neq 0$ならば，「$a = f^+(\alpha)$ または $a = f^-(\alpha)$」となる順序数αが一意に存在する．このαを，aのレベルといい，$\ell(a)$で表す．$\ell(a) = \alpha$であることをa_αで表すこともある．

(11) 定義A-10

$a \in \Pi$の絶対値$|a|$を，次のように定める．

（ⅰ） $a=0$ならば，$|a|=0$．

（ⅱ） $\ell(a)=\alpha$ならば，$|a|=f^{+}(\alpha)$．

(12) 定義A-11

$a,\ b \in \Pi$のとき，絶対値の小さくない方を，$A_{max}\{a,\ b\}$で表す．すなわち，

（ⅰ） 「$a \neq 0,\ b=0$」または「$\ell(a) \leqq \ell(b)$」ならば，$A_{max}\{a,\ b\}=a$．

（ⅱ） 「$a=0,\ b \neq 0$」または「$\ell(a) \geqq \ell(b)$」ならば，$A_{max}\{a,\ b\}=b$．

（ⅲ） 「$a=0,\ b=0$」ならば，$A_{max}\{a,\ b\}=0$

とする．

(13) 定義A-12

$a,\ b \in \Pi$において，次の加法を定義する．

$$a+b=\begin{cases} A_{max}\{a,\ b\} & (a \neq -b), \\ \Pi_{\alpha} & (a=-b,\ \ell(a)=\alpha), \\ 0 & (a=b=0). \end{cases}$$

(14) 定義A-13（演算及び大小関係に関する規則）

Dが全順序な領域で，Dの空でない部分領域すべての族を$U(D)$で表すとき，

（ⅰ） 演算

$a,\ b \in D$において，演算$*$が，$a*b \in U(D)$となるように定義されているならば，

$A,\ B \in U(D)$に対して，$A*B=\bigcup_{a \in A,\ b \in B}(a*b)$

とする．

（ⅱ） 大小関係

$A,\ B \in U(D)$において，

$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a<b$ならば，$A<B$．

$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leqq b$ならば，$A \leqq B$

とする．

ただし，（ⅰ），（ⅱ）において，$a \in D$とするとき，Dの部分領域$\{a\}$とaを区別しないものとする．

(15) 定義A-14

定義A-13の$U(D)$において，領域Dに属する元を定数，領域$U(D)-D$に属する元を不定数という．

補足：拡大実数の演算は，定義A-12のように，その結果が不定数になる場合があるので，その扱い方を事前に定めておかなくてはならない．定義A-13と定義A-14は，そのために必要な定義である．

(16) 定理A-1

Πにおける加法については，次の公式が成り立つ．

(ｉ) 交換法則が成り立つ．

$$(\mathrm{ii})\quad f^{+}(\alpha)+b=\begin{cases} f^{+}(\alpha) & (f^{-}(\alpha)<b\leqq f^{+}(\alpha)),\\ \Pi_{\alpha} & (b=f^{-}(\alpha)),\\ b & (b<f^{-}(\alpha)\ \text{または}\ f^{+}(\alpha)<b). \end{cases}$$

$$(\mathrm{iii})\quad f^{-}(\alpha)+b=\begin{cases} f^{-}(\alpha) & (f^{-}(\alpha)\leqq b<f^{+}(\alpha)),\\ \Pi_{\alpha} & (b=f^{+}(\alpha)),\\ b & (b<f^{-}(\alpha)\ \text{または}\ f^{+}(\alpha)<b). \end{cases}$$

$$(\mathrm{iv})\quad \Pi_{\alpha}+b=\begin{cases} \Pi_{\alpha} & (b\in\Pi_{\alpha}),\\ \\ b & (b\notin\Pi_{\alpha}). \end{cases}$$

(ｖ) $\Pi_{\alpha}+\Pi_{\beta}=\Pi_{\min\{\alpha,\ \beta\}}$.

証明　定義A-12，定義A-13による■

(17) 定理A-2

Πにおける加法については，結合法則が成り立つ．すなわち，a，b，c∈Πとすれば，次の式が成り立つ．

(ｉ) $(a+b)+c=a+(b+c)$.

(ⅱ) $(\Pi_{\alpha}+b)+c=\Pi_{\alpha}+(b+c)$.

(ⅲ) $(a+\Pi_{\beta})+c=a+(\Pi_{\beta}+c)$.

(ⅳ) $(a+b)+\Pi_{\gamma}=a+(b+\Pi_{\gamma})$.

(ｖ) $(\Pi_{\alpha}+\Pi_{\beta})+c=\Pi_{\alpha}+(\Pi_{\beta}+c)$.

(ⅵ) $(a+\Pi_{\beta})+\Pi_{\gamma}=a+(\Pi_{\beta}+\Pi_{\gamma})$.

(ⅶ) $(\Pi_{\alpha}+b)+\Pi_{\gamma}=\Pi_{\alpha}+(b+\Pi_{\gamma})$.

(ⅷ) $(\Pi_{\alpha}+\Pi_{\beta})+\Pi_{\gamma}=\Pi_{\alpha}+(\Pi_{\beta}+\Pi_{\gamma})$.

証明 (ｉ) a，b，cのうちの，少なくとも１つが０ならば，明らかに成り立つので，$a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$とする．

(ア) a，b，cがすべて同符号ならば，次のいずれかである．

① $a=f^{+}(\alpha)$，$b=f^{+}(\beta)$，$c=f^{+}(\gamma)$.

② $a=f^{-}(\alpha)$，$b=f^{-}(\beta)$，$c=f^{-}(\gamma)$.

そして，いずれの場合も，

$$(a+b)+c=A_{\max}\{a,\ b,\ c\}=a+(b+c)$$

を得る．

(イ) その他のときは，$\ell(a)=\alpha$，$\ell(b)=\beta$，$\ell(c)=\gamma$として，次の場合に分ける．

① $\alpha=\beta=\gamma$の場合．

② $\alpha<\beta$，γの場合．

③ $\beta<\alpha$，γの場合．

④ $\gamma<\alpha$，βの場合．

⑤ $\alpha=\beta<\gamma$の場合．

⑥ $\alpha=\gamma<\beta$ の場合.

⑦ $\beta=\gamma<\alpha$ の場合.

定理A-1より，

①の場合は，$(a+b)+c=\Pi_{\alpha}=a+(b+c)$.

②の場合は，$(a+b)+c=a=a+(b+c)$.

③の場合は，$(a+b)+c=b=a+(b+c)$.

④の場合は，$(a+b)+c=c=a+(b+c)$.

⑤の場合は，$(a+b)+c=a+b=a+(b+c)$.

⑥の場合は，$(a+b)+c=a+c=a+(b+c)$.

⑦の場合は，$(a+b)+c=b+c=a+(b+c)$.

(ⅱ) $b\in\Pi_{\alpha}$，$c\in\Pi_{\alpha}$ならば，$(\Pi_{\alpha}+b)+c=\Pi_{\alpha}=\Pi_{\alpha}+(b+c)$.

$b\notin\Pi_{\alpha}$，$c\in\Pi_{\alpha}$ならば，$(\Pi_{\alpha}+b)+c=b=\Pi_{\alpha}+(b+c)$.

$b\in\Pi_{\alpha}$，$c\notin\Pi_{\alpha}$ならば，$(\Pi_{\alpha}+b)+c=c=\Pi_{\alpha}+(b+c)$.

$b\notin\Pi_{\alpha}$，$c\notin\Pi_{\alpha}$ならば，$(\Pi_{\alpha}+b)+c=b+c=\Pi_{\alpha}+(b+c)$.

(ⅲ) $a\in\Pi_{\beta}$，$c\in\Pi_{\beta}$ならば，$(a+\Pi_{\beta})+c=\Pi_{\beta}=a+(\Pi_{\beta}+c)$

$a\notin\Pi_{\beta}$，$c\in\Pi_{\beta}$ならば，$(a+\Pi_{\beta})+c=a=a+(\Pi_{\beta}+c)$.

$a\in\Pi_{\beta}$，$c\notin\Pi_{\beta}$ならば，$(a+\Pi_{\beta})+c=c=a+(\Pi_{\beta}+c)$.

$a\notin\Pi_{\beta}$，$c\notin\Pi_{\beta}$ならば，$(a+\Pi_{\beta})+c=a+c=a+(\Pi_{\beta}+c)$.

(ⅳ) $a\in\Pi_{\gamma}$，$b\in\Pi_{\gamma}$ならば，$(a+b)+\Pi_{\gamma}=\Pi_{\gamma}=a+(b+\Pi_{\gamma})$.

$a\notin\Pi_{\gamma}$，$b\in\Pi_{\gamma}$ならば，$(a+b)+\Pi_{\gamma}=a=a+(b+\Pi_{\gamma})$.

$a\in\Pi_{\gamma}$，$b\notin\Pi_{\gamma}$ならば，$(a+b)+\Pi_{\gamma}=b=a+(b+\Pi_{\gamma})$.

$a\notin\Pi_{\gamma}$，$b\notin\Pi_{\gamma}$ならば，$(a+b)+\Pi_{\gamma}=a+b=a+(b+\Pi_{\gamma})$.

(ⅴ) $c\in\Pi_{\min\{\alpha,\beta\}}$ならば，$(\Pi_{\alpha}+\Pi_{\beta})+c=\Pi_{\min\{\alpha,\beta\}}=\Pi_{\alpha}+(\Pi_{\beta}+c)$.

$c\notin\Pi_{\min\{\alpha,\beta\}}$ならば，$(\Pi_{\alpha}+\Pi_{\beta})+c=c=\Pi_{\alpha}+(\Pi_{\beta}+c)$.

(ⅵ) $a\in\Pi_{\min\{\beta,\gamma\}}$ならば，$(a+\Pi_{\beta})+\Pi_{\gamma}=\Pi_{\min\{\beta,\gamma\}}=a+(\Pi_{\beta}+\Pi_{\gamma})$.

$a\notin\Pi_{\min\{\beta,\gamma\}}$ならば，$(a+\Pi_{\beta})+\Pi_{\gamma}=a=a+(\Pi_{\beta}+\Pi_{\gamma})$.

(ⅶ) $b\in\Pi_{\min\{\alpha,\gamma\}}$ならば，$(\Pi_{\alpha}+b)+\Pi_{\gamma}=\Pi_{\min\{\alpha,\gamma\}}=\Pi_{\alpha}+(b+\Pi_{\gamma})$.

$b\notin\Pi_{\min\{\alpha,\gamma\}}$ならば，$(\Pi_{\alpha}+b)+\Pi_{\gamma}=b=\Pi_{\alpha}+(b+\Pi_{\gamma})$.

(ⅷ) $(\Pi_{\alpha}+\Pi_{\beta})+\Pi_{\gamma}=\Pi_{\min\{\alpha,\beta,\gamma\}}=\Pi_{\alpha}+(\Pi_{\beta}+\Pi_{\gamma})$■

(18) 定義A-15

領域$P=W_{(4)}\cup R\cup W_{(3)}$の元に，大小関係を導入する.

a，$b\in P$とするとき，

(ⅰ) a，$b\in W_{(3)}$で，$W_{(3)}$において$a<b$ならば，Pにおいても$a<b$.

a，$b\in W_{(3)}$で，$W_{(3)}$において$a=b$ならば，Pにおいても$a=b$.

a，$b\in W_{(3)}$で，$W_{(3)}$において$a>b$ならば，Pにおいても$a>b$.

(ⅱ) a，$b\in W_{(4)}$で，$W_{(4)}$において$a<b$ならば，Pにおいても$a<b$.

a，$b\in W_{(4)}$で，$W_{(4)}$において$a=b$ならば，Pにおいても$a=b$.

a，$b\in W_{(4)}$で，$W_{(4)}$において$a>b$ならば，Pにおいても$a>b$.

（ⅲ） ａ，ｂ∈Ｒで，Ｒにおいてａ＜ｂならば，Ｐにおいてもａ＜ｂ．

ａ，ｂ∈Ｒで，Ｒにおいてａ＝ｂならば，Ｐにおいてもａ＝ｂ．

ａ，ｂ∈Ｒで，Ｒにおいてａ＞ｂならば，Ｐにおいてもａ＞ｂ．

（ⅳ） $a \in W_{(3)}$，$b \in R$ならば，$b < a$．

（ⅴ） $a \in W_{(4)}$，$b \in R$ならば，$a < b$．

（ⅵ） $a \in W_{(3)}$，$b \in W_{(4)}$ならば，$b < a$．

補足：$W_{(4)}$，Ｒ，$W_{(3)}$が，それぞれ，全順序な領域であるので，$\alpha < \beta$とすれば，

$$\cdots < g^{-}(\beta) < \cdots < g^{-}(\alpha) < \cdots < g^{-}(2) < g^{-}(1) < g^{-}(0) < R$$
$$< g^{+}(0) < g^{+}(1) < g^{+}(2) < \cdots < g^{+}(\alpha) < \cdots < g^{+}(\beta) < \cdots$$

となり，Ｐも全順序な領域である．

（19） 定義A-16

$a \in P$のとき，記号$-a$の意味を，次のように定める．

（ⅰ） $a \in R$ならば，$-a$はａの反数．

（ⅱ） $a = g^{+}(\alpha)$ならば，$-a = g^{-}(\alpha)$．

（ⅲ） $a = g^{-}(\alpha)$ならば，$-a = g^{+}(\alpha)$．

（20） 定義A-17

集合$\{t : g^{-}(\alpha) \leqq t \leqq g^{+}(\alpha),\ t \in P\}$を$H_{\alpha}$で表す．

補足：$\bigcup_{\alpha \in W} H_{\alpha} = P$．

（21） 定義A-18

$a \in P$，$a \notin R$ならば，「$a = g^{+}(\alpha)$ または $a = g^{-}(\alpha)$」となる順序数αが一意に存在する．このαをａのレベルといい，$\ell(a)$で表す．$\ell(a) = \alpha$であることを，a_{α}で表すこともある．

（22） 定義A-19

$a \in P$の絶対値$|a|$を，次のように定める．

（ⅰ） $a \in R$ならば，$|a|$は従来通りの絶対値．

（ⅱ） $\ell(a) = \alpha$ならば，$|a| = g^{+}(\alpha)$．

（23） 定義A-20

ａ，$b \in P$のとき，絶対値の小さくない方を，$A_{max}\{a, b\}$で表す．

例：$\alpha < \beta$ならば，$A_{max}\{g^{+}(\alpha), g^{+}(\beta)\} = g^{+}(\beta)$．

(24) 定義A-21

$a,\ b \in P$において，次の加法を定義する．

$$a+b=\begin{cases} a+b & (a,\ b\in R),\\ A_{max}\{a,\ b\} & (a\notin R \text{ または } b\notin R \text{ で, } a\neq -b),\\ H_{\alpha} & (a\notin R \text{ または } b\notin R \text{ で, } a=-b,\ a_{\alpha}). \end{cases}$$

(25) 定理A-3

Pにおける加法については，次の公式が成り立つ．

(ⅰ) 交換法則が成り立つ．

(ⅱ) $$g^{+}(\alpha)+b=\begin{cases} g^{+}(\alpha) & (g^{-}(\alpha)<b\leqq g^{+}(\alpha)),\\ H_{\alpha} & (b=g^{-}(\alpha)),\\ b & (b<g^{-}(\alpha) \text{ または } g^{+}(\alpha)<b). \end{cases}$$

(ⅲ) $$g^{-}(\alpha)+b=\begin{cases} g^{-}(\alpha) & (g^{-}(\alpha)\leqq b<g^{+}(\alpha)),\\ H_{\alpha} & (b=g^{+}(\alpha)),\\ b & (b<g^{-}(\alpha) \text{ または } g^{+}(\alpha)<b). \end{cases}$$

(ⅳ) $$H_{\alpha}+b=\begin{cases} H_{\alpha} & (b\in H_{\alpha}),\\ b & (b\notin H_{\alpha}). \end{cases}$$

(ⅴ) $H_{\alpha}+H_{\beta}=H_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$.

証明　定義A-21，定義A-13による■

(26) 定理A-4

Pにおける加法については，結合法則が成り立つ．すなわち，$a,\ b,\ c\in P$とすれば，次の式が成り立つ．

(ⅰ) $(a+b)+c=a+(b+c)$.

(ⅱ) $(H_{\alpha}+b)+c=H_{\alpha}+(b+c)$.

(ⅲ) $(a+H_{\beta})+c=a+(H_{\beta}+c)$.

(ⅳ) $(a+b)+H_{\gamma}=a+(b+H_{\gamma})$.

(ⅴ) $(H_{\alpha}+H_{\beta})+c=H_{\alpha}+(H_{\beta}+c)$.

(ⅵ) $(a+H_{\beta})+H_{\gamma}=a+(H_{\beta}+H_{\gamma})$.

(ⅶ) $(H_{\alpha}+b)+H_{\gamma}=H_{\alpha}+(b+H_{\gamma})$.

(ⅷ) $(H_{\alpha}+H_{\beta})+H_{\gamma}=H_{\alpha}+(H_{\beta}+H_{\gamma})$.

証明　定理A-3を用いる．

(ⅰ) 次の場合に分ける．

(ア) $a\in R,\ b\in R,\ c\in R$の場合．

(イ) $a\in R,\ b\in R,\ c\notin R$の場合．

(ウ) $a\in R,\ b\notin R,\ c\in R$の場合．

(エ) $a\notin R,\ b\in R,\ c\in R$の場合．

(オ) $a\in R,\ b\notin R,\ c\notin R$の場合．

(カ) $a\notin R,\ b\in R,\ c\notin R$の場合．

（キ） $a \notin R$， $b \notin R$， $c \in R$の場合.

（ク） $a \notin R$， $b \notin R$， $c \notin R$の場合.

（ア）の場合は，Rが実数の集合であるので明らか.

（イ）の場合は，$(a+b)+c=c=a+(b+c)$.

（ウ）の場合は，$(a+b)+c=b=a+(b+c)$.

（エ）の場合は，$(a+b)+c=a=a+(b+c)$.

（オ）の場合は，$(a+b)+c=b+c=a+(b+c)$.

（カ）の場合は，$(a+b)+c=a+c=a+(b+c)$.

（キ）の場合は，$(a+b)+c=a+b=a+(b+c)$.

（ク）の場合は，$\ell(a)=\alpha$，$\ell(b)=\beta$，$\ell(c)=\gamma$として，次の場合に分ける.

① $\alpha=\beta=\gamma$の場合.

② $\alpha<\beta=\gamma$の場合.

③ $\beta<\alpha=\gamma$の場合.

④ $\gamma<\alpha=\beta$の場合.

⑤ β， $\gamma<\alpha$の場合.

⑥ α， $\gamma<\beta$の場合.

⑦ α， $\beta<\gamma$の場合.

①の場合は，a，b，cが，すべて同符号のときは両辺ともにaに等しく，その他のときは両辺ともにH_αに等しい.

②の場合は，b，cが同符号のときは両辺ともにbに等しく，その他のときは両辺ともにH_βに等しい.

③の場合は，a，cが同符号のときは両辺ともにcに等しく，その他のときは両辺ともにH_γに等しい.

④の場合は，a，bが同符号のときは両辺ともにaに等しく，その他のときは両辺ともにH_αに等しい.

⑤の場合は，両辺ともにaに等しい.

⑥の場合は，両辺ともにbに等しい.

⑦の場合は，両辺ともにcに等しい.

（ⅱ） $b \in H_\alpha$， $c \in H_\alpha$ならば，両辺ともにH_αに等しい.

$b \notin H_\alpha$， $c \in H_\alpha$ならば，両辺ともにbに等しい.

$b \in H_\alpha$， $c \notin H_\alpha$ならば，両辺ともにcに等しい.

$b \notin H_\alpha$， $c \notin H_\alpha$ならば，両辺ともに$b+c$に等しい.

（ⅲ） $a \in H_\beta$， $c \in H_\beta$ならば，両辺ともにH_βに等しい.

$a \notin H_\alpha$， $c \in H_\alpha$ならば，両辺ともにaに等しい.

$a \in H_\alpha$， $c \notin H_\alpha$ならば，両辺ともにcに等しい.

$a \notin H_\alpha$， $c \notin H_\alpha$ならば，両辺ともに$a+c$に等しい.

（ⅳ） $a \in H_\gamma$， $b \in H_\gamma$ならば，両辺ともにH_γに等しい.

$a \notin H_\alpha$， $b \in H_\alpha$ならば，両辺ともにaに等しい.

$a \in H_\alpha$， $b \notin H_\alpha$ならば，両辺ともにbに等しい.

$a \notin H_\alpha$， $b \notin H_\alpha$ならば，両辺ともに$a+b$に等しい.

（ｖ） $c \in H_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$ならば，両辺ともに$H_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$に等しい．

$c \notin H_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$ならば，両辺ともにｃに等しい．

（ⅵ） $a \in H_{\max\{\beta,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともに$H_{\max\{\beta,\ \gamma\}}$に等しい．

$a \notin H_{\max\{\beta,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともにａに等しい．

（ⅶ） $b \in H_{\max\{\alpha,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともに$H_{\max\{\alpha,\ \gamma\}}$に等しい．

$b \notin H_{\max\{\alpha,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともにｂに等しい．

（ⅷ） 両辺ともに$H_{\max\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}}$に等しい■

(27) 定義A-22（拡大実数）

「$a \in P$，$b \in \Pi$」とするとき，条件：

「$a \in R$，$b \in \Pi$」または「$a \in P$，$a \notin R$，$b = 0$」

を満たす順序対$(a,\ b)$の領域：

$$\{(a,\ b) : a \in R,\ b \in \Pi\} \cup \{(a,\ b) : a \in P,\ a \notin R,\ b = 0\}$$

をＤで表し，Ｄの元を拡大実数という．

(28) 定義A-23

領域Ｄの元に大小関係を導入する．$x = (a,\ b) \in D$，$y = (c,\ d) \in D$として，

（ｉ）「$a = c$，$b = d$」のとき，$x = y$．

（ⅱ）「$a < c$ または『$a = c$，$b < d$』」のとき，$x < y$

とする．

補足：領域Ｐ，Πが，それぞれ，全順序な領域であるので，Ｄも全順序な領域である．

(29) 定義A-24

$x = (a,\ b) \in D$ならば，$-x = (-a,\ -b)$とする．

(30) 定義A-25

（ｉ） $x \in D$が，$(0,\ 0) < x$ならば正の数，$x < (0,\ 0)$ならば負の数とする．

（ⅱ） Ｄにおける，正の数すべての領域をD^{+}で表し，負の数すべての領域をD^{-}で表す．

(31) 定義A-26

領域$\{t : (g^{-}(\alpha),\ 0) \leqq t \leqq (g^{+}(\alpha),\ 0),\ t \in D\}$を$\Theta_{\alpha}$で表す．

補足：$\bigcup_{\alpha \in W} \Theta_{\alpha} = D$．

(32) 定義A-27

$x \in D$の絶対値$|x|$を，次のように定める．

$$|x| = \begin{cases} x & ((0,\ 0) \leqq x), \\ -x & (x < (0,\ 0)). \end{cases}$$

(33) 定義A-28

$x \in D$を，次のように分類する．

（ⅰ） $0 < |x| \leqq (0,\ f^{+}(0))$のとき，無限小という．

（ⅱ） 「$(0,\ f^{+}(0)) < |x| < (g^{+}(0),\ 0)$」または $x = (0,\ 0)$ のとき，有限という．

（ⅲ） $(g^{+}(0),\ 0) \leqq |x|$のとき，無限大という．

（ⅳ） 無限小と有限を合わせて，有界という．

(34) 定義A-29

$x = (a,\ b) \in D$，$y = (c,\ d) \in D$において，次の加法を定義する．

$$x + y = \begin{cases} \{(a + c,\ t) : t \in b + d\} & (a \in R,\ c \in R), \\ A_{max}\{x,\ y\} & (a \notin R \text{ または } c \notin R \text{ で，} x \neq -y), \\ \Theta_{\alpha} & (a \notin R \text{ または } c \notin R \text{ で，} x = -y,\ a_{\alpha}). \end{cases}$$

例：$x = (1,\ f^{+}(0))$，$y = (2,\ f^{-}(1))$とすれば，

$$x + y = (1 + 2,\ f^{+}(0) + f^{-}(1)) = (3,\ f^{+}(0)).$$

例：$x = (1,\ f^{+}(0))$，$y = (2,\ f^{-}(0))$とすれば，

$$x + y = (1 + 2,\ f^{+}(0) + f^{-}(0)) = (3,\ \Pi_{0}) = \{(3,\ t) : t \in \Pi_{0}\}.$$

例：$x = (g^{+}(0),\ 0)$，$y = (1,\ f^{+}(0))$とすれば，$x + y = A_{max}\{x,\ y\} = x$．

例：$x = (g^{+}(1),\ 0)$，$y = (g^{-}(1),\ 0)$とすれば，$x + y = \Theta_{1}$．

(35) 約束

表記を簡潔にするために，Dの元を表す記号を，次のように簡略化して，必要に応じて用いる．

（ⅰ） $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$は，それぞれ，a，bと同一視する．

（ⅱ） $g^{+}(\alpha)$，$g^{-}(\alpha)$を，それぞれ，∞_{α}，$-\infty_{\alpha}$で表す．

（ⅲ） $f^{+}(\alpha)$，$f^{-}(\alpha)$を，それぞれ，$1/\infty_{\alpha}$，$-1/\infty_{\alpha}$で表す．

例：（ⅰ） $(0,\ 0)$を，0で表す．

（ⅱ） $(g^{+}(\alpha),\ 0)$を，∞_{α}で表す．

（ⅲ） $(0,\ f^{-}(\alpha))$を，$-1/\infty_{\alpha}$で表す．

(36) 定理A-5

Dの元$(a,\ b)$は，簡略記号を用いれば，$a + b$で表すことができる．

証明　$a \in R$ならば，$(a,\ b) = (a,\ 0) + (0,\ b) = a + b$．

$a \notin R$ならば，$b = 0$．したがって，

$$(a,\ b) = (a,\ 0) = a = A_{max}\{a,\ 0\} = a + 0 = a + b \ ■$$

(37) 定理A-6

Dにおける加法については，次の公式が成り立つ．

（ｉ）交換法則が成り立つ．

（ii）有界すべての領域を$\mathfrak{D}=\{(a,\ b):a\in R,\ b\in \Pi\}$で表せば，

（ii－ア）$x\in\mathfrak{D}$ならば，$\mathfrak{D}+x=\mathfrak{D}$.

（ii－イ）$\mathfrak{D}+\mathfrak{D}=\mathfrak{D}$.

$$(\text{iii})\ \infty_\alpha+y=\begin{cases}\infty_\alpha & (-\infty_\alpha<y\leqq\infty_\alpha),\\ \Theta_\alpha & (y=-\infty_\alpha),\\ y & (y<-\infty_\alpha\ \text{または}\ \infty_\alpha<y).\end{cases}$$

$$(\text{iv})\ -\infty_\alpha+y=\begin{cases}-\infty_\alpha & (-\infty_\alpha\leqq y<\infty_\alpha),\\ \Theta_\alpha & (y=\infty_\alpha),\\ y & (y<-\infty_\alpha\ \text{または}\ \infty_\alpha<y).\end{cases}$$

$$(\text{v})\ \Theta_\alpha+y=\begin{cases}\Theta_\alpha & (y\in\Theta_\alpha),\\ \\ y & (y\notin\Theta_\alpha).\end{cases}$$

（vi）$\Theta_\alpha+\Theta_\beta=\Theta_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$.

証明（ｉ）は明らか．

（ii）（ii－ア）は，$x=(c,\ d)$とすれば，$c\in R$，$d\in\Pi$であり，$R+c=R$，$\Pi+d=\Pi$であるので成り立つ．(ii－イ)は(ii－ア)による．

（iii）$-\infty_\alpha<y\leqq\infty_\alpha$ならば，$\infty_\alpha\neq-y$であるので，$\infty_\alpha+y=A_{\max}\{\infty_\alpha,\ y\}=\infty_\alpha$.

$y=-\infty_\alpha$ならば，$\infty_\alpha=-y$であるので，$\infty_\alpha+y=\Theta_\alpha$.

$y<-\infty_\alpha$ または $\infty_\alpha<y$ならば，$\infty_\alpha\neq-y$であるので，

$$\infty_\alpha+y=A_{\max}\{\infty_\alpha,\ y\}=y.$$

（iv）$-\infty_\alpha\leqq y<\infty_\alpha$ならば，$-\infty_\alpha\neq-y$であるので，

$$-\infty_\alpha+y=A_{\max}\{-\infty_\alpha,\ y\}=-\infty_\alpha.$$

$y=\infty_\alpha$ならば，$-\infty_\alpha=-y$であるので，$-\infty_\alpha+y=\Theta_\alpha$.

$y<-\infty_\alpha$ または $\infty_\alpha<y$ならば，$-\infty_\alpha\neq-y$であるので，

$$-\infty_\alpha+y=A_{\max}\{-\infty_\alpha,\ y\}=y.$$

（ｖ）は，(iii)と(iv)による．

（vi）は，(ｖ)による■

(38) 定理A-7

Dにおける加法については，結合法則が成り立つ．すなわち，$x,\ y,\ z\in D$とすれば，次の式が成り立つ．

（ｉ）$(x+y)+z=x+(y+z)$.

（ii）$(\Theta_\alpha+y)+z=\Theta_\alpha+(y+z)$.

（iii）$(x+\Theta_\beta)+z=x+(\Theta_\beta+z)$.

（iv）$(x+y)+\Theta_\gamma=x+(y+\Theta_\gamma)$.

（ｖ）$(\Theta_\alpha+\Theta_\beta)+z=\Theta_\alpha+(\Theta_\beta+z)$.

（vi）$(x+\Theta_\beta)+\Theta_\gamma=x+(\Theta_\beta+\Theta_\gamma)$.

（ⅶ）$(\Theta_\alpha + y) + \Theta_\gamma = \Theta_\alpha + (y + \Theta_\gamma)$.

（ⅷ）$(\Theta_\alpha + \Theta_\beta) + \Theta_\gamma = \Theta_\alpha + (\Theta_\beta + \Theta_\gamma)$.

証明（ｉ）$x = (a, b)$，$y = (c, d)$，$z = (e, f)$として，次の場合に分ける．

（ア）$x \in \mathfrak{D}$，$y \in \mathfrak{D}$，$z \in \mathfrak{D}$の場合．

（イ）$x \in \mathfrak{D}$，$y \in \mathfrak{D}$，$z \notin \mathfrak{D}$の場合．

（ウ）$x \in \mathfrak{D}$，$y \notin \mathfrak{D}$，$z \in \mathfrak{D}$の場合．

（エ）$x \notin \mathfrak{D}$，$y \in \mathfrak{D}$，$z \in \mathfrak{D}$の場合．

（オ）$x \in \mathfrak{D}$，$y \notin \mathfrak{D}$，$z \notin \mathfrak{D}$の場合．

（カ）$x \notin \mathfrak{D}$，$y \in \mathfrak{D}$，$z \notin \mathfrak{D}$の場合．

（キ）$x \notin \mathfrak{D}$，$y \notin \mathfrak{D}$，$z \in \mathfrak{D}$の場合．

（ク）$x \notin \mathfrak{D}$，$y \notin \mathfrak{D}$，$z \notin \mathfrak{D}$の場合．

（ア）の場合は，a，c，eはRの元より加法の結合法則が成り立ち，b，d，fはΠの元であるので，定理A-2より，加法の結合法則が成り立つ．したがって，

$$
\begin{aligned}
(x + y) + z &= \{(a + c,\ t) : t \in b + d\} + (e,\ f) \\
&= \{((a + c) + e,\ t) : t \in (b + d) + f\} \\
&= \{(a + (c + e),\ t) : t \in b + (d + f)\} \\
&= (a,\ b) + \{(c + e,\ t) : t \in d + f\} \\
&= x + (y + z).
\end{aligned}
$$

（イ）の場合は，$(x + y) + z = z = x + (y + z)$.

（ウ）の場合は，$(x + y) + z = y = x + (y + z)$.

（エ）の場合は，$(x + y) + z = x = x + (y + z)$.

（オ）の場合は，$(x + y) + z = y + z = x + (y + z)$.

（カ）の場合は，$(x + y) + z = x + z = x + (y + z)$.

（キ）の場合は，$(x + y) + z = x + y = x + (y + z)$.

（ク）の場合は，$\ell(x) = \alpha$，$\ell(y) = \beta$，$\ell(z) = \gamma$として，次の場合に分ける．

① $\alpha = \beta = \gamma$の場合．

② $\alpha < \beta = \gamma$の場合．

③ $\beta < \alpha = \gamma$の場合．

④ $\gamma < \alpha = \beta$の場合．

⑤ β，$\gamma < \alpha$の場合．

⑥ α，$\gamma < \beta$の場合．

⑦ α，$\beta < \gamma$の場合．

①の場合は，x，y，zが，すべて同符号のときは両辺ともにxに等しく，その他のときは両辺ともにΘ_αに等しい．

②の場合は，y，zが同符号のときは両辺ともにyに等しく，その他のときは両辺ともにΘ_βに等しい．

③の場合は，x，zが同符号のときは両辺ともにzに等しく，その他のときは両辺ともにΘ_γに等しい．

④の場合は，x，yが同符号のときは両辺ともにxに等しく，その他のときは両辺ともにΘ_αに等しい．

⑤の場合は，両辺ともにxに等しい．

⑥の場合は，両辺ともにyに等しい．

⑦の場合は，両辺ともにzに等しい。．

（ⅱ） $y \in \Theta_{\alpha}$， $z \in \Theta_{\alpha}$ならば，両辺ともにΘ_{α}に等しい．

$y \notin \Theta_{\alpha}$， $z \in \Theta_{\alpha}$ならば，両辺ともにyに等しい．

$y \in \Theta_{\alpha}$， $z \notin \Theta_{\alpha}$ならば，両辺ともにzに等しい．

$y \notin \Theta_{\alpha}$， $z \notin \Theta_{\alpha}$ならば，両辺ともに$y+z$に等しい．

（ⅲ） $x \in \Theta_{\beta}$， $z \in \Theta_{\beta}$ならば，両辺ともにΘ_{β}に等しい．

$x \notin \Theta_{\alpha}$， $z \in \Theta_{\alpha}$ならば，両辺ともにxに等しい．

$x \in \Theta_{\alpha}$， $z \notin \Theta_{\alpha}$ならば，両辺ともにzに等しい．

$x \notin \Theta_{\alpha}$， $z \notin \Theta_{\alpha}$ならば，両辺ともに$x+z$に等しい．

（ⅳ） $x \in \Theta_{\gamma}$， $y \in \Theta_{\gamma}$ならば，両辺ともにΘ_{γ}に等しい．

$x \notin \Theta_{\alpha}$， $y \in \Theta_{\alpha}$ならば，両辺ともにxに等しい．

$x \in \Theta_{\alpha}$， $y \notin \Theta_{\alpha}$ならば，両辺ともにyに等しい．

$x \notin \Theta_{\alpha}$， $y \notin \Theta_{\alpha}$ならば，両辺ともに$x+y$に等しい．

（ⅴ） $z \in \Theta_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$ならば，両辺ともに$\Theta_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$に等しい．

$z \notin \Theta_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$ならば，両辺ともに$z$に等しい．

（ⅵ） $x \in \Theta_{\max\{\beta,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともに$\Theta_{\max\{\beta,\ \gamma\}}$に等しい．

$x \notin \Theta_{\max\{\beta,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともに$x$に等しい．

（ⅶ） $y \in \Theta_{\max\{\alpha,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともに$\Theta_{\max\{\alpha,\ \gamma\}}$に等しい．

$y \notin \Theta_{\max\{\alpha,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともに$y$に等しい．

（ⅷ） 両辺ともに$\Theta_{\max\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}}$に等しい■

（39） 定義A-30

x，$y \in D$において，xとyのレベルがともに存在するときは，そのレベルの小さくない方を，また，片方だけレベルが存在するときは，そのレベルが存在する方を，$\ell_{\max}\{x,\ y\}$で表す．なお，レベルがともに存在しないときの$\ell_{\max}\{x,\ y\}$は定義しないものとする．

（40） 定義A-31

$x \in D$，$x \neq 0$に対して，記号x^{-1}の意味を，次のように定める．

$x = \infty_{\alpha}$ ならば，$x^{-1} = 1/\infty_{\alpha}$．

$x = -\infty_{\alpha}$ ならば，$x^{-1} = -1/\infty_{\alpha}$．

$x = 1/\infty_{\alpha}$ ならば，$x^{-1} = \infty_{\alpha}$．

$x = -1/\infty_{\alpha}$ ならば，$x^{-1} = -\infty_{\alpha}$．

$x = (a,\ b)$，$a \in R$，$a \neq 0$ならば，$x^{-1} = (a^{-1},\ -b)$．

（41） 定義A-32

（ⅰ） 領域$\{t : 1/\infty_{\alpha} \leqq t \leqq \infty_{\alpha}\}$を，$\Sigma_{\alpha}$で表す．

（ⅱ） 領域$\{t : -\infty_{\alpha} \leqq t \leqq -1/\infty_{\alpha}\}$を，$-\Sigma_{\alpha}$で表す．

補足：　$R^+=\{x : 0<x,\ x\in R\}$.

$R^-=\{x : x<0,\ x\in R\}$.

$\mathcal{D}^+=\{(a,\ b) : a\in R^+,\ b\in \Pi\}$.

$\mathcal{D}^-=\{(a,\ b) : a\in R^-,\ b\in \Pi\}$

とすれば，次の式が成り立つ.

$$\Sigma_\alpha=\{1/\infty_\mu : 0\leqq\mu\leqq\alpha\}\cup\mathcal{D}^+\cup\{\infty_\mu : 0\leqq\mu\leqq\alpha\}.$$

$$-\Sigma_\alpha=\{-\infty_\mu : 0\leqq\mu\leqq\alpha\}\cup\mathcal{D}^-\cup\{-1/\infty_\mu : 0\leqq\mu\leqq\alpha\}.$$

(42) 定義A-33

Dにおいて，次の乗法を定義する.

$x=(a,\ b)>(0,\ 0)$，$y=(c,\ d)>(0,\ 0)$とすれば，

$$(\mathrm{i})\quad xy=\begin{cases}\{(ac,\ t) : t\in b+d\} & (a\in R^+,\ c\in R^+),\\ \ell_{\max}\{x,\ y\} & (\ell(x)\text{または}\ell(y)\text{が存在し，}x\neq y^{-1}),\\ \Sigma_\alpha & (\ell(x)\text{または}\ell(y)\text{が存在し，}x=y^{-1},\ x_\alpha).\end{cases}$$

(ⅱ)　$(-x)(-y)=xy$,　$(-x)y=x(-y)=-(xy)$.

(ⅲ)　$^\forall z\in D$, $z(0,\ 0)=(0,\ 0)z=(0,\ 0)$.

例：$x=(1,\ f^+(0))$，$y=(2,\ f^-(1))$とすれば，

$$xy=(1\cdot 2,\ f^+(0)+f^-(1))=(2,\ f^+(0)).$$

例：$x=(1,\ f^+(0))$，$y=(2,\ f^-(0))$とすれば，

$$xy=(1\cdot 2,\ f^+(0)+f^-(0))=(2,\ \Pi_0)=\{(2,\ t) : t\in\Pi_0\}.$$

例：$x=(g^+(0),\ 0)$，$y=(1,\ f^+(0))$とすれば，

$$xy=\ell_{\max}\{x,\ y\}=x.$$

例：$x=(g^+(1),\ 0)$，$y=(0,\ f^+(1))$とすれば，

$$xy=\Sigma_1.$$

(43) 定理A-8

Dにおける乗法については，$y>(0,\ 0)$とするとき，次の公式が成り立つ.

(ⅰ) 交換法則が成り立つ.

$$(\mathrm{ii})\ (g^+(\alpha),\ 0)y=\begin{cases}(g^+(\alpha),\ 0) & ((0,\ f^+(\alpha))<y\leqq(g^+(\alpha),\ 0)),\\ \Sigma_\alpha & (y=(0,\ f^+(\alpha))),\\ y & (y<(0,\ f^+(\alpha))\ \text{または}\ (g^+(\alpha),\ 0)<y).\end{cases}$$

$$(\mathrm{iii})\ (0,\ f^+(\alpha))y=\begin{cases}(0,\ f^+(\alpha)) & ((0,\ f^+(\alpha))\leqq y<(g^+(\alpha),\ 0)),\\ \Sigma_\alpha & (y=(g^+(\alpha),\ 0)),\\ y & (y<(0,\ f^+(\alpha))\ \text{または}\ (g^+(\alpha),\ 0)<y).\end{cases}$$

$$(\mathrm{iv})\ \Sigma_\alpha y=\begin{cases}\Sigma_\alpha & (y\in\Sigma_\alpha),\\ y & (y\notin\Sigma_\alpha).\end{cases}$$

(ⅴ) $\Sigma_\alpha\Sigma_\beta=\Sigma_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$.

証明　定義A-33，定義A-13による■

（44） 定理A-9

D^+における乗法については，結合法則が成り立つ．すなわち，$x, y, z \in D^+$とすれば，次の式が成り立つ．

（ⅰ） $(xy)z = x(yz)$.

（ⅱ） $(\Sigma_\alpha y)z = \Sigma_\alpha(yz)$.

（ⅲ） $(x\Sigma_\beta)z = x(\Sigma_\beta z)$.

（ⅳ） $(xy)\Sigma_\gamma = x(y\Sigma_\gamma)$.

（ⅴ） $(\Sigma_\alpha\Sigma_\beta)z = \Sigma_\alpha(\Sigma_\beta z)$.

（ⅵ） $(x\Sigma_\beta)\Sigma_\gamma = x(\Sigma_\beta\Sigma_\gamma)$.

（ⅶ） $(\Sigma_\alpha y)\Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha(y\Sigma_\gamma)$.

（ⅷ） $(\Sigma_\alpha\Sigma_\beta)\Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha(\Sigma_\beta\Sigma_\gamma)$.

証明（ⅰ） $x=(a, b)$， $y=(c, d)$， $z=(e, f)$として，次の場合に分ける．

（ア） $a \in R^+$， $c \in R^+$， $e \in R^+$の場合．

（イ） $a \in R^+$， $c \in R^+$， $e \notin R^+$の場合．

（ウ） $a \in R^+$， $c \notin R^+$， $e \in R^+$の場合．

（エ） $a \notin R^+$， $c \in R^+$， $e \in R^+$の場合．

（オ） $a \in R^+$， $c \notin R^+$， $e \notin R^+$の場合．

（カ） $a \notin R^+$， $c \in R^+$， $e \notin R^+$の場合．

（キ） $a \notin R^+$， $c \notin R^+$， $e \in R^+$の場合．

（ク） $a \notin R^+$， $c \notin R^+$， $e \notin R^+$の場合．

（ア）の場合は，a, c, eはR^+の元より乗法の結合法則が成り立ち，b, d, fはΠの元であるので，定理A-2より，加法の結合法則が成り立つ．したがって，

$$
\begin{aligned}
(xy)z &= \{(ac, t) : t \in b+d\}(e, f) \\
&= \{((ac)e, t) : t \in (b+d)+f\} \\
&= \{(a(ce), t) : t \in b+(d+f)\} \\
&= (a, b)\{(ce, t) : t \in d+f\} \\
&= x(yz).
\end{aligned}
$$

（イ）の場合は，$(xy)z = z = x(yz)$.

（ウ）の場合は，$(xy)z = y = x(yz)$.

（エ）の場合は，$(xy)z = x = x(yz)$.

（オ）の場合は，$(xy)z = yz = x(yz)$.

（カ）の場合は，$(xy)z = xz = x(yz)$.

（キ）の場合は，$(xy)z = xy = x(yz)$.

（ク）の場合は，$\ell(x)=\alpha$，$\ell(y)=\beta$，$\ell(z)=\gamma$として，次の場合に分ける．

① $\alpha=\beta=\gamma$の場合．

② $\alpha<\beta=\gamma$の場合．

③ $\beta<\alpha=\gamma$の場合．

④ $\gamma<\alpha=\beta$の場合．

⑤ $\beta, \gamma<\alpha$の場合．

⑥ $\alpha, \gamma<\beta$の場合．

⑦　α，$\beta<\gamma$の場合．

①の場合は，$x=y=z=(g^{+}(\alpha),\ 0)$または$x=y=z=(0,\ f^{+}(\alpha))$のときは両辺ともに$x$に等しく，その他のときは両辺ともに$\Sigma_{\alpha}$に等しい．

②の場合は，$y=z=(g^{+}(\beta),\ 0)$または$y=z=(0,\ f^{+}(\beta))$のときは両辺ともにyに等しく，その他のときは両辺ともにΣ_{β}に等しい．

③の場合は，$x=z=(g^{+}(\gamma),\ 0)$または$x=z=(0,\ f^{+}(\gamma))$のときは両辺ともにzに等しく，その他のときは両辺ともにΣ_{γ}に等しい．

④の場合は，$x=y=(g^{+}(\alpha),\ 0)$または$x=y=(0,\ f^{+}(\alpha))$のときは両辺ともにxに等しく，その他のときは両辺ともにΣ_{α}に等しい．

⑤の場合は，両辺ともにxに等しい．

⑥の場合は，両辺ともにyに等しい．

⑦の場合は，両辺ともにzに等しい．

（ⅱ）$y\in\Sigma_{\alpha}$，$z\in\Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにΣ_{α}に等しい．
　$y\notin\Sigma_{\alpha}$，$z\in\Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにyに等しい．
　$y\in\Sigma_{\alpha}$，$z\notin\Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにzに等しい．
　$y\notin\Sigma_{\alpha}$，$z\notin\Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにyzに等しい．

（ⅲ）$x\in\Sigma_{\beta}$，$z\in\Sigma_{\beta}$ならば，両辺ともにΣ_{β}に等しい．
　$x\notin\Sigma_{\alpha}$，$z\in\Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにxに等しい．
　$x\in\Sigma_{\alpha}$，$z\notin\Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにzに等しい．
　$x\notin\Sigma_{\alpha}$，$z\notin\Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにxzに等しい．

（ⅳ）$x\in\Sigma_{\gamma}$，$y\in\Sigma_{\gamma}$ならば，両辺ともにΣ_{γ}に等しい．
　$x\notin\Sigma_{\alpha}$，$y\in\Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにxに等しい．
　$x\in\Sigma_{\alpha}$，$y\notin\Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにyに等しい．
　$x\notin\Sigma_{\alpha}$，$y\notin\Sigma_{\alpha}$ならば，両辺ともにxyに等しい．

（ⅴ）$z\in\Sigma_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$ならば，両辺ともに$\Sigma_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$に等しい．
　$z\notin\Sigma_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$ならば，両辺ともに$z$に等しい．

（ⅵ）$x\in\Sigma_{\max\{\beta,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともに$\Sigma_{\max\{\beta,\ \gamma\}}$に等しい．
　$x\notin\Sigma_{\max\{\beta,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともに$x$に等しい．

（ⅶ）$y\in\Sigma_{\max\{\alpha,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともに$\Sigma_{\max\{\alpha,\ \gamma\}}$に等しい．
　$y\notin\Sigma_{\max\{\alpha,\ \gamma\}}$ならば，両辺ともに$y$に等しい．

（ⅷ）両辺ともに$\Sigma_{\max\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}}$に等しい■

補足：分配法則については，本編の第５章$\boxed{11}$ ～ $\boxed{15}$と同じことがいえる．

ただし，本編は，次のように簡略化された記号で記述されているので，混乱しないように注意が必要である．

$$g^{+}(\alpha) \to \infty_{\alpha}$$
$$g^{-}(\alpha) \to -\infty_{\alpha}$$
$$f^{+}(\alpha) \to 1/\infty_{\alpha}$$
$$f^{-}(\alpha) \to -1/\infty_{\alpha}$$

また，

$$(g^{+}(\alpha),\ 0) \to \infty_{\alpha}$$
$$(g^{-}(\alpha),\ 0) \to -\infty_{\alpha}$$
$$(0,\ f^{+}(\alpha)) \to 1/\infty_{\alpha}$$
$$(0,\ f^{-}(\alpha)) \to -1/\infty_{\alpha}$$

補足：累乗については，初めに，次の(ｉ)，(ⅱ)を考える．

(ｉ) 集合Ａのカージナル数は，

Ａとの間に全単射が存在する順序数のなかで最小のもの

と定義する．ただし，無限大カージナル数を表す記号は$\aleph_{\alpha}$を用いる．

例：可符番集合のカージナル数を表す記号は，可符番順序数の最小値ωではなく，$\aleph_0$を用いる．

(ⅱ)【公理２】より得られるカージナル数を用いて，次の自然写像κを導入する．ただし，カージナル数ｎは$0 \leqq n < \aleph_0$で，整数ｎは$0 \leqq n < g^{+}(0)$とする．

$$\kappa : \begin{cases} n \to n, \\ \\ \aleph_{\alpha} \to g^{+}(\alpha). \end{cases}$$

この(ｉ)，(ⅱ)を用いれば，累乗について，本編の第６章と同じことがいえる．実際，(ⅱ)の自然写像κは，前述の簡略記号を用いれば，定義6-1の自然写像κと同じであるので，それに続く記述も同じでよい．指数法則も第７章と同じである．

疑問Ｂの解答例

次の「共通値」を用いれば，疑問Ｂの不自然が回避されることを示す．

（１）定義B-1（共通値）

０，１／∞_1，**a**（a∈R^+），**∞**の４種類の数を基本値といい，基本値μには，次のような集合**J**（μ）が対応しているものとする．この**J**（μ）を基本区間という．

$$\mu=0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{J}(\mu)=\boldsymbol{\phi}.$$
$$\mu=1/\infty_1 \Leftrightarrow\ \mathbf{J}(\mu)=\{\mathbf{0}\}.$$
$$\mu=\mathbf{a}\ \Leftrightarrow\ \mathbf{J}(\mu)=\{\mathbf{r}:0\leqq r\leqq a,\ r\in R\}.$$
$$\mu=\boldsymbol{\infty}\ \Leftrightarrow\ \mathbf{J}(\mu)=\{\mathbf{r}:0\leqq r,\ r\in R\}.$$

このとき，基本値を項とする単調減少数列$\{\mu_n\}$において，$\bigcap\mathbf{J}(\mu_n)$は，常に基本区間になるので，この$\bigcap\mathbf{J}(\mu_n)$に対応する基本値を，com$\{\mu_n\}$で表し，単調減少数列$\{\mu_n\}$の共通値という．

例：単調減少数列を$\{\mathbf{1}/\mathbf{n}\}$とすれば，$\bigcap\mathbf{J}(\mathbf{1}/\mathbf{n})=\{\mathbf{0}\}$であるので，

$$\mathrm{com}\{\mathbf{1}/\mathbf{n}\}=1/\infty_1.$$

例：単調減少数列を$\{(\mathbf{n}+\mathbf{1})/\mathbf{n}\}$とすれば，

$$\bigcap\mathbf{J}((\mathbf{n}+\mathbf{1})/\mathbf{n})=\{\mathbf{r}:0\leqq r\leqq 1,\ r\in R\}$$

であるので，com$\{(\mathbf{n}+\mathbf{1})/\mathbf{n}\}=\mathbf{1}$．

（２）定理B-1

単調減少数列$\{x_n\}$，$x_n\in R^+$において，次の式が成り立つ．

$$(\mathrm{i})\ \inf\{x_n\}=a\ \Leftrightarrow\ \mathrm{com}\{\mathbf{x_n}\}=\mathbf{a}\ (a\in R^+).$$
$$(\mathrm{ii})\ \inf\{x_n\}=0\ \Leftrightarrow\ \mathrm{com}\{\mathbf{x_n}\}=1/\infty_1.$$

証明（ｉ）（ア）$\inf\{x_n\}=a\ \Rightarrow \mathrm{com}\{\mathbf{x_n}\}=\mathbf{a}\ (a\in R^+)$の証明：

com$\{\mathbf{x_n}\}=\mathbf{b}$（b∈$R^+$）とする．ここで，$\mathbf{a}<\mathbf{b}$ならば，$\mathbf{a}\leqq\mathbf{x_n}<\mathbf{b}$となる$\mathbf{x_n}$は存在しない．そして，$\mathbf{b}<\mathbf{a}$ならば，$\mathbf{x_n}<\mathbf{a}$となる$\mathbf{x_n}$が存在する．

したがって，$a<b$ならば，$a\leqq x_n<b$となるx_nは存在しない．そして，$b<a$ならば，$x_n<a$となるx_nが存在するので，いずれの場合も，仮定$\inf\{x_n\}=a$に反する．

（イ）$\mathrm{com}\{\mathbf{x_n}\}=\mathbf{a}\ \Rightarrow \inf\{x_n\}=a\ (a\in R^+)$の証明：

$\inf\{x_n\}=b$（b∈R^+）とする．ここで，

$a<b$ならば，$^\forall x_n$，$a<b\leqq x_n$であるので，

$^\forall x_n$，$\{r:0\leqq r\leqq a,\ r\in R\}$は，$\{r:0\leqq r\leqq x_n,\ r\in R\}$の真部分集合であり，

$\{r:0\leqq r\leqq a,\ r\in R\}$は，$\bigcap\{r:0\leqq r\leqq x_n,\ r\in R\}$の真部分集合．

$b<a$ならば，$b<x_n<a$となるx_nが存在するので，

$^\exists x_n$，$\{r:0\leqq r\leqq x_n,\ r\in R\}$は，$\{r:0\leqq r\leqq a,\ r\in R\}$の真部分集合であり，

$\bigcap\{r:0\leqq r\leqq x_n,\ r\in R\}$は，$\{r:0\leqq r\leqq a,\ r\in R\}$の真部分集合．

したがって，$\mathbf{a}<\mathbf{b}$ならば，

$$\forall \mathbf{x}_n,\ \mathbf{a}<\mathbf{b}\leqq \mathbf{x}_n$$

であるので，

$$\forall \mathbf{x}_n,\ \mathbf{J}(\mathbf{a})\text{は，}\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)\text{の真部分集合}$$

であり，

$$\mathbf{J}(\mathbf{a})\text{は，}\bigcap \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)\text{の真部分集合．}$$

$\mathbf{b}<\mathbf{a}$ならば，

$$\mathbf{b}<\mathbf{x}_n<\mathbf{a}\text{となる}\mathbf{x}_n\text{が存在する}$$

ので，

$$\exists \mathbf{x}_n,\ \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)\text{は，}\mathbf{J}(\mathbf{a})\text{の真部分集合}$$

であり，

$$\bigcap \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)\text{は，}\mathbf{J}(\mathbf{a})\text{の真部分集合．}$$

ゆえに，$\mathbf{a}<\mathbf{b}$，$\mathbf{b}<\mathbf{a}$のいずれの場合も，仮定$\mathrm{com}\{\mathbf{x}_n\}=\mathbf{a}$に反する．

（ⅱ）（ア）$\inf\{x_n\}=0 \Rightarrow \mathrm{com}\{\mathbf{x}_n\}=1/\infty_1$の証明：

$x_n>0$であるので，仮定より，$\forall\varepsilon>0$とすれば，$0<x_n<\varepsilon$となるx_nが存在する．

したがって，$\forall\boldsymbol{\varepsilon}>\mathbf{0}$とすれば，$\mathbf{0}<\mathbf{x}_n<\boldsymbol{\varepsilon}$となる$\mathbf{x}_n$が存在するので，

$$\bigcap \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)=\{\mathbf{0}\}$$

であり，$\mathrm{com}\{\mathbf{x}_n\}=1/\infty_1$を得る．

（イ）$\mathrm{com}\{\mathbf{x}_n\}=1/\infty_1 \Rightarrow \inf\{x_n\}=0$の証明：

仮定より，

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_n)=\{\mathbf{r}:0\leqq r\leqq x_n,\ r\in R\},\quad \bigcap \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)=\{\mathbf{0}\}$$

であるので，$\forall\boldsymbol{\varepsilon}>\mathbf{0}$とすれば，$\mathbf{0}<\mathbf{x}_n<\boldsymbol{\varepsilon}$となる$\mathbf{x}_n$が存在する．

したがって，$\forall\varepsilon>0$とすれば，$0<x_n<\varepsilon$となるx_nが存在するので，$\inf\{x_n\}=0$を得る■

（３）定理B-2

単調減少数列$\{x_n\}$，$x_n\in R^+$において，次の式が成り立つ．

$$(\text{i})\ \lim x_n=a \Leftrightarrow \mathrm{com}\{\mathbf{x}_n\}=\mathbf{a}\ (a\in R^+).$$

$$(\text{ii})\ \lim x_n=0 \Leftrightarrow \mathrm{com}\{\mathbf{x}_n\}=1/\infty_1.$$

証明　$\{x_n\}$，$x_n\in R^+$が単調減少数列より，$\inf\{x_n\}=\lim x_n$であるので明らか■

（４）結論

$\mathbf{S}$のルベーグ外測度$m^*(\mathbf{S})$は，

$$\bigcup \mathbf{I}_n\text{を}\mathbf{S}\text{の被覆とすれば，}m^*(\mathbf{S})=\inf\{\mathbf{v}:\mathbf{v}=\sum m(\mathbf{I}_n)\}$$

と定義されるので，$\mathbf{S}\neq\boldsymbol{\phi}$ならば，定理B-1，定理B-2より，

$$m^*(\mathbf{S})=\mathrm{com}\{\mathbf{v}:\mathbf{v}=\sum m(\mathbf{I}_n)\}$$

を得る．ここで，$\mathbf{S}$が空でない零集合ならば，

$$\mathrm{com}\{\mathbf{v}:\mathbf{v}=\sum m(\mathbf{I}_n)\}=1/\infty_1$$

であるので，共通値を用いれば，疑問Ｂの不自然は解消される．

疑問Cの解答例

この疑問に対する１つの答えとして，$a+(1/\infty_0)$，$a-(1/\infty_0)$なる拡大実数は，ある種のルベーグ非可測集合の『測度』を表すと考えられる．

実際，長さ１の開区間$\{x : 0<x<1,\ x\in R\}$を可符番個に等分割した集合⊿の『測度』を$1/\infty_0$として，長さがaである区間をIとすれば，次のように考えても不自然ではない．

（ｉ）$a+(1/\infty_0)$は，和集合$I\cup$⊿の『測度』を表す．ただし，$I\cap$⊿$=\phi$．

（ⅱ）$a-(1/\infty_0)$は，差集合$I-$⊿の『測度』を表す．ただし，⊿$\subset I$．

以下，このような『測度』を明確に定義する方法について述べる．

第１節　用語と記号の定義

（１）特定の集合を表す記号

（ｉ）実数すべての集合をRで表す．

（ⅱ）有理数すべての集合をQで表す．

（ⅲ）整数すべての集合をZで表す．

（ⅳ）順序数の集合$\{i : 0\leqq i<\alpha,\ i$は極限数ではない$\}$を$W[0,\ \alpha)$で表す．

例：$W[0,\ \omega+2)=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \omega+1\}$．（∵ωは極限数より，含まれない）

（２）集合の合同

S，S'をRの部分集合，$r\in R$とする．Sをrだけ平行移動した集合$\{s+r : s\in S\}$を$S\langle r\rangle$で表すとき，$S\langle r\rangle=S'$となるrが存在するならば，SとS′は合同であるといい，$S\equiv S'$で表す．

（３）Rの部分集合X，Yの集合演算

【加法】$X+Y$は，$X\cap Y=\phi$のときの和集合で，

ΣX_nは，$X_n\cap X_m=\phi\ (n\neq m)$のときの和集合とする．

【減法】$Y-X$は，$X\subset Y$のときの差集合とする．

【乗法】$X\times Y=\Sigma_{a\in Y} X\langle a\rangle$とする．

例：$X=[0,\ 1/3)$，$Y=\{0,\ 1/3,\ 2/3\}$とすれば，

$X\times Y=X\langle 0\rangle+X\langle 1/3\rangle+X\langle 2/3\rangle=[0,1/3)+[1/3,2/3)+[2/3,1)=[0,1)$．

（４）選択公理

次の２つの表現を用いる．

（ｉ）互いに交わらない空でない集合の族$\{A_i\}_{i\in I}$において，

$$集合\{a_i : a_i\in A_i,\ i\in I\}$$

が存在する．この集合を，族$\{A_i\}_{i\in I}$の選択集合，a_iをA_iの代表元という．

（ⅱ）整列可能定理．

第２節　選択加群

（５）Ｒの類別

$r_1, r_2 \in R$とする．$r_1 - r_2 \in Q$のとき$r_1 \sim r_2$で表せば，関係～は同値関係であるので，Ｒを類別することができ，この類別について次の事実を得る．

（ｉ）各類は，$Q+\lambda$で表される集合である．ただし，λは０または無理数．

（ⅱ）この類別をR/Qで表せば，選択公理(ｉ)より，R/Qの選択集合Φが存在する．

（ⅲ）選択公理(ⅱ)より，Φは整列可能であるので，$\Phi=\{x_\alpha : 0 \leqq \alpha < \varepsilon\}$とすることができる．ここで，$\Phi$は連続濃度の集合であるので，$\varepsilon$は可符番順序数の直後の順序数としてよい．なお，便宜上，x_0は，類Ｑの代表元とし，それは０とする．

（６）定義C-1

選択集合$\Phi=\{x_\alpha : 0 \leqq \alpha < \varepsilon\}$を利用し，集合の列$\{G_\alpha\}$と数列$\{\lambda_\alpha\}$を，超限帰納法を用いて，次の【ｉ】と【ⅱ】で定義する．ただし，$G_0=\{0\}$，$\lambda_0=0$とする．

【ｉ】$x_1=\lambda_1$として，$G_1=\{q\lambda_1 : q \in Q\}$とする．

ここで，Φに属する元のうち，$g \in G_1$が属する類から選ばれた元は，ｇで置き換え，もとの番号と同じ番号を与える．その他の元は，そのままとして得られる集合を$\Phi^{(1)}$で表す．当然，$G_1 \subset \Phi^{(1)}$である．

【ⅱ】順序数$\alpha\ (\geqq 2)$が，

（ア）極限数でなければ，$\Phi^{(\alpha-1)}$から$G_{\alpha-1}$を除いた集合で，最も若い番号の代表元をλ_αとして，$G_\alpha=\{g+q\lambda_\alpha : g \in G_{\alpha-1},\ q \in Q\}$とする．

（イ）極限数ならば，$G_\alpha = \bigcup_{0 \leqq \beta < \alpha} G_\beta$とする．

ここで，Φに属する元のうち，$g \in G_\alpha$が属する類から選ばれた元は，ｇで置き換え，もとの番号と同じ番号を与える．その他の元は，そのままとして得られる集合を$\Phi^{(\alpha)}$で表す．当然，$G_\alpha \subset \Phi^{(\alpha)}$である．

補足：$\{G_\alpha\}$は，$\{0\}=G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_\omega \subset \cdots$となる集合の列である．

（７）定理C-1（G_αの性質１）

集合G_αは，次のように表すことができる．

順序数αが，

（ア）極限数でなければ，

$$G_\alpha=\{q_1\lambda_{i_1}+q_2\lambda_{i_2}+\cdots+q_{n-1}\lambda_{i_{n-1}}+q_n\lambda_\alpha : q_1, q_2, \cdots, q_n \in Q;\ i_1, i_2, \cdots, i_{n-1} \in W[0,\ \alpha);\ n\text{は有限}\}.$$

（イ）極限数ならば，

$$G_\alpha=\{q_1\lambda_{i_1}+q_2\lambda_{i_2}+\cdots+q_n\lambda_{i_n} : q_1, q_2, \cdots, q_n \in Q;\ i_1, i_2, \cdots, i_n \in W[0,\ \alpha);\ n\text{は有限}\}.$$

証明　$\alpha=0$の場合は，(ア)で$\alpha=0$とおく．このとき，$G_0=\{q\lambda_0 : q \in Q\}$となるが，$\lambda_0=0$であるので，$G_0=\{0\}$となり，定理は成り立つ．したがって，$\alpha \geqq 1$の場合を証明すればよい．超限帰納法を用いる．

【ｉ】$\alpha=1$の場合は，(ア)で$\alpha=1$とおく．ここで，$W[0,1)=\{0\}$より，

$$G_1=\{q_1\lambda_0+q_2\lambda_1 : q_1, q_2\in Q\}$$

となるが，$\lambda_0=0$であるので，

$$G_1=\{q\lambda_1 : q\in Q\}$$

となり，定理は成り立つ．

【ⅱ】$G_\beta(\beta<\alpha)$の場合を仮定して，G_αの場合も成り立つことを証明する．

（ア）αが極限数でないとする．このときは，$\alpha-1$が存在し，仮定より，

$$G_{\alpha-1}=\{q_1\lambda_{i_1}+q_2\lambda_{i_2}+\cdots+q_{n-1}\lambda_{i_{n-1}}+q_n\lambda_{\alpha-1} : q_1,q_2,\cdots,q_n\in Q;\ i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\in W[0,\alpha-1);\ n\text{は有限}\}$$

と表すことができる．ここで，$g\in G_{\alpha-1}$，$q_{n+1}\in Q$とすれば，

$$g+q_{n+1}\lambda_\alpha=(q_1\lambda_{i_1}+q_2\lambda_{i_2}+\cdots+q_{n-1}\lambda_{i_{n-1}}+q_n\lambda_{\alpha-1})+q_{n+1}\lambda_\alpha$$

であるので，$m=n+1$とすれば，

$$\begin{aligned}G_\alpha&=\{g+q_m\lambda_\alpha : g\in G_{\alpha-1},\ q_m\in Q\}\\&=\{q_1\lambda_{i_1}+q_2\lambda_{i_2}+\cdots+q_{m-1}\lambda_{i_{m-1}}+q_m\lambda_\alpha :\\&\qquad q_1,q_2,\cdots,q_m\in Q;\ i_1,i_2,\cdots,i_{m-1}\in W[0,\alpha);\ m\text{は有限}\}.\end{aligned}$$

（イ）αが極限数とする．仮定より，$\beta<\alpha$ならば，

$$G_\beta=\{q_1\lambda_{i_1}+q_2\lambda_{i_2}+\cdots+q_n\lambda_{i_n} : q_1,q_2,\cdots,q_n\in Q;\ i_1,i_2,\cdots,i_n\in W[0,\beta);\ n\text{は有限}\}$$

であるので，

$$\begin{aligned}G_\alpha&=\bigcup_{0\leqq\beta<\alpha}G_\beta\\&=\{q_1\lambda_{i_1}+q_2\lambda_{i_2}+\cdots+q_n\lambda_{i_n} :\\&\qquad q_1,q_2,\cdots,q_n\in Q;\ i_1,i_2,\cdots,i_n\in W[0,\alpha);\ n\text{は有限}\}.\end{aligned}$$

したがって，(ア)と(イ)より，αが極限数か否かによらず，G_αの場合も成り立つ■

補足：集合G_αの元gは，αが極限数か否かによらず，

$$g=q_1\lambda_{i_1}+q_2\lambda_{i_2}+\cdots+q_n\lambda_{i_n}$$

と表すことができる．ただし，nは有限で，

$q_1,q_2,\cdots,q_n\in Q$；

αが極限数でなければ，$i_1,i_2,\cdots,i_{n-1}\in W[0,\alpha)$，$i_n=\alpha$；

αが極限数ならば，$i_1,i_2,\cdots,i_n\in W[0,\alpha)$

である．実際，定理C-1の(ア)において，λ_αをλ_{i_n}と考えればよい．

（８）定理C-2（G_αの性質２）

G_αの元は，それぞれ，異なる類に属する．

証明　G_αの作り方，すなわち，定義C-1より，明らかであるが，ここでは，定理C-1の補足を用いて証明する．

g_1，$g_2\in G_\alpha$とすれば，定理C-1の補足より，次のように表すことができる．

$$g_1=q_{11}\lambda_{i_1}+q_{12}\lambda_{i_2}+\cdots+q_{1n}\lambda_{i_n}.$$

$$g_2=q_{21}\lambda_{j_1}+q_{22}\lambda_{j_2}+\cdots+q_{2m}\lambda_{j_m}.$$

ゆえに，共通の，

$$\lambda_{k_1},\ \lambda_{k_2},\ \cdots,\ \lambda_{k_p}\quad (k_1<k_2<\cdots<k_p,\ p\text{は有限})$$

を用いて，次のように表すことができる．

$$g_1=r_{11}\lambda_{k_1}+r_{12}\lambda_{k_2}+\cdots+r_{1p}\lambda_{k_p}.$$
$$g_2=r_{21}\lambda_{k_1}+r_{22}\lambda_{k_2}+\cdots+r_{2p}\lambda_{k_p}.$$

当然，

$$r_{11},\ r_{12},\ \cdots,\ r_{1p}\in Q.$$
$$r_{21},\ r_{22},\ \cdots,\ r_{2p}\in Q$$

である．

ここで，背理法を用いる．$g_1-g_2=q\in Q$と仮定する．有限数列：

$$\{a_n\},\ a_n=r_{1n}-r_{2n}$$

を考えて，$a_n\neq 0$となるnの最大値をNとすれば，

$$\lambda_{k_N}=(q-a_1\lambda_{k_1}-a_2\lambda_{k_2}-\cdots-a_{N-1}\lambda_{k_{N-1}})/a_N$$

であるが，q，a_1，a_2，$\cdots$，a_{N-1}，a_Nは全て有理数であるので，これは，λ_{k_N}の選び方(定義C-1)に反する．

したがって，$g_1-g_2\notin Q$であるので，g_1，g_2は異なる類に属する■

（９）定理C-3（G_αの性質３）

G_αは加群で，Rの正規部分群である．したがって，RはG_αで類別することができる．

証明　g_1，g_2，$g_3\in G_\alpha$とすれば，定理C-1の補足より，次のように表すことができる．

$$g_1=r_{11}\lambda_{k_1}+r_{12}\lambda_{k_2}+\cdots+r_{1p}\lambda_{k_p}.$$
$$g_2=r_{21}\lambda_{k_1}+r_{22}\lambda_{k_2}+\cdots+r_{2p}\lambda_{k_p}.$$
$$g_3=r_{31}\lambda_{k_1}+r_{32}\lambda_{k_2}+\cdots+r_{3p}\lambda_{k_p}.$$

ゆえに，次の(ⅰ)と(ⅱ)は容易に示すことができる．

（ⅰ）$g_1+g_2=g_2+g_1\in G_\alpha$.

（ⅱ）$(g_1+g_2)+g_3=g_1+(g_2+g_3)$.

また，次の(ⅲ)と(ⅳ)は明らかである．

（ⅲ）$0=0\lambda_{k_1}+0\lambda_{k_2}+\cdots+0\lambda_{k_p}\in G_\alpha$.

（ⅳ）$g_1=r_{11}\lambda_{k_1}+r_{12}\lambda_{k_2}+\cdots+r_{1p}\lambda_{k_p}\in G_\alpha$とすれば，

$$-g_1=-r_{11}\lambda_{k_1}-r_{12}\lambda_{k_2}-\cdots-r_{1p}\lambda_{k_p}\in G_\alpha.$$

したがって，G_αは加群で，Rの正規部分群である■

補足：定理C-3より，$\bigcup_{\alpha\in W[0,\varepsilon)}G_\alpha$を改めて$\Phi$で表せば，$\Phi$は加群で，$R$の正規部分群で，$R/Q$の選択集合である．この$\Phi$を，以後，選択加群と称する．

（10）選択加群Φの基本性質

（ⅰ）$\Phi=\Phi\langle 0\rangle$.

（ⅱ）q_1，$q_2\in Q$ならば，$\Phi\langle q_1\rangle\equiv\Phi\langle q_2\rangle$.

（ⅲ）$\sum_{q\in Q}\Phi\langle q\rangle=R$，すなわち，$\Phi\times Q=R$.

（11） 定理C-4（定理C-6の補助定理１）

Ｒの２つの閉区間を，$I=[a,\ b]$，$J=[c,\ d]$とするとき，

$$a,\ b,\ c,\ d\in\Phi,\ b-a=d-c \text{ ならば } (\Phi\cap I)\equiv(\Phi\cap J)$$

が成り立つ．

証明　$x\in(\Phi\cap I)$とすれば，$a\leqq x\leqq b$である．

Φは加群であり，$a,\ c,\ x\in\Phi$であるので，$c+(x-a)\in\Phi$．

また，$b-a=d-c$より，$c\leqq c+(x-a)\leqq d$である．

ゆえに，$x+(c-a)=c+(x-a)\in(\Phi\cap J)$であるので，

$$(\Phi\cap I)\langle c-a\rangle\subset(\Phi\cap J)\quad\cdots ①$$

逆に，$y\in(\Phi\cap J)$とすれば，$c\leqq y\leqq d$である．

Φは加群であり，$a,\ c,\ y\in\Phi$であるので，$a+(y-c)\in\Phi$．

また，$b-a=d-c$より，$a\leqq a+(y-c)\leqq b$である．

ゆえに，$y+(a-c)=a+(y-c)\in(\Phi\cap I)$であるので，

$$(\Phi\cap J)\langle a-c\rangle\subset(\Phi\cap I)\quad\cdots ②$$

したがって，①，②より，$(\Phi\cap I)\langle c-a\rangle=(\Phi\cap J)$を得る■

（12） 定理C-5（定理C-6の補助定理２）

Ｒの任意の開区間$(a,\ b)$には，少なくとも１つ，Φの元が存在する．

証明　$x\in\Phi$とすれば，定理C-1の補足より，

$$x=q_1\lambda_{i_1}+q_2\lambda_{i_2}+\cdots+q_n\lambda_{i_n}$$

と表すことができる．

ここで，$a<x<b$ならば，直ちに定理は成り立ち，$x\leqq a$ または $b\leqq x$ならば，$q\in Q$を適当に選ぶことで，

$$a<qx<b,\ qx\in\Phi$$

とすることができる■

（13） 定理C-6

Ｒの２つの開区間を，$I=(a,\ b)$，$J=(c,\ d)$とするとき，

$$b-a=d-c \text{ ならば } (\Phi\cap I)\equiv(\Phi\cap J)$$

が成り立つ．

証明　$A(a)$，$B(b)$とする．線分ABの中点をMとして，次の分点に記号をつける．

AMの中点をA_1，AA_1の中点をA_2，AA_2の中点をA_3，・・・，AA_nの中点をA_{n+1}，・・・
MBの中点をB_1，B_1Bの中点をB_2，B_2Bの中点をB_3，・・・，B_nBの中点をB_{n+1}，・・・
とする．

このとき，定理C-5より，開区間$(A_{n+1},\ A_n)$にはΦの元が存在するので，その元を，

$$\alpha_n\in(A_{n+1},\ A_n)$$

とする．同様に，開区間$(B_n\quad B_{n+1})$にもΦの元が存在するので，その元を，

$$\beta_n\in(B_n,\ B_{n+1})$$

とする．当然，$\alpha_n<\beta_n$である．

次に，$C(c)$，$D(d)$とする．線分CDの中点をNとして，次の分点に記号をつける．
CNの中点をC_1，CC_1の中点をC_2，CC_2の中点をC_3，・・・，CC_nの中点をC_{n+1}，・・・
NDの中点をD_1，D_1Dの中点をD_2，D_2Dの中点をD_3，・・・，D_nDの中点をD_{n+1}，・・・
とする．

このときも，定理C-5より，開区間$(C_{n+1},\ C_n)$にはΦの元が存在するので，その元を，

$$\gamma_n \in (C_{n+1},\ C_n)$$

とし，$K_n(\gamma_n)$とすれば，次の２つの事実を得る．

（ア） $\delta_n = \gamma_n + (\beta_n - \alpha_n)$とすれば，$\delta_n \in \Phi$である．

実際，Φは加群であるので，α_n，β_n，$\gamma_n \in \Phi$より，$\delta_n \in \Phi$を得る．

（イ） δ_nは，開区間$(D_{n-1},\ D)$に属する．

実際，

$$A_nB_n = C_nD_n,\quad A_{n+1}A_n = B_nB_{n+1} = C_{n+1}C_n = D_nD_{n+1}$$

であるので，

$$\begin{aligned}\beta_n - \alpha_n &= A_nB_n + \theta_1 A_{n+1}A_n + \theta_2 B_nB_{n+1}\quad (0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1)\\ &= C_nD_n + \theta_1 D_nD_{n+1} + \theta_2 D_nD_{n+1}\\ &= C_nD_n + (\theta_1 + \theta_2) D_nD_{n+1}.\end{aligned}$$

$$CK_n = CC_n - \theta_3 C_{n+1}C_n = CC_n - \theta_3 D_nD_{n+1}\quad (0 < \theta_3 < 1).$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}CK_n + (\beta_n - \alpha_n) &= \{CC_n - \theta_3 D_nD_{n+1}\} + \{C_nD_n + (\theta_1 + \theta_2) D_nD_{n+1}\}\\ &= CC_n + C_nD_n + (\theta_1 + \theta_2 - \theta_3) D_nD_{n+1}\\ &= CD_n + (\theta_1 + \theta_2 - \theta_3) D_nD_{n+1}.\end{aligned}$$

ここで，

$$-1 < \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 < 2$$

であるので，

$$CD_n - D_nD_{n+1} < CK_n + (\beta_n - \alpha_n) < CD_n + 2D_nD_{n+1}$$

であり，

$$CD_{n-1} < CD_n - D_nD_{n+1},$$
$$CD_n + 2D_nD_{n+1} = CD$$

であるので，

$$CD_{n-1} < CK_n + (\beta_n - \alpha_n) < CD$$

を得る．これは，δ_nが開区間$(D_{n-1},\ D)$に属することを意味する．

以上により，閉区間$I_n = [\alpha_n,\ \beta_n]$，$J_n = [\gamma_n,\ \delta_n]$を考えれば，

$$\alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n,\ \delta_n \in \Phi,\quad \beta_n - \alpha_n = \delta_n - \gamma_n$$

となるので，定理C-4より，$(\Phi \cap I_n) \equiv (\Phi \cap J_n)$である．

また，$\bigcup I_n = I$，$\bigcup J_n = J$であるので，$(\Phi \cap I) \equiv (\Phi \cap J)$を得る■

（14）定義C-2（等分割集合）

Rの部分集合Sにおいて，

$$S = \sum_{a \in A} X\langle a \rangle$$

が成り立つとき，この分割を等分割といい，$X\langle a \rangle$をSの等分割集合という．

特に，Aが有限集合ならば有限等分割集合，Aが可符番集合ならば可符番等分割集合，Aが連続濃度の集合ならば連続等分割集合という．

例：$I = (a, b)$として，

$$B = \sum_{n \in Z} J_n, \quad J_n = \{q : 3n \leqq q < 3n + 1,\ q \in Q\},$$
$$B_1 = B\langle 1 \rangle,$$
$$B_2 = B\langle 2 \rangle,$$
$$Y = \sum_{q \in B} (\Phi\langle q \rangle \cap I),$$
$$Y_1 = \sum_{q \in B_1} (\Phi\langle q \rangle \cap I),$$
$$Y_2 = \sum_{q \in B_2} (\Phi\langle q \rangle \cap I)$$

とすれば，

$$I = Y + Y_1 + Y_2, \quad Y \equiv Y_1 \equiv Y_2$$

であるので，Y，Y_1，Y_2は，区間Iの3等分割集合である．

（15）選択平面

横軸の座標を$x \in R$，縦軸の座標を$y \in Q$とする平面を，RQ平面といい，RQ平面の部分集合：

$$\{(p + q,\ q) : p \in \Phi,\ q \in Q\}$$

を選択平面といい，πで表す．

πは選択加群Φを有理数qだけx軸方向に平行移動した集合を，更に，y軸方向へqだけ平行移動した集合の和集合であり，実数$p + q$をRQ平面における点$(p + q,\ q)$の位置に配置した集合である．したがって，πは実際には平面ではなく，穴だらけであるが，平面のようにひろがっているという意味で，選択平面と称する．

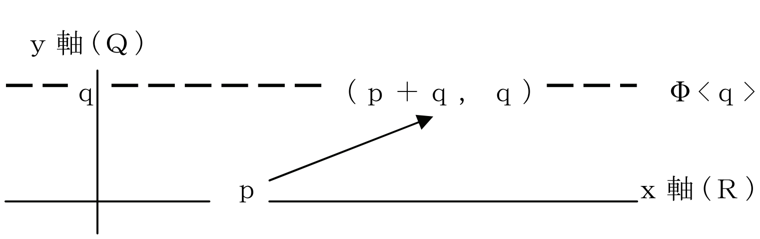


図1

（16） 定理C-7

選択平面において，$0 < x < b$，$-\infty < y < \infty$で表される範囲(図２の網掛け部分)に属する実数すべての集合は，開区間$(0\quad b)$に等しい．

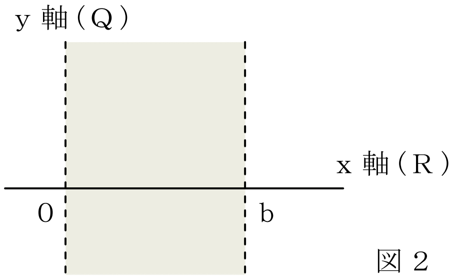


図２

証明　$\sum_{q\in Q}\Phi\langle q\rangle = R$であるので，$I=(0\quad b)$とすれば，

$$\left(\sum_{q\in Q}\Phi\langle q\rangle\right)\cap I = R\cap I$$

である．したがって，

$$\sum_{q\in Q}(\Phi\langle q\rangle\cap I) = R\cap I = I$$

を得る■

（17） 定理C-8

区間$I=(0,\ b)$とすれば，$\Phi\cap I$は，Iの可符番等分割集合である．

証明　図２における網掛け部分と$\Phi\langle q\rangle$の共通部分$\Phi\langle q\rangle\cap I$は，

$$\{x : -q < x < -q+b,\ x\in\Phi\}$$

を，x軸方向にq，y軸方向にqだけ平行移動した集合である．ここで，定理C-6より，

$$\{x : -q < x < -q+b,\ x\in\Phi\}\equiv\{x : 0 < x < b,\ x\in\Phi\} = \Phi\cap I$$

であるので，

$$q,\ r\in Q\text{ならば，}(\Phi\langle q\rangle\cap I)\equiv\Phi\cap I\equiv(\Phi\langle r\rangle\cap I)$$

である．したがって，定理C-7より，$\Phi\cap I$は，Iの可符番等分割集合である■

（18） 定義C-3（階加集合）

（ｉ） sを番目の素数をp[s]で表し，sを素数p[s]の素数番号という．

例：素数番号１の素数$p[1]=2$，　素数番号５の素数 $p[5]=11$．

（ii）既約分数b/a（aは正の整数)の，分母aの素因数の素数番号の最大値を，$\mathcal{P}(b/a)$で表す．

例：63の素因数分解は，$3^2\cdot 7$であり，素因数3，7は，それぞれ，$3=p[2]$，$7=p[4]$であるので，素数番号の最大値は４である．したがって，$\mathcal{P}(1/63)=4$．

（iii）集合$\{0,\ 1/p[s]^n,\ 2/p[s]^n,\ \cdots,\ (p[s]^n-1)/p[s]^n\}$を$[1/p[s]^n]$で表す．

例：$[1/p[1]^n]=[1/2^n]=\{0,\ 1/2^n,\ 2/2^n,\ \cdots,\ (2^n-1)/2^n\}$．

$m\leqq n$ならば，明らかに，$[1/p[s]^m]\subset[1/p[s]^n]$である．

（iv）和集合 $\bigcup[1/p[s]^n]=[1/p[s]]\cup[1/p[s]^2]\cup[1/p[s]^3]\cup\cdots\cup[1/p[s]^n]\cup\cdots$ をE[s]で表す．

例：$E[1]=\{0, 1/2\} \cup \{0, 1/4, 2/4, 3/4\} \cup \{0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8\} \cup \cdots \cup \{0, 1/2^n, 2/2^n, 3/2^n, \cdots, (2^n-1)/2^n\} \cup \cdots$

すなわち，$E[1]$は，分母が$p[1]=2$の累乗で表すことができる非負の真分数すべての集合である．

（ｖ）整数すべての集合Zを用いて，

$$Z+E[s]=\{n+q : n \in Z,\ q \in E[s]\}$$

を$G[s]$で表す．$G[s]$は加群である．

（ⅵ）$G[s]!=G[1]+G[2]+\cdots+G[s]$

$$=\{q_{i_1}+q_{i_2}+\cdots+q_{i_n} : q_{i_1} \in G[i_1],\ q_{i_2} \in G[i_2],\ \cdots,\ q_{i_n} \in G[i_n];\ 1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqq s\}$$

とするとき，$G[s]!$を階加集合という．

（ⅶ）$G[s]!$の，$s=\omega$の場合を，$G[\omega]!=\bigcup G[s]!$と約束する．

補足：階加集合$G[s]!$（$s<\omega$）は，

$$G[s]!=\{b/a : \mathcal{P}(b/a) \leqq s\}$$

と表すこともできる．

補足：階加集合$G[s]!$は加群であり，$s<\omega$ならば，$G[s]!$は$G[\omega]!$（$=Q$）の可符番等分割集合である．

第３節 『測度』

（19）定義C-4（甲集合）

（ｉ）有限開区間 $I=(a,\ b)$ と $\Phi\langle q\rangle$ の共通部分 $\Phi\langle q\rangle\cap I$ を，原始甲集合といい，$\Phi\langle q : a\to b\rangle$ で表す．このとき，開区間 I を $\Phi\langle q : a\to b\rangle$ の区間，a をこの区間の始点，b を終点という．

（ⅱ）$h,\ k\in Q$ とする．階加集合 $G[s]!$ と集合 $J=\{q : h\leqq q<k,\ q\in Q\}$ の共通部分 $G[s]!\cap J$ を，$G[s : h\Rightarrow k]!$ で表すとき，原始甲集合の和集合：

$$\sum_{q\in G[s : h\Rightarrow k]!}\Phi\langle q : a\to b\rangle$$

を単純甲集合という．

（ⅲ）原始甲集合と単純甲集合を合わせて，単に甲集合という．

（20）定理C-9（甲集合の基本性質）

（ｉ）甲集合 $\sum_{q\in G[s : h\Rightarrow k]!}\Phi\langle q : a\to b\rangle$ は，開区間 $(a,\ b)$ の可符番等分割集合である．

（ⅱ）甲集合は，ルベーグ非可測集合である．

（ⅲ）甲集合の有限個の和集合は，ある甲集合の部分集合である．

（ⅳ）甲集合の可符番個の和集合で，次の集合になるものが，それぞれ，存在する．

（ア）甲集合．

（イ）開区間 $I=(a,\ b)$ の有限等分割集合のいくつかの和集合．

証明（ｉ）$s<\omega$ ならば，$G[s]!$ は，Q の可符番等分割集合であり，$G[s : h\Rightarrow k]!$ は，$G[s]!$ の可符番等分割集合であるので，$G[s : h\Rightarrow k]!$ は，Q の可符番等分割集合である．

$s=\omega$ ならば，$G[s : h\Rightarrow k]!=\{q : h\leqq q<k,\ q\in Q\}$ より、$G[s : h\Rightarrow k]!$ は，Q の可符番等分割集合である．

したがって，いずれの場合も，$\sum_{q\in G[s : h\Rightarrow k]!}\Phi\langle q : a\to b\rangle$ は，開区間 $(a,\ b)$ の可符番等分割集合である．

（ⅱ）甲集合がルベーグ可測集合であるとすれば，（ｉ）より，そのルベーグ測度を０としても，０でないとしても，開区間 $(a,\ b)$ のルベーグ測度が，$0<b-a<\infty$ であることに矛盾する．

（ⅲ）n（有限）個の甲集合を，

$$\sum_{q\in G[s1 : h1\Rightarrow k1]!}\Phi\langle q : a_1\to b_1\rangle,$$
$$\sum_{q\in G[s2 : h2\Rightarrow k2]!}\Phi\langle q : a_2\to b_2\rangle,$$
$$\cdots$$
$$\sum_{q\in G[sn : hn\Rightarrow kn]!}\Phi\langle q : a_n\to b_n\rangle$$

として，

$$\max\{s_i : i=1,2,\cdots,n\}=s,$$
$$\min\{h_i : i=1,2,\cdots,n\}=h,$$
$$\max\{k_i : i=1,2,\cdots,n\}=k,$$
$$\min\{a_i : i=1,2,\cdots,n\}=a,$$

$$\max\{b_i : i=1,2,\cdots,n\}=b$$

とすれば，

$$\bigcup_{1\leqq i\leqq n}\sum_{q\in G[s_i:h_i\Rightarrow k_i]!}\Phi\langle q : a_i\rightarrow b_i\rangle$$
$$\subset\sum_{q\in G[s:h\Rightarrow k]!}\Phi\langle q : a\rightarrow b\rangle$$

となる．

（ⅳ）（ア）G［ｓ：ｈ⇒ｋ］！は，可符番集合であるので，甲集合：

$$\sum_{q\in G[s:h\Rightarrow k]!}\Phi\langle q : a\rightarrow b\rangle$$

は，甲集合Φ〈ｑ：ａ→ｂ〉の可符番個ｑ∈Ｇ［ｓ：ｈ⇒ｋ］！の和集合である．

（イ）Ｑ＝Ｇ［ω］！であるので，ｐを２以上の整数とし，

$$H=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p-1\}$$

とすれば，

$$\sum_{r\in H}\sum_{n\in Z}\sum_{q\in G[\omega:pn+r\Rightarrow pn+r+1]!}\Phi\langle q : a\rightarrow b\rangle=I$$

である．したがって，

$$\sum_{n\in Z}\sum_{q\in G[\omega:pn+r\Rightarrow pn+r+1]!}\Phi\langle q : a\rightarrow b\rangle$$

は，Ｉのｐ等分割集合である．

ここで，$H_1=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p_1-1\}$，$0<p_1\leqq p$として，

$$\sum_{r\in H1}\sum_{n\in Z}\sum_{q\in G[\omega:pn+r\Rightarrow pn+r+1]!}\Phi\langle q : a\rightarrow b\rangle$$

を考えれば，この集合は，Ｉのｐ等分割集合のp_1個の和集合であり，甲集合：

$$\sum_{q\in G[\omega:pn+r\Rightarrow pn+r+1]!}\Phi\langle q : a\rightarrow b\rangle$$

の可符番個の和集合である■

（21）定義C-5（原始甲集合の水平移動）

ｃ∈Ｒとして，原始甲集合Φ〈ｑ：ａ→ｂ〉を，原始甲集合Φ〈ｑ：ａ＋ｃ→ｂ＋ｃ〉に移すことを，原始甲集合の水平移動という．

補足：定理C-6より，Φ〈ｑ：ａ→ｂ〉≡Φ〈ｑ：ａ＋ｃ→ｂ＋ｃ〉である．

例：開区間Ｉ＝（０，１），$甲_1$＝Φ〈ｑ：０→１〉，$甲_2$＝Φ〈ｑ：１→２〉とすれば，$甲_1$と$甲_2$は合同であるので，集合（Ｉ－$甲_1$）＋$甲_2$は，$甲_2$を水平移動すれば，開区間Ｉと同じ集合にすることができる．

例：ＲＱ平面における，２つの単射ｘ＝ｆ（ｙ），ｘ＝ｆ（ｙ）＋１で挟まれた領域（境界線は含まない）をＡとすれば，Ａ∩Φ〈ｑ〉は，ｑの値によらず，長さが１の区間の原始甲集合である．したがって，Ａ∩Φ〈ｑ〉を，それぞれ，区間の始点が０になるように水平移動すれば，$\sum_{q\in Q}$Φ〈ｑ：０→１〉を構成することができる．

（22） 定義C-6（原始甲集合の整列）

$\{\Phi\langle q_n : a_n \to b_n\rangle\}$を，原始甲集合の，高々可符番個の集合とする．

ある定点 c を定めて，各々の原始甲集合を，始点が c にそろうように水平移動する．

すなわち，すべての n について，$\Phi\langle q_n : a_n \to b_n\rangle$を，$\Phi\langle q_n : c \to b_n - a_n + c\rangle$のように，始点をそろえることを，原始甲集合の整列という．

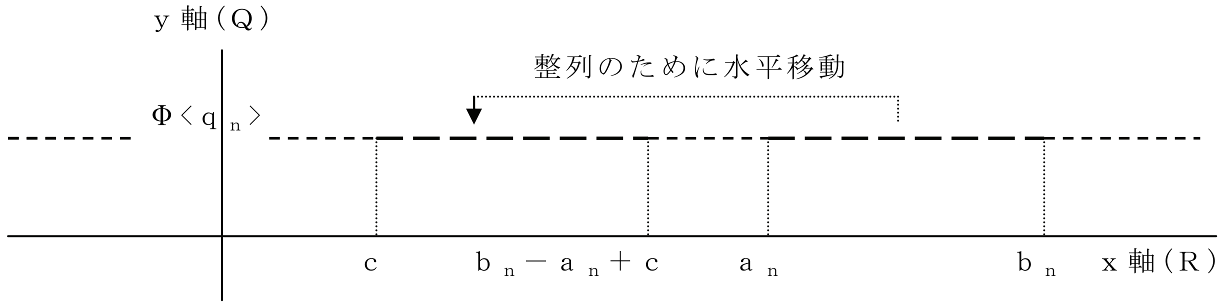


図３

（23） 定義C-7（δ集合）

Δが高々可符番個の原始甲集合の和集合で，甲$_*$⊂Δ⊂甲*となる甲集合甲$_*$，甲*が存在するとき，Δをδ集合という．

（24） 定理C-10（δ集合の基本性質）

（ｉ） δ集合の有限個の和集合はδ集合である．

（ⅱ） δ集合は，ルベーグ非可測集合である．

証明（ｉ） n（有限）個のδ集合を，

$$甲_{*1}\subset\Delta_1\subset甲^*_1,\ 甲_{*2}\subset\Delta_2\subset甲^*_2,\ \cdots,\ 甲_{*n}\subset\Delta_n\subset甲^*_n$$

とすれば，

$$甲_{*1}\subset(\Delta_1\cup\Delta_2\cup\cdots\cup\Delta_n)\subset(甲^*_1\cup甲^*_2\cup\cdots\cup甲^*_n)$$

であるが，定理C-9の（ⅲ）より，甲$^*_1$∪甲$^*_2$∪・・・∪甲$^*_n$を含む甲集合が存在する■

（ⅱ） Δをδ集合とすれば，

$$甲_* = \sum_{q\in G[s1:h1\Rightarrow k1]!}\Phi\langle q : a_1\to b_1\rangle,$$

$$甲^* = \sum_{q\in G[s2:h2\Rightarrow k2]!}\Phi\langle q : a_2\to b_2\rangle,$$

$$甲_*\subset\Delta\subset甲^*$$

となる甲$_*$，甲*が存在するので，Δをルベーグ可測集合とすれば次の不合理が生じる．

（ア） Δのルベーグ測度$\sigma(\Delta)=0$とすれば，

甲$_*$は，開区間$I_1=(a_1,\ b_1)$の可符番等分割集合であるので，ある可符番集合A_1が存在して，甲$_*\times A_1=I_1$が成り立つ．

また，甲$_*$⊂Δであるので，甲$_*\times A_1\subset(\bigcup_{q\in A1}\Delta\langle q\rangle)$であり，

$$I_1\subset(\bigcup_{q\in A1}\Delta\langle q\rangle)$$

が成り立つ．したがって，

$$b_1-a_1=\sigma(I_1)\leqq\sigma(\bigcup_{q\in A1}\Delta\langle q\rangle)\leqq\sum_{q\in A1}(\sigma(\Delta\langle q\rangle))=0$$

となるが，これは不合理である．

（イ）$\sigma(\Delta)=c>0$とすれば，

甲*は，開区間$I_2=(a_2,\ b_2)$の可符番等分割集合であるので，ある可符番集合A_2が存在して，甲*$\times A_2=I_2$が成り立つ．

また，$\Delta\subset$甲*であるので，$\sum_{q\in A_2}\Delta\langle q\rangle\subset$甲*$\times A_2$であり，

$$\sum_{q\in A_2}\Delta\langle q\rangle\subset I_2$$

が成り立つ．したがって，

$$\sigma\left(\sum_{q\in A_2}\Delta\langle q\rangle\right)=\sum_{q\in A_2}\sigma(\Delta\langle q\rangle)\leqq\sigma(I_2)=b_2-a_2$$

となるが，$\sum_{q\in A_2}\sigma(\Delta\langle q\rangle)=\infty$であるので，これは不合理である■

（25）定義C-8（μ測度）

Rの部分集合で，次のように非負数$\mu(S)$が定義されている集合Sを基礎集合といい，$\mu(S)$をSのμ測度という．

（ⅰ）Sが空集合ならば，$\mu(S)=0$．

（ⅱ）Sが空集合でないルベーグ零集合ならば，$\mu(S)=1/\infty_1$．

（ⅲ）Sのルベーグ測度が$a\ (\in R^+)$ならば，$\mu(S)=\mathbf{a}$．

（ⅳ）Sのルベーグ測度が∞ならば，$\mu(S)=\boldsymbol{\infty}$．

（ⅴ）Sがδ集合ならば，$\mu(S)=1/\infty_0$．

（ⅵ）Lが空集合でない零集合で，Δがδ集合とするとき，

$$S=L+\Delta \text{ならば，} \mu(S)=1/\infty_0.$$

（ⅶ）Lがルベーグ測度が$a\ (\in R^+)$となる集合で，Δがδ集合とするとき，

$$S=L+\Delta \text{ならば，} \mu(S)=a+(1/\infty_0).$$

$$S=L-\Delta \text{ならば，} \mu(S)=a-(1/\infty_0).$$

補足：δ集合Δが，零集合に含まれることはない．実際，Δを零集合の部分集合とすれば，Δは零集合であり，その部分集合である甲$_*$（定義C-7参照）も零集合となる．

これは，甲$_*$がルベーグ非可測集合であることに矛盾する．したがって，定義C-8の（ⅵ）における$S=L-\Delta$の場合は存在しない．

（26）定義C-9（不安定な集合）

Lをルベーグ可測集合，Δ_1，Δ_2をδ集合とするとき，

$$(L-\Delta_1)+\Delta_2$$

の形で表される集合を不安定な集合という．

（27）定義C-10（集合の基礎化）

（ⅰ）不安定な集合$S=(L-\Delta_1)+\Delta_2$において，Δ_2に含まれる原始甲集合を適当に水平移動して，Δ_1の穴を埋め，Sを基礎集合に変形することを集合の基礎化という．

（ⅱ）集合Sより，基礎化fにて得られる基礎集合を，S_fで表す．

（28）定義C-11（μ測度の拡張）

S_fが存在する不安定な集合Sに対しても，μ測度を定義し，$\mu(S)=\mu(S_f)$とする．

例：区間Ｉ＝（０，１），Ｓ＝$\sum_{q\in Q}\Phi\langle q:0\to 1\rangle$とすれば，Ｓ＝Ｉである．ここで，Ｓのルベーグ測度は１であるので，定義C-8の（ⅲ）より，$\mu(S)=\mathbf{1}$．

例：$I=\sum_{q\in Q}\Phi\langle q:a\to b\rangle$から原始甲集合$\Phi\langle q_1:a\to b\rangle$を１つ除いた集合をＴとする．Ｉはルベーグ可測集合で，$I\supset\Phi\langle q_1:a\to b\rangle$であるので，定義C-8の（ⅶ）より，

$$\mu(T)=\mu(I)-(1/\infty_0)=(\mathbf{b-a})-(1/\infty_0)=(b-a)-(1/\infty_0).$$

例：選択平面において有界な単一閉曲線で囲まれた図形の内部に属する実数の集合をＦとすれば，Ｆはδ集合であり，$\mu(F)=1/\infty_0$である．（図４参照）

実際，$F\cap\Phi\langle q\rangle=\Delta_q$として，$\Delta_q\neq\phi$であるｑすべての集合をＢとして，$\inf B=h$，$\sup B=k$とすれば，

$$B=G[\omega:h\Rightarrow k]!-\{h\}\quad(\because F\text{は図形の内部})$$

である．ここで，Ｆは有界な集合であるので，

$$\forall q,\ \Delta_q\subset I=(a,\ b)$$

となる開区間Ｉが存在する．

また，$\Delta_h=\phi$であり，Δ_qは有限個の原始甲集合の和集合であるので，

甲$_*$はΔ_qに含まれる１つの原始甲集合，

甲*＝$\sum_{q\in G[\omega:h\Rightarrow k]!}\Phi\langle q:a\to b\rangle$

とすれば，

甲$_*$$\subset F=\sum_{q\in G[\omega:h\Rightarrow k]!}\Delta_q\subset$甲*

であり，Ｆは可符番個の原始甲集合の和集合である．

したがって，Ｆはδ集合であるので，定義C-8の（ｖ）より，$\mu(F)=1/\infty_0$を得る．

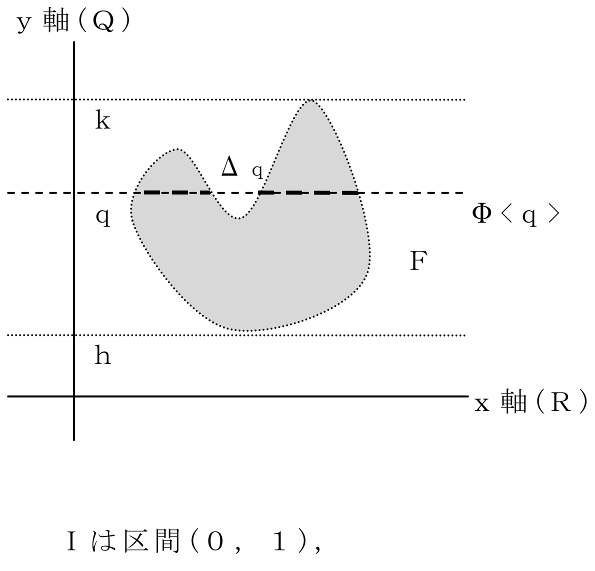


図４

例：

Ｉは区間（０，１），

甲$_1$は原始甲集合$\Phi\langle 0:0\to 1\rangle$，

甲$_2$は原始甲集合$\Phi\langle 0:1\to 2\rangle$

とすれば，Ｓ＝（Ｉ－甲$_1$）＋甲$_2$は不安定な集合であるが，S_fは区間（０，１）であり，$\mu(S_f)=\mathbf{1}$であるので，$\mu(S)=\mathbf{1}$である．

例：$\Delta_1=\Phi\langle 0:0\to 1\rangle+\Phi\langle 0:1\to 3\rangle$,

$\Delta_2=\Phi\langle 0:4\to 5\rangle+\Phi\langle 0:5\to 6\rangle+\Phi\langle 0:6\to 8\rangle$,

$S=(L-\Delta_1)+\Delta_2$

として，例えば，

（ⅰ）$\Phi\langle 0:4\to 5\rangle$を水平移動して，$\Phi\langle 0:0\to 1\rangle$の穴を埋める．

（ⅱ）$\Phi\langle 0:5\to 6\rangle$を水平移動して，$\Phi\langle 0:1\to 3\rangle$の穴の一部分である$\Phi\langle 0:1\to 2\rangle$を埋める．

（ⅲ）$\Phi\langle 0:6\to 8\rangle$の一部分である$\Phi\langle 0:6\to 7\rangle$を水平移動して，$\Phi\langle 0:1\to 3\rangle$の穴の残りである$\Phi\langle 0:2\to 3\rangle$を埋める．

この方法で基礎化すれば，

$$S_f=(L-(\Phi\langle 0\rangle\cap\{2\}))+\Phi\langle 0:7\to 8\rangle+(\Phi\langle 0\rangle\cap\{7\})$$

であるが，$(\Phi\langle 0\rangle\cap\{2\})=\phi$，$(\Phi\langle 0\rangle\cap\{7\})=\phi$であるので，

$$S_f=L+\Phi\langle 0:7\to 8\rangle.$$

例：$\Delta_1=\Phi\langle 0:a_1\to b_1\rangle+\Phi\langle 0:a_2\to b_2\rangle$（ただし，$a_1<b_1<a_2<b_2$），

$\Delta_2=\Phi\langle 0:c_1\to d_1\rangle+\Phi\langle 0:c_2\to d_2\rangle$（ただし，$c_1<d_1<c_2<d_2$），

$S=(L-\Delta_1)+\Delta_2$,

$(b_1-a_1)<(d_1-c_1)$,

$(d_1-c_1)-(b_1-a_1)<(b_2-a_2)$,

$(b_2-a_2)-\{(d_1-c_1)-(b_1-a_1)\}<(d_2-c_2)$

として，例えば，

（ⅰ）$(s-c_1)=(b_1-a_1)$となるsを考えて，$\Phi\langle 0:c_1\to s\rangle$を水平移動し，$\Phi\langle 0:a_1\to b_1\rangle$の穴を埋める．

（ⅱ）$(t-a_2)=(d_1-s)$となるtを考えて，$\Phi\langle 0:s\to d_1\rangle$を水平移動し，$\Phi\langle 0:a_2\to b_2\rangle$の穴の一部分である$\Phi\langle 0:a_2\to t\rangle$を埋める．

（ⅲ）$(u-c_2)=(b_2-t)$となるuを考えて，$\Phi\langle 0:c_2\to u\rangle$を水平移動し，$\Phi\langle 0:t\to b_2\rangle$の穴を埋める．

この方法で基礎化すれば，

$$S_f=[L-(\Phi\langle 0\rangle\cap\{t\})]+((\Phi\langle 0\rangle\cap\{s\})+(\Phi\langle 0\rangle\cap\{u\}))+\Phi\langle 0:u\to d_2\rangle$$

である．ここで，

$$O_1=(\Phi\langle 0\rangle\cap\{t\}),$$
$$O_2=(\Phi\langle 0\rangle\cap\{s\})+(\Phi\langle 0\rangle\cap\{u\})$$

とおけば，

$$S_f=(L-O_1+O_2)+\Phi\langle 0:u\to d_2\rangle$$

と表すことができる．そして，

O_1，O_2は，t，s，uが，それぞれ，$\Phi\langle 0\rangle$の元であるか否かにより異なるが，いずれの場合も，O_1，O_2は，高々有限集合であるので，零集合である．

したがって，$L-O_1+O_2$はルベーグ可測集合で，$\sigma(L-O_1+O_2)=\sigma(L)$である．

（29）定義C-12（測値）

$a \in R^{+}$とすれば，μ測度は，

$$0,\ 1/\infty_1,\ \mathbf{a},\ \boldsymbol{\infty},\ 1/\infty_0,\ a+(1/\infty_0),\ a-(1/\infty_0)$$

のいずれかの値に等しい．これらの値を測値といい，**∞**以外の測値を有界測値という．

（30）定理C-11（μ測度の一意性）

$\mu(S_f)$の値は，基礎化の方法 f によらず，常に一定である．

証明　$\Delta_1 = \sum_{q \in B1}(\Phi\langle q : a_{1q} \to b_{1q}\rangle + \Phi\langle q : a_{2q} \to b_{2q}\rangle + \cdots)$,

$\Delta_2 = \sum_{q \in B2}(\Phi\langle q : c_{1q} \to d_{1q}\rangle + \Phi\langle q : c_{2q} \to d_{2q}\rangle + \cdots)$,

$S = (L - \Delta_1) + \Delta_2$

とすれば，基礎化が可能なのは，次の２つの場合だけである．

（ｉ）$B_1 \subset B_2$，$\forall q \in B_1$，$\sum(b_{iq} - a_{iq}) \leqq \sum(d_{iq} - c_{iq})$．

（ⅱ）$B_1 \supset B_2$，$\forall q \in B_2$，$\sum(b_{iq} - a_{iq}) \geqq \sum(d_{iq} - c_{iq})$．

（ｉ）の場合は，Δ_1の穴を埋めるために，Δ_2の部分集合(原始甲集合の和集合)を水平移動するが，あるδ集合をΔとすれば，基礎化の方法によらず，

$$S_f = (L - O_1 + O_2) + \Delta,$$

O_1，O_2は高々可符番集合

と表すことができる．

ここで，$\sigma(L - O_1 + O_2) = \sigma(L)$であるので，$\mu(S_f)$の値は一定である．

（ⅱ）の場合は，Δ_1の穴の方が大きいので，Δ_2をすべて水平移動するが，あるδ集合をΔとすれば，基礎化の方法によらず，

$$S_f = (L - O_1 + O_2) - \Delta,$$

O_1，O_2は高々可符番集合

と表すことができる．

ここで，$\sigma(L - O_1 + O_2) = \sigma(L)$であるので，$\mu(S_f)$の値は一定である■

（31）定義C-13（確定集合）

A_ϕが，ϕによらず，ただ１つの正の元からなる集合のとき，Aを確定集合という．

例：$A = \{a^{+},\ b^{-},\ c^{+}\}$とすれば，$A_\phi$は，$\{a^{+}\}$と$\{c^{+}\}$のいずれかであるので，Aは確定集合である．

（32）μ測度の求め方

L_nをルベーグ可測集合，Δ_nを「δ集合または空集合」として，

$$S_n = L_n \cup \Delta_n$$

とする．ここで，L_nは正の正規集合として，

Δ_nが正の正規集合ならば $L_n \cap \Delta_n = \phi$,

Δ_nが負の正規集合ならば $L_n \supset \Delta_n$

とすれば，S_nの高々可符番個の和集合$S = \sum S_n$のμ測度は，次の方法で求められる．

（ⅰ）$x \in S$とする．xが，L_n または Δ_nに属するとき，xとnの順序対$(x,\ n)$を考える．このとき，

$$x \in L_n \text{ならば} (x,\ n) \text{は} L_n \text{と同じ符号，}$$
$$x \in \Delta_n \text{ならば} (x,\ n) \text{は} \Delta_n \text{と同じ符号}$$

を有するものとして，各々のxについて，順序対$(x,\ n)$すべての集合を考え，その集合を$E\{x\}$とする．

ただし，Δ_nが負の正規集合の場合は，$x \in L_n$であり，$x \in \Delta_n$でもあるが，$(x,\ n)$を$E\{x\}$の元として扱うときは，同じ$(x,\ n)$でも，符号が異なる$(x,\ n)^+$と$(x,\ n)^-$は異なる元とする．

（ⅱ）$[S]=\{x : x \in S,\ E\{x\}\text{が確定集合}\}$とするとき，$\mu([S])$が定義されているならば，$\mu(S)=\mu([S])$である．

例：S_1は，開区間$L_1{}^+=(0,\ 1)^+$と，δ集合$\Delta_1{}^+=\Phi\langle 0 : 1 \to 2\rangle^+$の和集合で，$S_2$は，開区間$L_2{}^+=(1,\ 3)^+$から，

$$\delta\text{集合}\ \Delta_2{}^-=\Phi\langle 0 : 1 \to 2\rangle^- \cup \Phi\langle 1 : 1 \to 2\rangle^-$$

を引いた差集合とする．このとき，

（ア）$x \in L_1{}^+$ならば，$E\{x\}=\{(x,\ 1)^+\}$．

（イ）$x \in \Phi\langle 0 : 1 \to 2\rangle^+$ならば，$E\{x\}=\{(x,\ 1)^+,\ (x,\ 2)^+,\ (x,\ 2)^-\}$．

（ウ）$x \in \Phi\langle 1 : 1 \to 2\rangle^-$ならば，$E\{x\}=\{(x,\ 2)^+,\ (x,\ 2)^-\}$．

（エ）$x \in (L_2{}^+ - \Phi\langle 0 : 1 \to 2\rangle^- \cup \Phi\langle 1 : 1 \to 2\rangle^-)$ならば，$E\{x\}=\{(x,\ 2)^+\}$．

したがって，（ア），（イ），（エ）の場合の$E\{x\}$は，確定集合であるので，

$$\begin{aligned}[S]&=\{x : x \in S,\ E\{x\}\text{が確定集合}\}\\ &=(L_1{}^+ + L_2{}^+) - \Phi\langle 1 : 1 \to 2\rangle^-\end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned}\mu(S_1+S_2)&=\mu([S])\\ &=\mu((L_1+L_2)-(\Delta_2-\Delta_1))\\ &=\mu((L_1+L_2)-\Phi\langle 1 : 1 \to 2\rangle)\\ &=\mu(L_1)+\mu(L_2)-(1/\infty_0)\\ &=\mathbf{1}+\mathbf{2}-(1/\infty_0)\\ &=\mathbf{3}-(1/\infty_0)\\ &=3-(1/\infty_0).\end{aligned}$$

例：S_1は，開区間$L_1{}^+=(0,\ 1)^+$と，δ集合$\Delta_1{}^+=\Phi\langle 0 : 3 \to 4\rangle^+$の和集合で，$S_2$は，開区間$L_2{}^+=(1,\ 3)^+$から，

$$\delta\text{集合}\ \Delta_2{}^-=\Phi\langle 0 : 1 \to 2\rangle^-$$

を引いた差集合とする．このとき，

（ア）$x \in L_1{}^+$ならば，$E\{x\}=\{(x,\ 1)^+\}$．

（イ）$x \in \Delta_2{}^-$ならば，$E\{x\}=\{(x,\ 2)^+,\ (x,\ 2)^-\}$．

（ウ）$x \in (L_2{}^+ - \Delta_2{}^-)$ならば，$E\{x\}=\{(x,\ 2)^+\}$．

（エ）$x \in \Delta_1{}^+$ならば，$E\{x\}=\{(x,\ 1)^+\}$．

したがって，（ア），（ウ），（エ）の場合のＥ｛ｘ｝は，確定集合であるので，

$$[S]=\{x : x\in S,\ E\{x\}が確定集合\}$$
$$=L_1{}^{+}+(L_2{}^{+}-\Delta_2{}^{-})+\Delta_1{}^{+}$$

となる．ここで，$\Delta_1{}^{+}$を水平移動して，$\Delta_2{}^{-}$と重ねれば，

$$[S]_f=L_1{}^{+}+L_2{}^{+}$$

であるので，

$$\mu(S_1+S_2)=\mu([S]_f)$$
$$=\mu(L_1+L_2)$$
$$=\mathbf{1}+\mathbf{2}$$
$$=\mathbf{3}.$$

補足：「(32) μ 測度の求め方」で定義された集合$L_n\cup\Delta_n$において，

L_nが正の正規集合，

Δ_nが負の正規集合

の場合は，$\Delta_n\subset L_n$であるので，

（ｉ）L_nは零集合ではない．実際，仮にL_nを零集合とすれば，零集合の部分集合は零集合であるので，δ集合Δ_nが零集合となり，Δ_nがルベーグ非可測集合であることに反する．

（ⅱ）符号がついた集合$L_n\cup\Delta_n$を正規化すれば，$L_n-\Delta_n$になる．

補足：ＲＱ平面のｘ座標(横軸の座標)はＲによる座標で，ｙ座標(縦軸の座標)はＱによる座標であるので，ｘ軸には連続濃度の点が存在し，ｙ軸には可符番個の点しか存在しない．

このような点の集合として，ＲＱ平面が構成されていることを考えれば，ＲＱ平面上の１点は，横軸方向の長さが$1/\infty_1$で，縦軸方向の長さが$1/\infty_0$である微小な長方形であると考えることができる．

$1/\infty_1$と$1/\infty_0$の大きさを比較すれば，長方形というよりも，太さが$1/\infty_1$で，長さが$1/\infty_0$の紐状の図形と考える方が当たっているかもしれないが，ここでは，長方形と表現することにする．

ＲＱ平面を，上記のように考えれば，ＲＱ平面の部分集合である選択平面上の１点も，横軸方向の長さが$1/\infty_1$で，縦軸方向の長さが$1/\infty_0$である微小な長方形であるので，そのμ測度(面積)は，

$$(1/\infty_1)(1/\infty_0)=1/\infty_1$$

である．この値は，ｘ軸上の１点のμ測度(長さ)の値と一致する．

同様に考えれば，ｘ軸上にもｙ軸上にも連続濃度の点が存在するデカルト平面上の１点は，横軸方向の長さが$1/\infty_1$で，縦軸方向の長さも$1/\infty_1$である微小な正方形であるので，そのμ測度(面積)は，当然，

$$(1/\infty_1)(1/\infty_1)=1/\infty_1$$

である．

第４節　μ 測度の加法性

この節では，$S_n = L_n \cup \Delta_n$ を「(32) μ 測度の求め方」で定義された集合とするとき，S_n の高々可符番個の和集合 $S = \sum S_n$ において，

$$\mu(S) = \sum \mu(S_n)$$

が成り立つか否かを調べる．

当然であるが，初めに，$\sum \mu(S_n)$ の意味を明確にしなくてはならない．$\mu(S_n)$ は，有界測値であるので，$a \in R^+$ とすれば，

$$0,\quad 1/\infty_1,\quad \mathbf{a},\quad 1/\infty_0,\quad a+(1/\infty_0),\quad a-(1/\infty_0)$$

のいずれかであるが，これらの数はすべて，

$$a + x,\quad a \in R^+ \cup \{0\},\quad x \in \Pi \text{ または } x \subset \Pi$$

のように表すことができる．したがって，

$$\sum \mu(S_n) = \sum (a_n + x_n) = \sum a_n + \sum x_n$$

と考えるのが最も自然であるので，

$$\sum a_n \quad \cdots ①$$
$$\sum x_n \quad \cdots ②$$

の値の求め方を定義すればよい．

ここで，①は従来と同じ方法，すなわち，$\varepsilon\delta$ 論法で定義すれば，「おわりに」で述べたように，それは，超準的な定義と同値である．次に，②の定義であるが，初めに，若干の用語と記号を定める．

（ⅰ）高々可符番個の「Π の元 または 部分領域」を項とする数列 $\{x_n\}$ を無限小列という．

（ⅱ）無限小列 $\{x_n\}$ の各項について，

x_n が確定数ならば，$y_n = x_n$．

x_n が不定数ならば，$y_n \in x_n$

となるように定義された数列 $\{y_n\}$ を，無限小列 $\{x_n\}$ の成分列という．

（ⅲ）無限小列 $\{x_n\}$ の成分列すべての領域を，$\Psi\{x_n\}$ で表す．

（ⅳ）成分列 $\{y_n\}$ において，

すべての正の項からなる部分列を，$\{y_n\}$ の正項列といい，$\{u_i\}$ で表す．

すべての負の項からなる部分列を，$\{y_n\}$ の負項列といい，$\{v_j\}$ で表す．

（ⅴ）成分列 $\{y_n\}$ において，

$\mathrm{Amax}\{u_i\}$ に等しい項すべての和を $\sum[\mathrm{Amax}\{u_i\}]$ で表す．

$\mathrm{Amax}\{v_j\}$ に等しい項すべての和を $\sum[\mathrm{Amax}\{v_j\}]$ で表す．

例：無限小列 $\{x_n\}$ を，$1/\infty_0$，Π_1，$1/\infty_0$，Π_1，$1/\infty_0$，Π_1，・・・とする．

（ア）数列 $\{y_n\}$：

$1/\infty_0$，$1/\infty_1$，$1/\infty_0$，$1/\infty_1$，$1/\infty_0$，$1/\infty_1$，・・・

は，無限小列 $\{x_n\}$ の成分列であり，

$\{u_i\}$：$1/\infty_0$，$1/\infty_1$，$1/\infty_0$，$1/\infty_1$，$1/\infty_0$，$1/\infty_1$，・・・

$\{v_j\}$ は存在しない．

ここで，$\mathrm{Amax}\{u_i\} = 1/\infty_0$ より，

Σ [Amax{u_i}]=($1/\infty_0$)+($1/\infty_0$)+($1/\infty_0$)+・・・
Σ [Amax{v_j}]は存在しない.

（イ） 数列{y_n}：

$1/\infty_0$, 0, $1/\infty_0$, 0, $1/\infty_0$, 0・・・

も，無限小列{x_n}の成分列であり，

{u_i}：$1/\infty_0$, $1/\infty_0$, $1/\infty_0$, ・・・
{v_j}は存在しない.

ここで，Amax{u_i}=$1/\infty_0$より，

Σ [Amax{u_i}]=($1/\infty_0$)+($1/\infty_0$)+($1/\infty_0$)+・・・
Σ [Amax{v_j}]は存在しない.

（ウ） 数列{y_n}：

$1/\infty_0$, $-1/\infty_1$, $1/\infty_0$, $-1/\infty_2$, $1/\infty_0$, $-1/\infty_3$, ・・・

も，無限小列{x_n}の成分列であり，

{u_i}：$1/\infty_0$, $1/\infty_0$, $1/\infty_0$, ・・・
{v_j}：$-1/\infty_1$, $-1/\infty_2$, $-1/\infty_3$, ・・・

ここで，Amax{u_i}=$1/\infty_0$，Amax{v_j}=$-1/\infty_1$より，

Σ [Amax{u_i}]=($1/\infty_0$)+($1/\infty_0$)+($1/\infty_0$)+・・・
Σ [Amax{v_j}]=$-1/\infty_1$.

(33) 定義C-14（無限小列の和）

（ｉ） 無限小列{x_n}の各項がすべて同じ確定数xに等しい場合は，

{x_n}が有限数列ならば，$\Sigma x_n = x$.
{x_n}が無限数列ならば，$\Sigma x_n = \infty_0 x$.

（ii） 無限小列{x_n}の成分列を{y_n}で表すとき，Σx_nを次のように定める.

{y_n}の正項列を{u_i}，　{y_n}の負項列を{v_j}，

$$\Sigma x_n = \bigcup_{\{y_n\}\in\Psi\{x_n\}} (\Sigma [\mathrm{Amax}\{u_i\}] + \Sigma [\mathrm{Amax}\{v_j\}]).$$

ただし，Σ [Amax{u_i}]，Σ [Amax{v_j}]の少なくとも片方が存在しない場合は，存在しない方の値を0と約束する.

補足：定義C-14の(ii)において，Σ [Amax{u_i}]，Σ [Amax{v_j}]の両方が存在しない無限小列{x_n}は，定数数列{0}だけであるが，このときは，約束により両方の値が0であるので$\Sigma x_n = 0$となる．この結果は，定義C-14の(i)から得られる結果と一致する.

例：無限小列{x_n}を，

$1/\infty_0$, Π_1, $1/\infty_0$, Π_1, $1/\infty_0$, Π_1, ・・・

とすれば，任意の成分列{y_n}に対して，

Σ [Amax{u_i}]=Σ_0.
Σ [Amax{v_j}]は存在しないか，または，Σ [Amax{v_j}]$\in \Pi_1$

となるので，

$$\Sigma x_n = \Sigma_0.$$

(34) 定理C-12

$S_n = L_n \cup \Delta_n$を「(32) μ測度の求め方」で定義された集合とすれば，S_nの高々可符番個の和集合$S = \sum S_n$において，$\mu(S) = \sum \mu(S_n)$が成り立つための必要十分条件は，$\sum \mu(S_n)$が測値になることである．

証明

必要条件

$\mu(S) = \sum \mu(S_n)$が成り立つとする．このとき，$\mu(S)$は測値であるので，

$\sum \mu(S_n)$は測値である．

十分条件

$\sum \mu(S_n)$が測値ならば$\mu(S) = \sum \mu(S_n)$が成り立つ・・・(＊)

を証明すればよい．初めに，記号Δ^+，Δ^-の意味を次のように定める．

〈a〉 Δ_nが正の正規集合であるnすべての集合をAとするとき，$\Delta^+ = \bigcup_{n \in A} \Delta_n$.

〈b〉 Δ_nが負の正規集合であるnすべての集合をBとするとき，$\Delta^- = \bigcup_{n \in B} \Delta_n$.

(ⅰ) Δ_nがすべて空集合ϕの場合：

$S_n = L_n$であり，L_nはルベーグ可測集合であるので，共通値を用いれば，$\mu(S_n)$の値は，$1/\infty_1$， $\mathbf{a}$ $(a \in R^+)$のいずれかである．したがって，次の(ア)～(ウ)に留意すれば，ルベーグ測度の完全加法性より(＊)を得る．

(ア) $\forall n$，S_nが零集合でないならば，S_nのルベーグ測度とμ速度は一致する．

(イ) 「$\exists n_1$，S_{n_1}が零集合」であり「$\exists n_2$，S_{n_2}が零集合でない」でもあるならば, 零集合のμ速度$1/\infty_1$を$\mathbf{0}$に置き換えても$\sum \mu(S_n)$の値は変わらない．

(ウ) $\forall n$，S_nが零集合ならば，$S = \sum S_n$も零集合である．また，$\sum \mu(S_n) = \infty_0(1/\infty_1) = 1/\infty_1$である．

(ⅱ) $\sum \mu(L_n)$が有界測値で，$\Delta_n(\neq \phi)$の個数が有限個の場合：

(ア) $\Delta_n(\neq \phi)$がすべて正の正規集合ならば，

δ集合の有限個の和集合はδ集合であるのでΔ^+はδ集合，

$1/\infty_0$の有限個の和は$1/\infty_0$.

$\therefore \quad \mu(S) = \sum \mu(L_n) + (1/\infty_0) = \sum \mu(S_n)$を得る．

(イ) $\Delta_n(\neq \phi)$がすべて負の正規集合ならば，

δ集合の有限個の和集合はδ集合であるのでΔ^-はδ集合，

$-(1/\infty_0)$の有限個の和は$-(1/\infty_0)$.

$\therefore \quad \mu(S) = \sum \mu(L_n) - (1/\infty_0) = \sum \mu(S_n)$を得る．

(ウ) 「$\exists n_1$，Δ_{n_1}が正の正規集合」であり「$\exists n_2$，Δ_{n_2}が負の正規集合」でもあるならば，

$$(1/\infty_0) + \{-(1/\infty_0)\} = \Pi_0$$

より，$\sum \mu(S_n) = \sum \mu(L_n) + \Pi_0$となる．この値は測値ではない．

(ⅲ) $\sum \mu(L_n)$が有界測値で，$\Delta_n(\neq \phi)$の個数が無限個の場合：

(ア) $\Delta_n(\neq \phi)$がすべて正の正規集合ならば，$\infty_0(1/\infty_0) = \Sigma_0$より，

$\sum \mu(S_n) = \sum \mu(L_n) + \Sigma_0$となる．この値は測値ではない．

(イ) $\Delta_n(\neq \phi)$がすべて負の正規集合ならば，$\infty_0\{-(1/\infty_0)\} = -\Sigma_0$より，

$\sum \mu(S_n) = \sum \mu(L_n) - \Sigma_0$となる．この値は測値ではない．

（ウ）「$^{\exists}n_1$，Δ_{n1}が正の正規集合」であり「$^{\exists}n_2$，Δ_{n2}が負の正規集合」でもあるならば，

（ウ－①）正の正規集合が無限個で，負の正規集合が有限個のときは，

$$\sum\mu(S_n)=\sum\mu(L_n)+\Sigma_0\cup\Pi_0$$

（ウ－②）正の正規集合が有限個で，負の正規集合が無限個のときは，

$$\sum\mu(S_n)=\sum\mu(L_n)-\Sigma_0\cup\Pi_0$$

（ウ－③）正の正規集合が無限個で，負の正規集合も無限個のときは，

$$\sum\mu(S_n)=\sum\mu(L_n)+\Sigma_0-\Sigma_0=\sum\mu(L_n)+\Theta_0$$

となる．いずれのときも$\sum\mu(S_n)$の値は測値ではない．

（ⅳ）$\sum\mu(L_n)=\boldsymbol{\infty}$で，$\Delta_n(\neq\phi)$の個数が有限個の場合：

（ア）$\Delta_n(\neq\phi)$がすべて正の正規集合ならば，

$$S=(\sum L_n+\sum\Delta_n)\supset\sum L_n$$

であるので，Ｓのルベーグ測度は∞である．したがって，$\mu(S)=\boldsymbol{\infty}$であるので，

$$\sum\mu(S_n)=\sum\mu(L_n)+(1/\infty_0)=\boldsymbol{\infty}+(1/\infty_0)=\boldsymbol{\infty}=\mu(S)$$

を得る．

（イ）$\Delta_n(\neq\phi)$がすべて負の正規集合ならば，

$$S=\sum L_n-\sum\Delta_n$$

で，$\sum\Delta_n$は有界集合であるので，Ｓのルベーグ測度は∞である．したがって，$\mu(S)=\boldsymbol{\infty}$であるので，

$$\sum\mu(S_n)=\sum\mu(L_n)-(1/\infty_0)=\boldsymbol{\infty}-(1/\infty_0)=\boldsymbol{\infty}=\mu(S)$$

を得る．

（ウ）「$^{\exists}n_1$，Δ_{n1}が正の正規集合」であり「$^{\exists}n_2$，Δ_{n2}が負の正規集合」でもあるならば，

$$S=(\sum L_n-\Delta^-)+\Delta^+$$

であり，Δ^+とΔ^-は，それぞれ，有界集合であるので，Ｓのルベーグ測度は∞である．したがって，$\mu(S)=\boldsymbol{\infty}$であるので，

$$\begin{aligned}\sum\mu(S_n)&=\sum\mu(L_n)-(1/\infty_0)+(1/\infty_0)\\&=\boldsymbol{\infty}-(1/\infty_0)+(1/\infty_0)\\&=\boldsymbol{\infty}\\&=\mu(S)\end{aligned}$$

を得る．

（ｖ）$\sum\mu(L_n)=\boldsymbol{\infty}$で，$\Delta_n(\neq\phi)$の個数が無限個の場合：

（ア）$\Delta_n(\neq\phi)$がすべて正の正規集合ならば，

$$S=(\sum L_n+\sum\Delta_n)\supset\sum L_n$$

であるので，Ｓのルベーグ測度は∞である．したがって，$\mu(S)=\boldsymbol{\infty}$であるので，

$$\sum\mu(S_n)=\sum\mu(L_n)+\Sigma_0=\boldsymbol{\infty}+\Sigma_0=\boldsymbol{\infty}=\mu(S)$$

を得る．

（イ）$\Delta_n(\neq\phi)$がすべて負の正規集合ならば，

$$\sum\mu(S_n)=\sum\mu(L_n)-\Sigma_0=\boldsymbol{\infty}-\Sigma_0=\boldsymbol{\infty}\cup\Theta_0$$

となる．この値は測値ではない．

（ウ）「$\exists n_1$，Δ_{n1}が正の正規集合」であり「$\exists n_2$，Δ_{n2}が負の正規集合」でもあるならば，

（ウ－①）正の正規集合が無限個で，負の正規集合が有限個のときは，Δ^-が有界集合であるので，Ｓのルベーグ測度は∞である．したがって，$\mu(S)=\boldsymbol{\infty}$であるので，

$$\sum\mu(S_n)=\sum\mu(L_n)+\Sigma_0\cup\Pi_0=\boldsymbol{\infty}+\Sigma_0\cup\Pi_0=\boldsymbol{\infty}=\mu(S)$$

を得る．

（ウ－②）正の正規集合が有限個で，負の正規集合が無限個のときは，

$$\begin{aligned}\sum\mu(S_n)=\sum\mu(L_n)-\Sigma_0\cup\Pi_0\\ =\boldsymbol{\infty}-\Sigma_0\cup\Pi_0\\ =\boldsymbol{\infty}\cup\Theta_0\end{aligned}$$

となる．この値は測値ではない．

（ウ－③）正の正規集合が無限個で，負の正規集合も無限個のときは，

$$\sum\mu(S_n)=\sum\mu(L_n)+\Sigma_0-\Sigma_0=\boldsymbol{\infty}+\Theta_0=\boldsymbol{\infty}\cup\Theta_0$$

となる．この値は測値ではない．

上記(ｉ)～(ｖ)において，$\sum\mu(S_n)$が測値になる場合だけをみれば，$\mu(S)=\sum\mu(S_n)$が成り立っている■

補足：定理C-12の証明を参照すれば，$\sum\mu(S_n)$が測値になるのは次の場合だけであることが分かる．

（ｉ）$\sum\mu(L_n)$が有界測値ならば，

（ア）$\forall n$，$\Delta_n=\phi$．

（イ）$\Delta_n(\neq\phi)$の個数が有限個で，そのすべてが正の正規集合．

（ウ）$\Delta_n(\neq\phi)$の個数が有限個で，そのすべてが負の正規集合．

（ⅱ）$\sum\mu(L_n)=\boldsymbol{\infty}$ならば，

（ア）$\forall n$，$\Delta_n=\phi$．

（イ）$\Delta_n(\neq\phi)$の個数が有限個．

（ウ）$\Delta_n(\neq\phi)$の個数が無限個で，その中に含まれる負の正規集合が有限個．

(35) 結論

「疑問Ｃの解答例」は，開区間$\{x:0<x<1,\ x\in R\}$の，可符番等分割集合⊿の『測度』を$1/\infty_0$として，長さがａである区間をＩとするとき，次のような『測度』を明確に定義することが目的であった．

（ｉ）$a+(1/\infty_0)$は，和集合$I\cup$⊿の『測度』を表す．ただし，$I\cap$⊿$=\phi$．

（ⅱ）$a-(1/\infty_0)$は，差集合$I-$⊿の『測度』を表す．ただし，⊿$\subset I$．

この解答例では，ルベーグ可測集合にδ集合を付加して得られる集合の測度としてμ測度を定義したが，定義C-8を見れば，μ測度は，従来のルベーグ測度の拡張であると考えることができる．実際，例えて言えば，実数に虚数単位を付加して複素数を定義するのと似た方法による拡張になっている．そして，μ測度が(ｉ)と(ⅱ)の条件を満たしていることは明らかであるので，μ測度は『測度』の一例である．

著者略歴

1948　誕生.

1971　立命館大学理工学部数学物理学科卒業.

　　　高等学校数学科教諭.

1973　数学セミナー（日本評論社）のNOTE欄に

　　　「累次積分に関する一公式」を投稿し掲載される.

1979　日本数学教育学会(第61回宇都宮大会)にて

　　　「実数の拡張に関する一例」を発表.

1988　日本数学教育学会(第70回静岡大会)にて

　　　「数直線上の点の大きさについて」を発表.

2009　高等学校教頭定年退職.

2011　日本数学教育学会(第93回神奈川大会)にて

　　　「拡大実数論」を発表.

2016　著書「拡大実数論の源流」を自費出版.

著　者：西　田　正　夫

発行者：西　田　正　夫

住　所　〒４３２－８００３

静岡県浜松市中区和地山２－８－１５

e-mail：kakudaijissuu@yahoo.co.jp

発行日：平成２８年２月３日

印刷社：ちょ古っ都印刷工房

http://www.chokotto.jp/