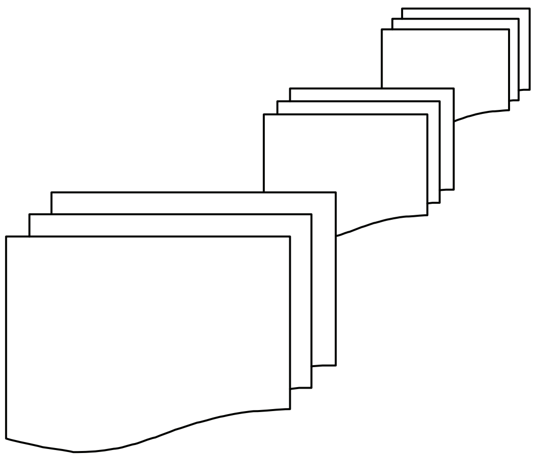
学生時代の思い出
～数学～



西田正夫著

は じ め に

この小冊子は，私が大学生のときに研究し，結論までたどりつくことができた３つの問題について，当時のことを思い出しながら，その研究結果を整理したものです．数学に興味がある学生や，高校の数学教員を志望している皆さんに気楽に読んでいただければ幸いです．

私は，小学生のころより国語がきらいで，特に作文が苦手でした．高校３年のとき，大学に進学すると，卒業論文を書かなければ卒業できないという話を聞き，自分は本当に卒業できるだろうかと，入試に合格する前から，本気で心配していました．卒業論文は，どうやら，Ｂ４レポート用紙で１００枚程度書かなければ認めてもらえないらしいということで，とてもそんなには書けないだろうと思っていたわけです．

しかし，留年するのもいやでしたので，他の学生が，１年かけて書くのであれば，自分は４年かけて書こう，そうすれば，なんとかなるのではないかと思い，私は，大学に入った当初から卒業論文の準備を始めました．

何を研究すればいいのか，何を書けばいいのか，基本的なことを全く知りませんでしたので，とりあえず，中学３年のときに苦い思いをした角の３等分について，もう一度考えてみることにしました．(第１章参照)

大学２年の６月に，その研究が完成し，レポート用紙に書いてみたところ，わずか３ページで終わってしまいました．これでは，とても卒業論文にはならないので，次の問題をさがすことにしたのですが，私には，高校３年のときに，疑問のまま放置していた積分の問題があり，この問題の研究に専念することを決めました．しかし，この問題も大学３年の９月に完成し，わずか４ページで終わってしまいました．(第２章参照)

さいわい，そのころには，私が在籍していた学科の数学専攻生には卒業論文がないことがわかり，ほっとすると同時に，たとえ提出を求められなくても，なんとかして，これが私の卒業論文だと思えるような研究をしてから卒業したいと考えるようになっていました．

当時，私が考えていたのは，新しい実数を創って，可能的無限（$\varepsilon\delta$論法）と実無限（一般集合論）を統一するという夢の理論でした．そして，この段階では，全くの雲をつかむような状態でしたが，他に興味をひく問題を思いつかなかったこともあり，大学時代の最後の研究として，この問題に挑戦することを決めました．

数を新しく創るということは，思っていた以上に大変で，卒業までに完成させることはできませんでしたが，導入の部分だけは，なんとか仕上げることができました．なお，その続きの理論は，大学を卒業し，高校の教員になってからも研究を続けることで，最近，ようやく完成させることができました*.

この研究を始めた大学３年のときから数えると，４７年間もの歳月が流れたことになりますが，今では，自分が納得するところまでできて，ページ数がＡ４で２７７ページにもなりましたので，ようやく目標が達成されて，これで，本当に，大学を卒業することができたと思えるようになりました．

この小冊子では，その全部を掲載することはできませんが，大学卒業までにまとめることができた範囲，すなわち，導入の部分を掲載することにします．(第３章参照)

＊参考文献：「拡大実数論の源流」（西田正夫著　自費出版）
（URL）http://www.geocities.jp/kakudaijissuu/　に掲載

目　　次

第１章　初等的方法による任意の角の近似的３等分の方法

私が中学生のとき，強く記憶に残った疑問がありました．それは，中学３年のときです．ある授業で，三角定規，コンパス，分度器を持参するようにいわれていたのですが，うっかり分度器を忘れてしまいました．

隣の生徒に借りても特に問題はなかったのですが，私は，その生徒の邪魔をしてはいけないと思い，その場で分度器を作ることにしました．分度器は，通常は，半円 180 度までのものですので，コンパスで円を書き，直径を書けば，後は，半円を 180 等分することで分度器ができます．

180 度を２つの 90 度に分けること，90 度を３つの 30 度に分けることは，三角定規の内角を用いれば簡単にできます．したがって，次は，30 度を３つの 10 度に分けようと思いました．初めは，それも簡単にできるものと思っていましたが，実際にやってみると，これがなかなかできない．試行錯誤を繰り返しましたが失敗の連続でした．結局，分度器を作ることができないまま授業は終わり，30 度を３等分することができなかったという苦い記憶だけが残り，それが，私の忘れることのできない疑問になってしまいました．

以来，三角定規とコンパスだけによる角の３等分の作図を繰り返し，悪戦苦闘する毎日が続きました．図が小さいと，鉛筆の芯の太さによる誤差が大きく影響するので，できるだけ円を大きく書き，できるだけ鉛筆の芯を細くして，正確に線をひくようにしました．どのような角でも，工夫すれば作図できるものと思っていた私は，授業で習った色々な作図方法を利用して確かめました．私が試した方法は主として次の３つです．

（ア）弦を３等分すれば角の３等分になるか．
（イ）弦の３等分点に垂線を立てれば角の３等分になるか．
（ウ）小さい角ならば（ア）または（イ）の方法がつかえるか．

このときは，成功しないのは，作図のしかたが悪いせいだと思い込んでいましたので，繰り返し繰り返し書き続けました．ときどき，ほぼ３等分に見える図が書けたときは，これでできたとわくわくしましたが，確認のために，図の大きさを変えて書き直すと，また失敗，がっかりすることの繰り返しでした．

高校生になっても，作図方法を，なんとか発見できないものかと思い，中学のときと同じように，試行錯誤をしてみましたが，何の成果もなく終わりました．

大学生になってからは，卒業論文を書くつもりで，もう一度，じっくりとやってみることにしたのですが，そのときは「これだけ試して成功しないのだから，もしかしたら，自分がさがしている作図方法は存在しないのではないか．そして，もしも存在しないのならば，近似的な３等分点の作図方法を考えて，それが近似的な３等分点であることを証明できれば，中学以来の疑問を解決したことになるのではないか」と思うようになっていました．以下に述べる内容は，そのとき考えた方法です．証明のための計算には，すこし手間がかかりますが，私なりに納得できる方法だと思っています．

［定理１］　２の奇数乗 2^{2m+1} を３で割れば余りは常に２となる．ただし，$m=0,\ 1,\ 2,\cdots$

証明　数学的帰納法を用いる．

$m=0$ のときは，$2^{2\cdot 0+1}=2=3\cdot 0+2$ であるので明らか．

$m=k-1$ のとき，$2^{2(k-1)+1}=3p+2$（p は整数）と仮定すれば，

$m=k$ のときは，$2^{2k+1}=4\cdot 2^{2(k-1)+1}=4(3p+2)=3(4p+2)+2$　を得る■

［定理２］　任意の角を，$\angle XOY$　とする．この角を 2^{2m+1} 等分して，その等分点を順に，

$$K_0=X,\quad K_i\ (i=1,\ 2,\cdots,\ 2^{2m+1}-1),\quad K_{2^{2m+1}}=Y$$

とする．（２の累乗に当分する作図は，三角定規とコンパスだけでできる）

このとき，$\angle XOY$　の真の３等分点は，

$$i=(2^{2m+1}-2)/3,\quad j=(2^{2m+2}-1)/3$$

とすれば，$\angle K_iOK_{i+1}$　と　$\angle K_jOK_{j+1}$　に１つずつ存在する．

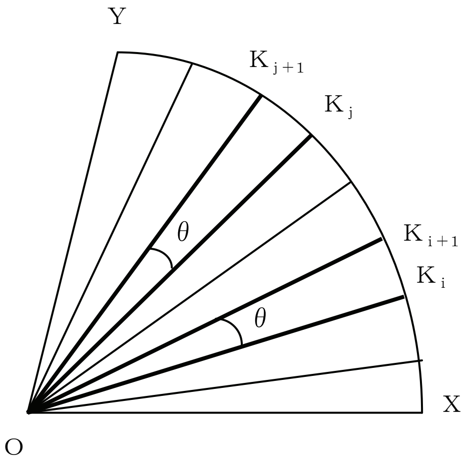
証明　今，∠XOY　は，2^{2m+1} 等分されているので，それぞれの角を，さらに正確に３等分することができたとすれば，∠XOY　は，$3\cdot 2^{2m+1}$ 個に等分されたことになる．

したがって，$3\cdot 2^{2m+1}$個の中の３分の１，すなわち，2^{2m+1}個を集めれば，その和は，∠XOY／３　に等しいので，Xの側から順序よく集めれば，定理１より，∠XOY　の３等分点の一つは，$\angle K_iOK_{i+1}$　に存在する．また，

$$\{(2^{2m+1}-2)/3\}+1+\{(2^{2m+1}-2)/3\}=(2^{2m+2}-1)/3$$

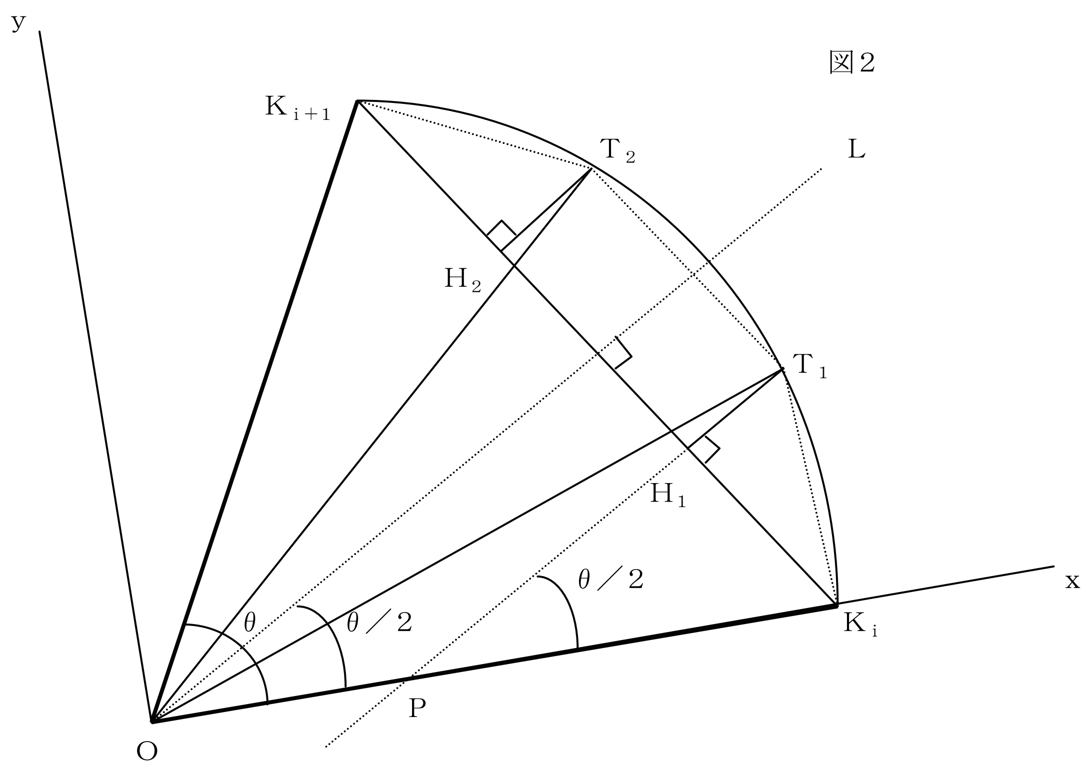
であるので，もう１つの３等分点は，$\angle K_jOK_{j+1}$　に存在する■

図１



次に，$\angle K_iOK_{i+1}=\theta$ として，図２を作図する．

図２



【作図の手順】

（１）弦K_iK_{i+1}を３等分して，その３等分点をH_1，H_2とする．

（２）H_1，H_2において，弦K_iK_{i+1}に垂線を立て，孤K_iK_{i+1}との交点をT_1，T_2とする．

（３）T_1，T_2と，中心Oを結ぶ．

［定理３］　図２において，$\theta \fallingdotseq 0$ のとき，

$$\text{弦}K_iT_1 = \text{弦}K_{i+1}T_2 \fallingdotseq \text{弦}T_1T_2$$

が成り立つ.

証明　$K_iH_1 = H_1H_2 = H_2K_{i+1}$ より，$K_iH_1 = T_1T_2 = H_2K_{i+1}$　・・・①

ピタゴラスの定理より，$K_iT_1{}^2 = K_iH_1{}^2 + T_1H_1{}^2$ $(=K_{i+1}T_2{}^2)$　・・・②

②より，

$$K_iT_1 = \sqrt{K_iH_1{}^2 + T_1H_1{}^2} = K_iH_1\sqrt{1+(T_1H_1{}^2/K_iH_1{}^2)} \quad \cdots ③$$

であるが，

$$\theta \to 0 \quad \text{のとき，} (T_1H_1{}^2/K_iH_1{}^2) \to 0$$

が成り立つ.

実際，図２のように，直交座標を導入して，直線OLは $\angle K_iOK_{i+1}$ の２等分線で，直線 T_1P は線分 T_1H_1 の延長とする．ここで，$K_i(r,\ 0)$ とすれば，$K_{i+1}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$，$P(r/3,\ 0)$ である.

直線 T_1P の方程式は，

$$y = x\tan(\theta/2) - (r/3)\tan(\theta/2) \quad \cdots ④$$

円の方程式は，

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \cdots ⑤$$

④を⑤に代入して整理すれば，次の，ｘについての２次方程式を得る.

$$9x^2\sec^2(\theta/2) - 6rx\tan^2(\theta/2) + \{\tan^2(\theta/2) - 9\}r^2 = 0$$

（ただし，θ は第１象限の角としてよいので，$x>0$ である）

この方程式を，解の公式を用いて解けば，

$$x = \{r\sin^2(\theta/2) + r\cos(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)}\}/3 \quad \cdots ⑥$$

⑥を④に代入すれば，

$$y = \{r\tan(\theta/2)\sin^2(\theta/2) + r\sin(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)} - r\tan(\theta/2)\}/3 \quad \cdots ⑦$$

したがって，点 T_1 の座標は（⑥，⑦）である．また，直線 K_iK_{i+1} の方程式は，

$$y + x\cot(\theta/2) - r\cot(\theta/2) = 0$$

であるので，点と直線の距離を求める公式より，

$$\begin{aligned} T_1H_1 = {} & \Big| [\{r\tan(\theta/2)\sin^2(\theta/2) + r\sin(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)} - r\tan(\theta/2)\}/3] \\ & + [\{r\sin^2(\theta/2) + r\cot(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)}\}/3]\cot(\theta/2) - r\cot(\theta/2) \Big| \Big/ \sqrt{1+\cot^2(\theta/2)} \\ = {} & (r/3)\sin(\theta/2)\Big| \tan(\theta/2)\sin^2(\theta/2) + \sin(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)} \\ & -\tan(\theta/2) + \cot(\theta/2)\{\sin^2(\theta/2) + \cos(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)} - 3\} \Big| \end{aligned}$$

を得る.

また，

$$K_i H_1 = \{2r\sin(\theta/2)\}/3$$

であるので，

T_1H_1/K_iH_1

$$=(1/2)\Big|\tan(\theta/2)\sin^2(\theta/2)+\sin(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)}-\tan(\theta/2)$$

$$+\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)+\cot(\theta/2)\{\cos(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)}-3\}\Big|$$

$$\leqq(1/2)\Big[\Big|\tan(\theta/2)\sin^2(\theta/2)+\sin(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)}-\tan(\theta/2)$$

$$+\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)\Big|+\Big|\cot(\theta/2)\{\cos(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)}-3\}\Big|\Big]$$

ここで，$\Big|\cot(\theta/2)\{\cos(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)}-3\}\Big|$ を，{ }内の分子の有理化による変形をすれば，

$$\Big|\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)\{9+\cos^2(\theta/2)\}\Big/\{\cos(\theta/2)\sqrt{9-\sin^2(\theta/2)}+3\}\Big|$$

となるので，

$\theta \to 0$ のとき，$(T_1H_1/K_iH_1) \to 0$ すなわち，$(T_1H_1{}^2/K_iH_1{}^2) \to 0$

が成り立つ．　したがって，①と③より，

$\theta \fallingdotseq 0$ のとき，弦K_iT_1(＝ 弦$K_{i+1}T_2$) ≒ 弦T_1T_2

を得る■

【結　論】　定理１，定理２，定理３より，次の作図方法を得る．

（ⅰ）θが十分小さくなるまで，角の2^{2m+1} 等分を続ける．

（ⅱ）上記の【作図の手順】に従って作図する．T_2 が近似的３等分点の１つである．

（ⅲ）もう１つの近似的３等分点も同様に作図する．

追記：「角の３等分問題」は，古代ギリシャの時代から考えられてきた有名な問題ですが，当時の私は，この問題についてよく知りませんでした．しかし後になって，角度により，３等分できる角と，できない角があることを知りました．なお，作図するとき使ってよい道具とその使い方は，

定　　規：与えられた２点を通る直線をひくことができる

コンパス：与えられた２点の片方を中心とし他方を通る円を書くことができる

の２つだけであり，私が，中学生のときに利用した使い方，すなわち，三角定規の内角を用いるのは禁止．

ただし，三角定規の内角（９０度，６０度，４５度，３０度）は全て作図できる角度ですので，ある角を，三角定規の内角を用いて３等分しても，その角が，定規とコンパスだけで，３等分できることに変わりはありません．最後に，３０度を３つの１０度に分けることは不可能であることが証明されます．中学生のときに悪戦苦闘しましたが，作図できなかったこと，それは私の書き方が悪かったためではありませんでした．

[参考文献｜数学ガール（ガロア理論）：結城 浩著　ソフトバンク クリエイティブ株式会社]

第２章　積分に関する一考察

高校３年のとき，受験のために数学の勉強をしていたのですが，私は，積分が苦手でした．その理由は，不定積分を求めるには，公式の暗記，置換積分法，部分積分法，部分分数分解を用いる方法，・・・などの方法があり，それらの中の，どの方法を適用すればよいのかを見極めなくてはならない煩わしさがあるからです．

不定積分を必要とする問題を見るたびに，すべての関数に適用できる一定の方法，それがどんなに複雑でもよいので，とにかく，その方法に従えば必ず不定積分にたどりつくという万能な方法はないものかと思っていました．導関数を求めるには，定義に従って，極限を求めるという万能な方法があるので，不定積分にも，いい方法がないだろうかと考えたわけです．

そう簡単でないことは分かっていました．しかし，大学２年になって，この問題に専念していたあるとき，次のことに気がつきました．

ある関数の不定積分を求めるとき，“マイナス１次の導関数（ｎ次導関数のｎに形式的に－１を代入した関数）”という考え方で，求める不定積分が得られる場合がある．

実際、$y=\sin x$　のｎ次導関数は，$y^{(n)}=\sin(x+(n\pi)/2)$　であるが，ここで，ｎに－１を代入すれば，

$$y^{(-1)}=\sin(x-\pi/2)=\cos x=\int \sin x\ dx \quad \text{（積分定数は無視する）}$$

を得る．

参考書や問題集に掲載されている関数で，ｎ次導関数を求めることができる関数を，１つずつ確かめたところ，うまくいく関数と，うまくいかない関数があることが分かりました．

実際，$y=\log x$　のｎ次導関数は，$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$　であるが，ｎに－１を代入すれば，

$$y^{(-1)}=(-1)^{-2}(-2)!/x^{-1}=(-2)!\,x$$

となり，$\int \log x\ dx=x\log x-x$　を得ることはできない．

しかし，研究の過程で，ｎ次導関数のLeibnitzの公式を用いていたとき，次のことに気がつきました．

$y=x^2e^x$　のｎ次導関数は

$$y^{(n)}={}_nC_0x^2e^x+{}_nC_1 2xe^x+{}_nC_2 2e^x$$

であるので，ｎに－１を代入すれば，

$$y^{(-1)}={}_{-1}C_0x^2e^x+{}_{-1}C_1 2xe^x+{}_{-1}C_2 2e^x$$

となる．ここで，${}_{-1}C_0$，${}_{-1}C_1$，${}_{-1}C_2$ の値は，２項係数であるので，それぞれ，１，－１，１ に等しい．

ゆえに，

$$y^{(-1)}=x^2e^x-2xe^x+2e^x=e^x(x^2-2x+2)$$

となり，この関数を微分すれば，

$$d/dx\ y^{(-1)}=e^x(x^2-2x+2)+e^x(2x-2)=x^2e^x=y$$

となるので，

$$y^{(-1)}=\int y\ dx$$

が成り立つ．

そして，このような関数が１つあるということは，他にもたくさんあると推測されるので，ここには定理が存在する可能性がある．したがって，Leibnitzの公式そのものに“マイナス１次の導関数”の考え方を適用すれば，積分の公式が導かれるかもしれない．

以下に述べる内容は，そのとき，わくわくしながら夢中になって研究し，手に入れた定理を整理したものです．

［定理１］　ｎ次導関数のLeibnitzの公式

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)}=\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_nC_k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\}\qquad ({}_nC_k\text{は二項係数})$$

にｎ＝－ｍ（ｍ＝０，１，２，・・・）を代入した式から類推して，

関数ｆ(ｘ)を順次積分した関数を，

$$I^0 f(x)=f(x),\qquad I^{m+1}f(x)=\int\{I^m f(x)\}dx$$

とおくとき，

$$I^m\{f(x)g(x)\}=\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_{-m}C_k f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}\qquad (1)$$

が成り立たないものかと思われる．

このとき，ｆ(ｘ)がｎ次の多項式で，ｇ(ｘ)が連続ならば，実際に（１）が成り立つ．ただし，

$${}_{-m}C_0=1,\qquad {}_{-m}C_k=(-m)(-m-1)(-m-2)\cdots(-m-k+1)/k!\qquad (k=1,2,\cdots)$$

とする．

証明　ｍに関する数学的帰納法を用いる．

ｍ＝０のときは，（１）の両辺はともにｆ(ｘ)ｇ(ｘ)であるので成り立つ．

次にｍのとき，すなわち，

$$\phi_m(x)=\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_{-m}C_k f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}$$

として，$\phi_m(x)=I^m\{f(x)g(x)\}$が成り立つと仮定して，$\phi_{m+1}(x)=I^{m+1}\{f(x)g(x)\}$を証明する．

$$\phi_{m+1}(x)=\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_{-(m+1)}C_k f^{(k)}(x)I^{m+1+k}g(x)\}$$

は有限級数であるので項別微分が可能であり，

$$\begin{aligned}d/dx\,\phi_{m+1}(x)&=\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_{-(m+1)}C_k f^{(k+1)}(x)I^{m+1+k}g(x)+{}_{-(m+1)}C_k f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}\\&={}_{-(m+1)}C_0 f(x)I^m g(x)\\&\quad+\Sigma_{1\leqq k\leqq n}\{({}_{-(m+1)}C_{k-1}+{}_{-(m+1)}C_k)\}f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\\&\quad+{}_{-(m+1)}C_n f^{(n+1)}(x)I^{m+1+n}g(x)\end{aligned}$$

ここで，

$${}_{-(m+1)}C_0={}_{-m}C_0,\qquad {}_{-(m+1)}C_{k-1}+{}_{-(m+1)}C_k={}_{-m}C_k,\quad f^{(n+1)}(x)=0$$

であるので，

$$d/dx\,\phi_{m+1}(x)=\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_{-m}C_k f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}=\phi_m(x)=I^m\{f(x)g(x)\}$$

したがって，

$$\phi_{m+1}(x)=I^{m+1}\{f(x)g(x)\}\blacksquare$$

［定理２］　$1\leqq n\leqq m$ならば、$\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\ {}_{-m}C_k\ {}_mC_{n-k}=0$

証明　ｆ(ｘ)をｎ次の多項式，　$g(x)=e^x$とすれば，定理１より，

$$I^m\{f(x)e^x\}=\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_{-m}C_k f^{(k)}(x)e^x\}$$

この両辺をｍ回微分すれば，

左辺＝$f(x)e^x$

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_{-m}C_k({}_mC_0 f^{(k)}(x)e^x+{}_mC_1 f^{(k+1)}(x)e^x+{}_mC_2 f^{(k+2)}(x)e^x+\cdots\\&\qquad\qquad+{}_mC_m f^{(k+m)}(x)e^x)\}\\&=\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_{-m}C_k\ {}_mC_0 f^{(k)}(x)e^x+{}_{-m}C_k\ {}_mC_1 f^{(k+1)}(x)e^x+{}_{-m}C_k\ {}_mC_2 f^{(k+2)}(x)e^x+\cdots\\&\qquad\qquad+{}_{-m}C_k\ {}_mC_m f^{(k+m)}(x)e^x\}\\&={}_{-m}C_0\ {}_mC_0 f(x)e^x\\&\quad+({}_{-m}C_0\ {}_mC_1+{}_{-m}C_1\ {}_mC_0)f^{(1)}(x)e^x\\&\quad+({}_{-m}C_0\ {}_mC_2+{}_{-m}C_1\ {}_mC_1+{}_{-m}C_2\ {}_mC_0)f^{(2)}(x)e^x\\&\quad\cdots\\&\quad+({}_{-m}C_0\ {}_mC_n+{}_{-m}C_1\ {}_mC_{n-1}+{}_{-m}C_2\ {}_mC_{n-2}+\cdots+{}_{-m}C_k\ {}_mC_{n-k}+\cdots+{}_{-m}C_n\ {}_mC_0)f^{(n)}(x)e^x\end{aligned}$$

ここで，両辺を比較すれば，

$$ {}_{-m}C_0\ {}_{m}C_0 = 1 $$
$$ {}_{-m}C_0\ {}_{m}C_1 + {}_{-m}C_1\ {}_{m}C_0 = 0 $$
$$ {}_{-m}C_0\ {}_{m}C_2 + {}_{-m}C_1\ {}_{m}C_1 + {}_{-m}C_2\ {}_{m}C_0 = 0 $$
・・・
$$ {}_{-m}C_0\ {}_{m}C_n + {}_{-m}C_1\ {}_{m}C_{n-1} + {}_{-m}C_2\ {}_{m}C_{n-2} + \cdots + {}_{-m}C_k\ {}_{m}C_{n-k} + \cdots + {}_{-m}C_n\ {}_{m}C_0 = 0 \qquad (2) $$ ■

補足１：　$g(x)=e^x$としたのは，e^xが連続で、微分・積分しても変わらない関数であり，式の表記がしやすいからである.

［定理３］　$n>0$のとき，$\Sigma_{0\leqq k\leqq n}({}_{-n}C_k\ {}_{n}C_k)=0$
証明　定理２の（２）で，$m=n$の場合を，公式 ${}_{n}C_{n-k}={}_{n}C_k$ を用いて書き直せば得られる■

補足２：　二項係数の関係式は，いろいろあるが，定理３で示した関係式を載せている本を見たことがないので，ここに掲載しておく.

補足３：　二項係数 ${}_{n}C_k$ は，本来，nが正の整数のとき，

$$ {}_{n}C_0=1,\ {}_{n}C_k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)/k!\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) $$

と定義されるが，その拡張として，nが任意の実数として定義されていることは周知の通りである.
同様に，順列を表す記号 ${}_{n}P_k$ も，nが負の整数でない実数，kが非負の整数ならば，

$$ {}_{n}P_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \qquad (3) $$
$$ {}_{n}P_{-k} = 1/(n+1)(n+2)\cdots(n+k) \qquad (4) $$

と定義することで便利な場合がある.

例１：$f(x)=x^{\alpha}$（αは負の整数でない実数）のn次導関数は，$f^{(n)}(x)={}_{\alpha}P_n\, x^{\alpha-n}$ である.
ここで，$n=-k$（kは非負の整数）を代入すれば，

$$ \begin{aligned} f^{(-k)}(x) &= {}_{\alpha}P_{-k}\, x^{\alpha+k} \\ &= \{1/(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)\}\, x^{\alpha+k} \\ &= I^k f(x) \end{aligned} $$

補足４：　定理３の別証
定理３は，微分積分を用いることなく初等的な方法でも証明することができる．以下その方法を述べる.
初めに，

$$ {}_{-n}C_k = (-1)^k\, {}_{n+k-1}C_k $$

が成り立つので，

$$ a_k = {}_{n}C_k\ {}_{-n}C_k = (-1)^k\, {}_{n}C_k\ {}_{n+k-1}C_k $$

とおくと，

$$ \begin{aligned} a_{k+1} &= {}_{n}C_{k+1}\ {}_{-n}C_{k+1} \\ &= (-1)^{k+1}\, {}_{n}C_{k+1}\ {}_{n+k-1}C_{k+1} \\ &= -\{(n^2-k^2)/(k+1)^2\}\, a_k \end{aligned} $$

であるので，

$$ \begin{aligned} a_k - a_{k+1} &= a_k + \{(n^2-k^2)/(k+1)^2\}\, a_k \\ &= \{(n^2+1+2k)/(k+1)^2\}\, a_k \end{aligned} $$

ゆえに，

$$ (k+1)^2(a_k - a_{k+1}) = (n^2+1+2k)\, a_k $$

整頓すると,

$$k^2(a_k-a_{k+1})-2ka_{k+1}+(a_k-a_{k+1})=(n^2+1)a_k \qquad \cdots ①$$

①の$k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1$　における和を考えれば,

$$\Sigma_{0\leqq k\leqq n-1}\{k^2(a_k-a_{k+1})\}-2\Sigma_{0\leqq k\leqq n-1}(ka_{k+1})+\Sigma_{0\leqq k\leqq n-1}(a_k-a_{k+1})$$
$$=\Sigma_{0\leqq k\leqq n-1}\{(n^2+1)a_k\} \qquad \cdots ②$$

ここで,

(i) $\Sigma_{0\leqq k\leqq n-1}\{k^2(a_k-a_{k+1})\}=0^2\cdot a_0-0^2\cdot a_1$
$+1^2\cdot a_1-1^2\cdot a_2$
$+2^2\cdot a_2-2^2\cdot a_3$
$+3^2\cdot a_3-3^2\cdot a_4$
$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$
$+(n-1)^2a_{n-1}-(n-1)^2a_n$
$=0^2\cdot a_0$
$+(1^2-0^2)\ a_1$
$+(2^2-1^2)\ a_2$
$+(3^2-2^2)\ a_3$
$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$
$+((n-1)^2-(n-2)^2)\,a_{n-1}$
$-(n-1)^2a_n$
$=\Sigma_{1\leqq k\leqq n-1}\{(2k-1)a_k\}-(n-1)^2a_n$
$=2\Sigma_{1\leqq k\leqq n-1}(ka_k)-\Sigma_{1\leqq k\leqq n-1}a_k-(n-1)^2a_n$
$=2\Sigma_{1\leqq k\leqq n-1}(ka_k)-\{(\Sigma_{0\leqq k\leqq n}a_k)-a_0-a_n\}-(n-1)^2a_n$

(ii) $\Sigma_{0\leqq k\leqq n-1}(a_k-a_{k+1})=a_0-a_n$

(iii) $\Sigma_{0\leqq k\leqq n-1}\{(n^2+1)a_k\}=(n^2+1)\{(\Sigma_{0\leqq k\leqq n}a_k)-a_n\}$

であるので, $\Sigma_{0\leqq k\leqq n}a_k=S_n$とおき, $\Sigma_{1\leqq k\leqq n-1}(ka_k)=\Sigma_{0\leqq k\leqq n-1}(ka_k)$であることに留意すれば,
②は次のように変形される.

$$2\Sigma_{0\leqq k\leqq n-1}\{k(a_k-a_{k+1})\}-(S_n-a_0-a_n)-(n-1)^2a_n+a_0-a_n$$
$$=(n^2+1)(S_n-a_n) \qquad \cdots ③$$

また,

$\Sigma_{0\leqq k\leqq n-1}\{k(a_k-a_{k+1})\}=0\cdot a_0-0\cdot a_1$
$+1\cdot a_1-1\cdot a_2$
$+2\cdot a_2-2\cdot a_3$
$+3\cdot a_3-3\cdot a_4$
$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$
$+(n-1)\ a_{n-1}-(n-1)a_n$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})-(n-1)a_n$
$=\{(\Sigma_{0\leqq k\leqq n}a_k)-a_0-a_n\}-(n-1)a_n$
$=S_n-a_0-a_n-(n-1)a_n$

であるので，③は次のように変形される.

$$2\{S_n-a_0-a_n-(n-1)a_n\}-(S_n-a_0-a_n)-(n-1)^2a_n+a_0-a_n=(n^2+1)(S_n-a_n)$$

整頓すれば,

$$n^2S_n=0$$

ここで，$n>0$より，

$$S_n=0$$

を得る■

補足５：　定理１の証明は,

$$\begin{aligned}d/dx\,\phi_{m+1}(x) &= {}_{-(m+1)}C_0\,f(x)I^m g(x)\\ &+\Sigma_{1\leqq k\leqq n}\{{}_{-(m+1)}C_{k-1}+{}_{-(m+1)}C_k\}\,f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\\ &+{}_{-(m+1)}C_n\,f^{(n+1)}(x)I^{m+1+n}g(x)\end{aligned}$$

において,

$${}_{-(m+1)}C_n\,f^{(n+1)}(x)I^{m+1+n}g(x)=0$$

であることが核心部分である．したがって,

$${}_{-(m+1)}C_n\,f^{(n+1)}(x)I^{m+1+n}g(x)\quad\to\quad 0$$

すなわち，$\phi_{m+1}(x)$が無限級数の場合も定理が成り立つのではないかと類推される．実際，次の定理４を得る.

［定理４］　有限区間Ｊにおいて，任意の非負整数mに対して,

$$\phi_m(x)=\Sigma_{0\leqq k}\{{}_{-m}C_k\,f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}$$

とするとき，右辺の級数が項別微分可能，すなわち,

（ア）級数　$\Sigma_{0\leqq k}\{{}_{-m}C_k\,f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}$が収束
（イ）級数　$\Sigma_{0\leqq k}[d/dx\{{}_{-m}C_k\,f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}]$が一様収束
（ウ）$d/dx\{{}_{-m}C_k\,f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}$が連続

を満たす（参考文献：解析概論改訂第３版Ｐ. 159，高木貞二，岩波書店）ならば,

$$I^m\{f(x)g(x)\}=\Sigma_{0\leqq k}\{{}_{-m}C_k\,f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}\qquad(5)$$

が成り立つ．ただし，Ｉは上端が$x\in J$，下端が$a\in J$の定積分とする.

証明　mに関する数学的帰納法を用いる.

（ｉ）$m=0$のときは,

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=I^0\{f(x)g(x)\}=f(x)g(x)\\ \text{右辺}&=\Sigma_{0\leqq k}\{{}_0C_k\,f^{(k)}(x)I^k g(x)\}\\ &={}_0C_0\,f(x)g(x)+{}_0C_1\,f^{(1)}(x)Ig(x)+{}_0C_2\,f^{(2)}(x)I^2g(x)+\cdots\\ &=f(x)g(x)\qquad(\because {}_0C_0=1,\ {}_0C_1={}_0C_2=\cdots=0)\end{aligned}$$

（ⅱ）次に，$\phi_m(x)=I^m\{f(x)g(x)\}$が成り立つと仮定して，$\phi_{m+1}(x)=I^{m+1}\{f(x)g(x)\}$を証明する.

$$\phi_{m+1}(x)=\Sigma_{0\leqq k}\{{}_{-(m+1)}C_k\,f^{(k)}(x)I^{m+1+k}g(x)\}$$

は、条件より，区間Ｊにおいて項別微分可能であるので,

$$\begin{aligned}d/dx\,\phi_{m+1}(x)&=\Sigma_{0\leqq k}\{{}_{-(m+1)}C_k\,f^{(k+1)}(x)I^{m+1+k}g(x)+{}_{-(m+1)}C_k\,f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}\\ &={}_{-(m+1)}C_0\,f(x)I^m g(x)+\Sigma_{1\leqq k}\{({}_{-(m+1)}C_{k-1}+{}_{-(m+1)}C_k)\,f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}\end{aligned}$$

ここで，

$$ {}_{-(m+1)}C_0 = {}_{-m}C_0,\quad {}_{-(m+1)}C_{k-1} + {}_{-(m+1)}C_k = {}_{-m}C_k $$

であるので，

$$ d/dx\,\phi_{m+1}(x) = \Sigma_{0\leqq k}\{{}_{-m}C_k\, f^{(k)}(x) I^{m+k} g(x)\} = \phi_m(x) = I^m\{f(x)g(x)\} $$

したがって，

$$ \phi_{m+1}(x) = I\phi_m(x) + C \qquad \text{（Cは積分定数）} $$

とおいて，$x=a$ を代入すれば，

$$ C = \phi_{m+1}(a) = 0 \qquad (\because \text{帰納法の仮定より } \phi_m(a)=0) $$

であるので，

$$ \phi_{m+1}(x) = I(\phi_m(x)) = I[I^m\{f(x)g(x)\}] = I^{m+1}\{f(x)g(x)\} \blacksquare $$

［定理５］　Ｊが有限区間，$f(x)=(x-a)^n$，$g(x)$ が連続ならば，

$$ I^m\{f(x)g(x)\} = \Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_{-m}C_k\, f^{(k)}(x) I^{m+k} g(x)\} $$

が成り立つ．ただし，Ｉは上端が $x\in J$，下端が $a\in J$ の定積分で，ｎは非負整数とする．

証明　右辺は有限級数より，定理４の条件（ア）～（ウ）を満たす■

［定理６］　Ｊを有限区間，Ｋを十分大きい正の整数，Ｍを正の定数とするとき，

（ｉ）$K\leqq k$ なる全ての整数ｋついて，絶対値 $|f^{(k)}(x)| \leqq M$

（ii）$g(x)=(x-a)^n$

を満たすならば，

$$ I^m\{f(x)g(x)\} = \Sigma_{0\leqq k}\{{}_{-m}C_k\, f^{(k)}(x) I^{m+k} g(x)\} $$

が成り立つ．ただし，Ｉは上端が $x\in J$，下端が $a\in J$ の定積分で，ｎは非負整数とする．

証明　右辺の級数が，定理４の条件（ア）～（ウ）を満たすことを示せば十分である．

初めに，区間Ｊの長さを $|J|=d$ とする．

（ア）の証明

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{K\leqq k}\{|{}_{-m}C_k\, f^{(k)}(x) I^{m+k} g(x)|\} \\
&= \Sigma_{K\leqq k}\{|{}_{-m}C_k|\,|f^{(k)}(x)|\,|I^{m+k} g(x)|\} \\
&\leqq \Sigma_{K\leqq k}[[\{m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1)\}/k!]M\{n!/(n+m+k)!\}|x-a|^{n+m+k}] \\
&\leqq \Sigma_{K\leqq k}[[\{m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1)\}/k!]\{n!/(n+m+k)!\}Md^{n+m+k}] \\
&= \Sigma_{K\leqq k}[[\{m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1)\}/(n+m+k)!](n!/k!)Md^{n+m+k}] \\
&\leqq \Sigma_{K\leqq k}\{(n!/k!)Md^{n+m+k}\} \\
&\qquad\qquad (\because 0\leqq\{m(m+1)(m+2)\cdots(m+k-1)\}/(n+m+k)!\leqq 1) \\
&= n!Md^{n+m}\,\Sigma_{K\leqq k}(d^k/k!) \ \to\ 0 \quad (K\to\infty) \\
&\qquad\qquad (\because -\infty<x<\infty \text{ において } e^x=\Sigma_{0\leqq k}(x^k/k!))
\end{aligned}
$$

したがって，（ア）を満たす．

（イ）の証明

$$
\begin{aligned}
&\Sigma_{K\leqq k}|d/dx\{{}_{-m}C_k\, f^{(k)}(x) I^{m+k} g(x)\}| \\
&= \Sigma_{K\leqq k}|{}_{-m}C_k\, f^{(k)}(x) I^{m+k-1} g(x) + {}_{-m}C_k\, f^{(k+1)}(x) I^{m+k} g(x)| \\
&\leqq \Sigma_{K\leqq k}\{|{}_{-m}C_k\, f^{(k)}(x) I^{m+k-1} g(x)| + |{}_{-m}C_k\, f^{(k+1)}(x) I^{m+k} g(x)|\} \\
&\leqq \Sigma_{K\leqq k}[|{}_{-m}C_k|M\{n!/(n+m+k-1)!\}|x-a|^{n+m+k-1} \\
&\qquad\qquad + |{}_{-m}C_k|M\{n!/(n+m+k)!\}|x-a|^{n+m+k}] \\
&\leqq \Sigma_{K\leqq k}[|{}_{-m}C_k|M\{n!/(n+m+k-1)!\}d^{n+m+k-1} \\
&\qquad\qquad + |{}_{-m}C_k|M\{n!/(n+m+k)!\}d^{n+m+k}]
\end{aligned}
$$

$=\Sigma_{K\leqq k}[n!Md^{n+m}[\{|{}_{-m}C_k|/(n+m+k-1)!\}d^{k-1}$

$+\{|{}_{-m}C_k|/(n+m+k)!\}d^{k}]]$

$=n!Md^{n+m}\Sigma_{K\leqq k}[\{|{}_{-m}C_k|/(n+m+k-1)!\}d^{k-1}$

$+\{|{}_{-m}C_k|/(n+m+k)!\}d^{k}]$・・・④

ここで,

$$0\leqq|{}_{-m}C_k|/(n+m+k-1)!\leqq 1/k!,\quad 0\leqq|{}_{-m}C_k|/(n+m+k)!\leqq 1/k!$$

であるので,

$$④\leqq n!Md^{n+m}\Sigma_{K\leqq k}\{(d^{k-1}+d^{k})/k!\}\ \to\ 0\quad (K\to\infty)$$

したがって,(イ)を満たす.

(ウ)の証明

$d/dx\{{}_{-m}C_k f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}={}_{-m}C_k f^{(k)}(x)I^{m+k-1}g(x)+{}_{-m}C_k f^{(k+1)}(x)I^{m+k}g(x)$

ここで, $f^{(k)}(x)$, $f^{(k+1)}(x)$は微分可能である(∵条件(ⅰ))ので,連続である.

また, $I^{m+k-1}g(x)=I^{m+k-1}(x-a)^n=\{n!/(n+m+k-1)!\}(x-a)^{n+m+k-1}$

$I^{m+k}g(x)=I^{m+k}(x-a)^n=\{n!/(n+m+k)!\}(x-a)^{n+m+k}$

も当然連続であるので,(ウ)を満たす■

［定理７］ Ｊを有限区間,Ｋを十分大きい正の整数,Ｍを正の定数とするとき,

(ⅰ) $K\leqq k$なる全ての整数ｋついて,絶対値 $|f^{(k)}(x)|\leqq M$

(ⅱ) $g(x)=(x-a)^n$

を満たすならば,

$$I^m\{f(x)g(x)\}=\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_{-m}C_k g^{(k)}(x)I^{m+k}f(x)\}=\Sigma_{0\leqq k}\{{}_{-m}C_k f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}$$

が成り立つ.ただし,Ｉは上端が$x\in J$,下端が$a\in J$の定積分で,ｎは非負整数とする.

証明 条件(ⅰ)より,$f(x)$は連続,条件(ⅱ)より,$g^{(n+1)}(x)=0$が得られるので,定理５より,

$$I^m\{f(x)g(x)\}=I^m\{g(x)f(x)\}=\Sigma_{0\leqq k\leqq n}\{{}_{-m}C_k g^{(k)}(x)I^{m+k}f(x)\}\ ・・・①$$

が成り立つ.他方,定理７の条件は,定理６の条件とおなじであるので,

$$I^m\{f(x)g(x)\}=\Sigma_{0\leqq k}\{{}_{-m}C_k f^{(k)}(x)I^{m+k}g(x)\}\ ・・・②$$

も成り立つ.したがって,①,②より,定理は成り立つ■

［定理８］ Ｊを有限区間,Ｋを十分大きい正の整数,Ｍを正の定数とするとき,

$K\leqq k$なる全ての整数ｋついて,絶対値 $|f^{(k)}(x)|\leqq M$

ならば,

$$I^m f(x)=\Sigma_{0\leqq k}[{}_{-m}C_k\{(x-a)^{m+k}/(m+k)!\}f^{(k)}(x)]$$

$$=\Sigma_{0\leqq k}[\{(x-a)^{m+k}/(m+k)!\}f^{(k)}(a)]$$

が成り立つ.ただし,Ｉは上端が$x\in J$,下端が$a\in J$の定積分とする.

証明 定理７においてｎ＝０とおけば,$g(x)=1$より,

$$I^m f(x)=\Sigma_{0\leqq k}\{{}_{-m}C_k f^{(k)}(x)I^{m+k}1\}$$

$$=\Sigma_{0\leqq k}[{}_{-m}C_k\{(x-a)^{m+k}/(m+k)!\}f^{(k)}(x)]\ ・・・①$$

が成り立つ.他方,$I^m f(x)$を$x=a$においてテーラー展開すれば,

$$I^m f(x)=\Sigma_{0\leqq k}[\{(x-a)^{m+k}/(m+k)!\}f^{(k)}(a)]\ ・・・②$$

も成り立つ.したがって,①,②より,定理は成り立つ■

補足６：　定理８で，m＝１とおけば，

$$\mathrm{I}f(x) = \Sigma_{0\leqq k}[{}_{-1}C_k\{(x-a)^{1+k}/(1+k)!\}f^{(k)}(x)]$$
$$= \Sigma_{0\leqq k}[\{(x-a)^{1+k}/(1+k)!\}f^{(k)}(a)]$$

であるので，

$$\mathrm{I}f(x) = \Sigma_{0\leqq k}[(-1)^k\{(x-a)^{1+k}/(1+k)!\}f^{(k)}(x)]$$
$$= \Sigma_{0\leqq k}[\{(x-a)^{1+k}/(1+k)!\}f^{(k)}(a)]$$

例２：$f(x)=\cos x$，$a=0$とすれば，補足６より，

$$\sin x = \Sigma_{0\leqq k}\{(-1)^k[x^{1+k}/(1+k)!\}\cos\{x+(k\pi/2)\}]$$
$$=\{(x\cos x)/1!\}+\{(x^2\sin x)/2!\}-\{(x^3\cos x)/3!\}-\{(x^4\sin x)/4!\}$$
$$+\{(x^5\cos x)/5!\}+\{(x^6\sin x)/6!\}-\{(x^7\cos x)/7!\}-\{(x^8\sin x)/8!\}$$
$$+\cdots$$

例３：$f(x)=e^x$，$a=0$とすれば，補足６より，

$$e^x-1=\{(xe^x)/1!\}-\{(x^2e^x)/2!\}+\{(x^3e^x)/3!\}-\{(x^4e^x)/4!\}+\cdots$$
$$=e^x\{(x/1!)-(x^2/2!)+(x^3/3!)-(x^4/4!)+\cdots\}$$
$$1=e^x-e^x\{(x/1!)-(x^2/2!)+(x^3/3!)-(x^4/4!)+\cdots\}$$
$$=e^x\{1-(x/1!)+(x^2/2!)-(x^3/3!)+(x^4/4!)-\cdots\}$$
$$\therefore\quad e^{-x}=1-(x/1!)+(x^2/2!)-(x^3/3!)+(x^4/4!)+\cdots$$

補足７：例３は，e^{-x}のテーラー展開級数に等しい．

第３章　負のカージナル数

私が大学１年生のとき，数学の世界には「可能的無限」と「実無限」の２種類の無限があることを初めて知り，そのとき，なぜ２種類必要なのか，なぜ１種類に統一しないのか，が疑問でした．

もちろん，この２つの無限の概念は次のように大きく異なります．

可能的無限は，「変動可能な有限」あるいは「限りなく大きくなろうとする状態」などと表現されることが多い概念であり，この無限の概念による無限大は，数としては存在しない．すなわち，∞は数ではない．

実無限は，無限を完結したものとして扱い，この無限の概念による無限大は，例えば，カージナル数（濃度ともいう）$\aleph_0$や順序数ωのように，数としてとらえることができる．

しかし，カージナル数を仮定して，実数を含む新しい数（この数を「拡大実数」という）を創ることができれば，両者を統一できるのではないか，すなわち，「可能的無限」の概念を用いて導かれる数学（例えば，標準的な微分積分）と同じ内容の理論を，拡大実数を用いて導くことができれば，数学で用いる無限の概念は「実無限」だけであるとすることができるのではないか，と思いついたのがこの研究の始まりです．大学３年生のときでした．

カージナル数（順序数は既知とする）を仮定して拡大実数を導くための足掛かりとして，自然数とカージナル数の接点を調べると，

（ⅰ）カージナル数は，選択公理を認めれば，

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots,\ \aleph_\omega,\ \aleph_{\omega+1},\ \cdots$$

のように，大小の順に整列可能である．

（ⅱ）カージナル数は，有限の範囲で考えれば，大小関係，加法，乗法について自然数と同型である．

このことから，カージナル数を，新しい「自然数」としてとらえれば，「整数」，「有理数」，「実数」へと数の拡張をしていけるのではないかと期待される．そして，この期待が，「拡大実数」を創ろうと思い立った直接の動機になりました．

ここで，「拡大実数」を創るには，

負のカージナル数，例えば $-\aleph_0$

に相当する数が必要になるのは当然です．しかし，$-\aleph_0$ は何を表していると考えればよいのか，この数と通常のカージナル数との演算を，どのように考えればよいのか，全く見当がつかないまま半年が過ぎ，大学４年生になったころ，あることに気がつきました．根を詰めて，同じことを考え続けると，本当に頭が痛くなると同時に，なにかしら気がつくことがあるものです．これは私の実感です．

私は，大学では，数学物理学科（数学専攻）に所属していて，普段は数学を勉強していたのですが，物理関連の本を読む機会もありました．そして，電子の世界では，

電子と陽電子が出会うと，双方が消滅する

という現象があることを，多少ＳＦ小説的な印象とともに記憶していて，このことを，ふと思い出しました．

しかし，最初は，こんな簡単なことで，疑問が解けるはずはないと思い，半信半疑でしたが，過去の経験から，「単純なことほど役に立つ」と考えるようになっていたこともあり，だめでもともとのつもりで，

カージナル数を，新しい「自然数」としてとらえたときの，「整数」を導く方法

について取り組むことにしました．

結果は，それまで半年かけても何も進展しなかったものが，約１週間で，その概略が完成してしまいました．

以下に述べる内容は，そのとき下宿にこもり，寝食を忘れて研究し，得ることができた理論を，改めて整理し直したものです．

$\boxed{1}$ 符号がついた集合

初めに，若干の用語と記号を定める．

（ⅰ）正と負の符号を元とする集合を$\delta=\{+,\ -\}$とするとき，写像$f:A\to\delta$が定義されている集合Aを，符号がついた集合という．

（ⅱ）$a\in A$に対して，$f(a)=+$ならばaを正の元，$f(a)=-$ならばaを負の元という．

（ⅲ）$^\forall a\in A$に対して，$f(a)=+$ならばAを正の正規集合，$f(a)=-$ならばAを負の正規集合といい，正の正規集合，負の正規集合，空集合を合わせて，単に正規集合という．

（ⅳ）a^+はaが正の元，a^-はaが負の元であることを表す．

（ⅴ）A^+はAが正の正規集合，A^-はAが負の正規集合であることを表す．

（ⅵ）A_+はAに属する正の元すべての集合，A_-はAに属する負の元すべての集合を表す．

（ⅶ）ϕを「『$A_+\to A_-$』または『$A_-\to A_+$』」なる単射とする．

（ⅷ）差集合「『$A_- - \phi(A_+)$』または『$A_+ - \phi(A_-)$』」は正規集合であるが，この正規集合をA_ϕで表す．ただし，$\phi(A_+)=\{\phi(a):a\in A_+\}$，$\phi(A_-)=\{\phi(a):a\in A_-\}$．

（ⅸ）符号がついた集合AからA_ϕを求めることを，集合の正規化という．

（ⅹ）符号がついた集合Aの，各元の符号をすべて入れ換えた集合を，$-A$で表す．

例：$A=\{a^+,\ b^-,\ c^+,\ d^-,\ e^+\}$ならば，$A_+=\{a^+,\ c^+,\ e^+\}$，$A_-=\{b^-,\ d^-\}$であり，$A_\phi$は，「$\{a^+\}$または$\{c^+\}$または$\{e^+\}$」である．したがって，Aの正規化によって得られる正規集合は，ϕによらず，ただ１つの元からなる正の正規集合である．

例：$A=\{1^+,\ 2^-,\ 3^+,\ 4^-,\ 5^+,\ 6^-,\ \cdots\}$ならば，

$$A_+=\{1^+,\ 3^+,\ 5^+,\ \cdots\},\quad A_-=\{2^-,\ 4^-,\ 6^-,\ \cdots\}$$

であり，A_ϕは，ϕにより，正の正規集合にも負の正規集合にも空集合にもなり得る．

$\boxed{2}$ 定義１（整数）

（ⅰ）$\mathrm{card}A^+=\mathrm{card}B^+$または$\mathrm{card}A^-=\mathrm{card}B^-$または$A=B=\phi$(空集合)のとき，AとBは同じ整数を表すといい，$A_{INT}=B_{INT}$または$B_{INT}=A_{INT}$で表す．ただし，cardAは，集合Aのカージナル数を表すものとする．

（ⅱ）Aが任意の符号がついた集合で，Aにおけるすべての単写ϕの集合を$\boldsymbol{\psi}$とするとき，

$$A_{INT}=\{A_{\phi\,INT}:\phi\in\boldsymbol{\psi}\}$$

とする．ただし，$\{A_{\phi\,INT}:\phi\in\boldsymbol{\psi}\}$が，ただ１つの元からなる集合ならば，$A_{INT}$は，その元を表すものとする．

（ⅲ）$A^+{}_{INT}$を正の整数，$A^-{}_{INT}$を負の整数，ϕ_{INT}を零の整数(または単に零)という．

（ⅳ）正規集合Aが，有限集合ならば，A_{INT}を有限整数といい，無限集合ならば，A_{INT}を無限大整数という．

（ⅴ）$(-A)_{INT}$を，$-A_{INT}$で表す．

$\boxed{3}$ 定義２

（ⅰ）大小関係

A，Bを，$A\cap B=\phi$なる正規集合とするとき，$\{B\cup(-A)\}_\phi$が，ϕによらず，常に正の正規集合になるとき，B_{INT}はA_{INT}より大であるといい，

$$B_{INT}>A_{INT}\ \text{または}\ A_{INT}<B_{INT}$$

で表す．

（ⅱ）加法

A，Bを，$A\cap B=\phi$なる正規集合とするとき，$A_{INT}+B_{INT}=(A\cup B)_{INT}$とする．

（ⅲ）乗法

A，Bを正規集合とするとき，AとBの結合集合(A，B)の元(a，b)は，aとbが同符号ならば正の元，異符号ならば負の元とする．このとき，$A_{INT}B_{INT}=(A,\ B)_{INT}$とする．

$\boxed{4}$ 定理１

（ｉ）次の写像κは，カージナル数から非負の整数への，大小関係，加法，乗法に関する同型写像である．

$$\kappa : \begin{cases} \mathrm{card}\,\phi \to \phi_{\mathrm{INT}} \\ \\ \mathrm{card}A^{+} \to {A^{+}}_{\mathrm{INT}} \end{cases}$$

（ii）有限整数の大小関係，加法，乗法は，従来の整数の大小関係，加法，乗法と同値である．

証明（ｉ）定義１，定義２において，非負の正規集合だけを考えれば，整数の大小関係，加法，乗法の定義は，カージナル数の大小関係，加法，乗法の定義と同値である■

（ii）定義１，定義２において，有限正規集合だけを考えれば，整数の大小関係，加法，乗法の定義は，従来の整数の大小関係，加法，乗法の定義と同値である■

$\boxed{5}$ 定理２

（ｉ）ａを負の整数，ｂを正の整数とすれば，$a<0<b$が成り立つ．

（ii）任意の整数ａ，ｂにおいて，「$a<b$ ならば $-a>-b$」が成り立つ．

証明（ｉ）${A^{-}}_{\mathrm{INT}}=a$，${B^{+}}_{\mathrm{INT}}=b$とすれば，

$$\{B\cup(-\phi)\}^{+},\quad \{\phi\cup(-A)\}^{+},\quad \{B\cup(-A)\}^{+}$$

は明らか■

（ii）A，Bを，$A_{\mathrm{INT}}=a$，$B_{\mathrm{INT}}=b$となる正規集合とする．

仮定$a<b$より，$\{B\cup(-A)\}_{\phi}$は，ϕによらず，常に正の正規集合である．また，

$$(-A)\cup\{-(-B)\}=B\cup(-A)$$

であるので，$[(-A)\cup\{-(-B)\}]_{\phi}$は，$\phi$によらず，常に正の正規集合である■

$\boxed{6}$ 定理３

任意の整数ａ，ｂの間には，次のうちの１つだけが成り立つ．

$$a=b,\qquad a<b,\qquad a>b$$

証明　A，Bを，$A_{\mathrm{INT}}=a$，$B_{\mathrm{INT}}=b$となる正規集合とする．

（ｉ）$\forall\phi$，${\{B\cup(-A)\}_{\phi}}^{+}$ ならば，定義２の(ｉ)より，$a<b$である．

（ii）$\forall\phi$，${\{B\cup(-A)\}_{\phi}}^{-}$ ならば，$-\{B\cup(-A)\}=A\cup(-B)$より，${\{A\cup(-B)\}_{\phi}}^{+}$ であるので，$a>b$である．

（iii）(ｉ)と(ii)以外ならば，次のいずれかである．

(ア) $\exists\phi$，$\{B\cup(-A)\}_{\phi}=\phi$

(イ)「$\exists\phi_1$，${\{B\cup(-A)\}_{\phi_1}}^{+}$」かつ「$\exists\phi_2$，${\{B\cup(-A)\}_{\phi_2}}^{-}$」

(ア)ならば，$\mathrm{card}A=\mathrm{card}B$であるが，正規化の意味を考えれば，

$$\mathrm{card}A^{+}=\mathrm{card}B^{+},\quad \mathrm{card}A^{-}=\mathrm{card}B^{-},\quad A=B=\phi$$

のいずれかでなくてはならない．したがって，定義１の(ｉ)より，$a=b$である．

(イ)ならば，

「$\exists\phi_1$，${\{B\cup(-A)\}_{\phi_1}}^{+}$」より，$\mathrm{card}A\leqq\mathrm{card}B$

「$\exists\phi_2$，${\{B\cup(-A)\}_{\phi_2}}^{-}$」より，$\mathrm{card}A\geqq\mathrm{card}B$

ゆえに，$\mathrm{card}A=\mathrm{card}B$である．したがって，(ア)と同じ理由で，$a=b$である■

$\boxed{7}$ 定理４

任意の整数ａ，ｂ，ｃにおいて，「ａ＜ｂ，ｂ＜ｃ ならば ａ＜ｃ」が成り立つ．

証明　定理２の(ⅰ)と，仮定ａ＜ｂ，ｂ＜ｃより，ａ，ｂ，ｃの符号のこの順の組は，

$$(+,+,+),(0,+,+),(-,+,+),(-,0,+),$$
$$(-,-,+),(-,-,0),(-,-,-)$$

のいずれかである．

(ⅰ)(＋，＋，＋)の場合は定理１の(ⅰ)による．

(ⅱ)(０，＋，＋)，(－，＋，＋)，(－，０，＋)，(－，－，＋)，(－，－，０)の場合は，ａとｃの符号を比べれば，定理２の(ⅰ)よりａ＜ｃを得る．

(ⅲ)(－，－，－)の場合は，－ａ，－ｂ，－ｃの符号を考えれば，(＋，＋，＋)となる．ここで，仮定ａ＜ｂ，ｂ＜ｃと定理２の(ⅱ)より，－ａ＞－ｂ，－ｂ＞－ｃであるので，(ⅰ)より，－ａ＞－ｃ，すなわち，ａ＜ｃを得る■

$\boxed{8}$ 整数の整列

定理１の(ⅰ)より，非負の整数とカージナル数は大小関係において同型である．したがって，定理２の(ⅰ)と(ⅱ)より，整数は次のように並べることができる．ただし，$\mathrm{card}A=\aleph_\alpha$のときの$A^+{}_{\mathrm{INT}}$を$\infty_\alpha$で表す．

なお，記号を，このように定めれば，第３章の冒頭で述べた$-\aleph_\alpha$の意味は，定義１の(ｖ)より，$\mathrm{card}A=\aleph_\alpha$のときの$A^-{}_{\mathrm{INT}}$のことであり，今後，記号は$-\infty_\alpha$を用いることになる．

$$\cdots<-\infty_\omega<\cdots<-\infty_2<-\infty_1<-\infty_0<\cdots<-3<-2<-1<$$
$$0<1<2<3<\cdots<\infty_0<\infty_1<\infty_2<\cdots<\infty_\omega<\cdots$$

$\boxed{9}$ 整数の加法における留意事項

整数の和として，１つの整数が一意的に定まるとは限らない．実際，

$$A^+{}_{\mathrm{INT}}=\infty_\alpha,\quad B^-{}_{\mathrm{INT}}=-\infty_\alpha,\quad A\cap B=\phi$$

とすれば，

$$\infty_\alpha+(-\infty_\alpha)=\{(A\cup B)_{\phi\,\mathrm{INT}}:\phi\in\boldsymbol{\psi}\}=\{a:-\infty_\alpha\leqq a\leqq\infty_\alpha\}$$

である．ここで，整数の集合$\{a:-\infty_\alpha\leqq a\leqq\infty_\alpha\}$を$\Theta_\alpha$で表せば，

$$\infty_\alpha+(-\infty_\alpha)=\Theta_\alpha$$

となる．

このΘ_αのように，整数の和は，２つ以上の元を有する集合になる場合があるので，その扱い方を定めておく必要がある．

$\boxed{10}$ 定義３（不定数を含む演算及び大小関係）

整数すべての領域をΩで表し，Ωの空でない部分領域すべての領域をＵ(Ω)で表す．

(ⅰ) $\mathbf{a}$をＵ(Ω)の元とする．

$\mathbf{a}$が１つの元からなる部分領域{ａ}ならば，$\mathbf{a}$をａと同一視して確定数という．

$\mathbf{a}$が２つ以上の元からなる部分領域ならば，$\mathbf{a}$を不定数という．

(ⅱ) $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$をＵ(Ω)の元とする．$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$の二項演算を，演算記号を一般的に＊とするとき，次のように定める．

$$\mathbf{a}*\mathbf{b}=\bigcup_{a\in\mathbf{a},\,b\in\mathbf{b}}(a*b)$$

(ⅲ) $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$をＵ(Ω)の元とする．$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$の大小関係を，次のように定める．

「$\forall a\in\mathbf{a},\ \forall b\in\mathbf{b},\ a<b$」のとき，$\mathbf{a}<\mathbf{b}$

「$\forall a\in\mathbf{a},\ \forall b\in\mathbf{b},\ a\leqq b$」のとき，$\mathbf{a}\leqq\mathbf{b}$

例：$\mathbf{a}=\Theta_\alpha$，$\mathbf{b}=\infty_\alpha$とすれば，

$a\in(\Theta_\alpha-\{-\infty_\alpha\})$　ならば，$a+\infty_\alpha=\infty_\alpha$

$a=-\infty_\alpha$　ならば，$a+\infty_\alpha=\Theta_\alpha$

したがって，

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\bigcup_{a\in\mathbf{a},\ b\in\mathbf{b}}(a+b)=\Theta_\alpha$$

例：（ｉ）$\mathbf{a}=\Theta_\alpha$，$\mathbf{b}=\infty_\alpha$とすれば，$\forall a\in\Theta_\alpha$，$a\leqq\infty_\alpha$であるので，$\mathbf{a}\leqq\mathbf{b}$

（ii）$\mathbf{a}=\Theta_\alpha$，$\mathbf{b}=\infty_{\alpha+1}$とすれば，$\forall a\in\Theta_\alpha$，$a<\infty_{\alpha+1}$であるので，$\mathbf{a}<\mathbf{b}$

（iii）$\mathbf{a}=\Theta_\alpha$，$\mathbf{b}=0$とすれば，$\mathbf{a}$と$\mathbf{b}$の大小関係は定義されていない．

補足：$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$が$U(\Omega)$の元で，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$の少なくとも片方が不定数の場合は，

$\mathbf{a}\leqq\mathbf{b}$は，「$\mathbf{a}<\mathbf{b}$ または $\mathbf{a}=\mathbf{b}$」のことではない

ので注意を要する．

$\boxed{11}$ 定理５

$a\in\Omega$とすれば，次の式が成り立つ．

（ｉ）aが有限ならば，$\infty_\alpha+a=\infty_\alpha$，$(-\infty_\alpha)+a=-\infty_\alpha$

（ii）aが正の有限ならば，

$$\infty_\alpha a=\infty_\alpha,\ \infty_\alpha(-a)=-\infty_\alpha,\ (-\infty_\alpha)a=-\infty_\alpha,\ (-\infty_\alpha)(-a)=\infty_\alpha$$

（iii）$a0=0$，$0a=0$

（iv）$\infty_\alpha+\infty_\beta=\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$，　$(-\infty_\alpha)+(-\infty_\beta)=-\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$

（ｖ）$\infty_\alpha\infty_\beta=\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$，　$(-\infty_\alpha)\infty_\beta=-\infty_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$

（vi）$\infty_\alpha+(-\infty_\beta)=\begin{cases}\infty_\alpha & (\alpha>\beta)\\ \Theta_\alpha & (\alpha=\beta)\\ -\infty_\beta & (\alpha<\beta)\end{cases}$

（vii）$\Theta_\alpha+a=\begin{cases}\Theta_\alpha & (a\in\Theta_\alpha)\\ a & (a\notin\Theta_\alpha)\end{cases}$

（viii）$\Theta_\alpha+\Theta_\beta=\Theta_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$

証明　定義２の（ii）と（iii），定理１の（ｉ）と（ii）を用いれば，容易に証明される■

$\boxed{12}$ 定理６

A，Bが符号のついた集合で，$A\cap B=\phi$とすれば，次の式が成り立つ．

$$A_{INT}+B_{INT}=(A\cup B)_{INT}$$

証明　一般に，A_{INT}が不定数になるのは，

$$\mathrm{card}A_+=\mathrm{card}A_-=\aleph_\alpha$$

のときだけであり，そのとき，

$$A_{INT}=\Theta_\alpha$$

であるので，次の４通りの場合に分けて証明する．

（ｉ）A_{INT}，B_{INT}がともに不定数，すなわち，$A_{INT}=\Theta_\alpha$，$B_{INT}=\Theta_\beta$

（ii）A_{INT}が不定数でB_{INT}が確定数，すなわち，$A_{INT}=\Theta_\alpha$，B_{INT}が確定数

（iii）A_{INT}が確定数でB_{INT}が不定数，すなわち，A_{INT}が確定数，$B_{INT}=\Theta_\beta$

（iv）A_{INT}，B_{INT}がともに確定数

（ｉ）$A_{INT}=\Theta_\alpha$，$B_{INT}=\Theta_\beta$の場合：

$$\mathrm{card}A_+=\mathrm{card}A_-=\aleph_\alpha,\quad \mathrm{card}B_+=\mathrm{card}B_-=\aleph_\beta$$

であるので，

$$\mathrm{card}(A\cup B)_+=\mathrm{card}(A\cup B)_-=\aleph_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$$

したがって，

$$(A\cup B)_{INT}=\Theta_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$$

である．また，定理５の(viii)より，

$$A_{INT}+B_{INT}=\Theta_\alpha+\Theta_\beta=\Theta_{\max\{\alpha,\ \beta\}}$$

である．

（ii）$A_{INT}=\Theta_\alpha$，B_{INT}が確定数の場合：

（ア）初めに，$(A\cup B)_{INT}$が確定数とすれば，次のいずれかである．

① $\mathrm{card}B_+>\aleph_\alpha$，$\mathrm{card}B_-<\mathrm{card}B_+$

② $\mathrm{card}B_->\aleph_\alpha$，$\mathrm{card}B_+<\mathrm{card}B_-$

ここで，①のときは，

$$\mathrm{card}(A\cup B)_+>\aleph_\alpha,\quad \mathrm{card}(A\cup B)_-<\mathrm{card}(A\cup B)_+$$

であるので，

$$(A\cup B)_{INT}=(A\cup B)_{+INT}=B_{+INT}$$

である．また，定理５の(vii)より，

$$A_{INT}+B_{INT}=\Theta_\alpha+B_{+INT}=B_{+INT}$$

である．

②のときも同様である．

（イ）次に，$(A\cup B)_{INT}=\Theta_\beta$とすれば，

$$\mathrm{card}(A\cup B)_+=\mathrm{card}(A\cup B)_-=\aleph_\beta$$

である．ここで，$\alpha<\beta$とすれば，

$$\mathrm{card}B_+=\mathrm{card}B_-=\aleph_\beta$$

でなくてはならないので，B_{INT}が確定数であることに反する．

したがって，$\alpha\geqq\beta$であるが，このときは，

$$\mathrm{card}B_+,\ \mathrm{card}B_-\leqq\aleph_\alpha\quad (*)$$

であるので，

$$\mathrm{card}(A\cup B)_+=\mathrm{card}(A\cup B)_-=\aleph_\alpha$$

すなわち，

$$(A\cup B)_{INT}=\Theta_\alpha$$

である．また，$(*)$より，

$$B_{INT}\in\Theta_\alpha$$

となるので，定理５の(vii)より，

$$A_{INT}+B_{INT}=\Theta_\alpha+B_{INT}=\Theta_\alpha$$

である．

（iii）A_{INT}が確定数，$B_{INT}=\Theta_\beta$の場合は（ii）と同様である．

（iv）A_{INT}，B_{INT}がともに確定数の場合：

（ア）初めに，$(A\cup B)_{INT}$を確定数とする．このときは，

$$\forall\phi,\ (A\cup B)_{\phi\,INT}=(A\cup B)_{INT}$$

であるので，考えられるのは，次の６通りである．

① $\mathrm{card}A_+ \geqq \mathrm{card}A_-$, $\mathrm{card}B_+ \geqq \mathrm{card}B_-$

② $\mathrm{card}A_+ \leqq \mathrm{card}A_-$, $\mathrm{card}B_+ \leqq \mathrm{card}B_-$

③ $\mathrm{card}A_+ \geqq \mathrm{card}A_-$, $\mathrm{card}B_+ \leqq \mathrm{card}B_-$, $\mathrm{card}A_+ + \mathrm{card}B_+ \geqq \mathrm{card}A_- + \mathrm{card}B_-$

④ $\mathrm{card}A_+ \geqq \mathrm{card}A_-$, $\mathrm{card}B_+ \leqq \mathrm{card}B_-$, $\mathrm{card}A_+ + \mathrm{card}B_+ \leqq \mathrm{card}A_- + \mathrm{card}B_-$

⑤ $\mathrm{card}A_+ \leqq \mathrm{card}A_-$, $\mathrm{card}B_+ \geqq \mathrm{card}B_-$, $\mathrm{card}A_+ + \mathrm{card}B_+ \geqq \mathrm{card}A_- + \mathrm{card}B_-$

⑥ $\mathrm{card}A_+ \leqq \mathrm{card}A_-$, $\mathrm{card}B_+ \geqq \mathrm{card}B_-$, $\mathrm{card}A_+ + \mathrm{card}B_+ \leqq \mathrm{card}A_- + \mathrm{card}B_-$

ここで，A_{INT}，B_{INT}は，ともに確定数であるので，

①のときは，$\phi(A_-) \subset A_+$，$\phi(B_-) \subset B_+$ となるようにϕを選べば，

$$(A \cup B)_{INT} = [\{A_+ - \phi(A_-)\} \cup \{B_+ - \phi(B_-)\}]_{INT} = A_{INT} + B_{INT}$$

②のときは，$\phi(A_+) \subset A_-$，$\phi(B_+) \subset B_-$ となるようにϕを選べば，

$$(A \cup B)_{INT} = [\{A_- - \phi(A_+)\} \cup \{B_- - \phi(B_+)\}]_{INT} = A_{INT} + B_{INT}$$

③のときは，$C \subset B_-$として，

$$\phi(A_-) \subset A_+,\ \phi(C) = B_+,\ \phi(B_- - C) \subset A_+ - \phi(A_-)$$

となるようにϕを選べば，

$$(A \cup B)_{INT} = [\{A_+ - \phi(A_-)\} \cup (B_- - C)]_{INT} = A_{INT} + B_{INT}$$

④のときは，$C \subset A_+$として，

$$\phi(C) = A_-,\ \phi(B_+) \subset B_-,\ \phi(A_+ - C) \subset B_- - \phi(B_+)$$

となるようにϕを選べば，

$$(A \cup B)_{INT} = [(A_+ - C) \cup \{B_- - \phi(B_+)\}]_{INT} = A_{INT} + B_{INT}$$

⑤のときは，$C \subset A_-$として，

$$\phi(C) = A_+,\ \phi(B_-) \subset B_+,\ \phi(A_- - C) \subset B_+ - \phi(B_-)$$

となるようにϕを選べば，

$$(A \cup B)_{INT} = [(A_- - C) \cup \{B_+ - \phi(B_-)\}]_{INT} = A_{INT} + B_{INT}$$

⑥のときは，$C \subset B_+$として，

$$\phi(A_+) \subset A_-,\ \phi(C) = B_-,\ \phi(B_+ - C) \subset A_- - \phi(A_+)$$

となるようにϕを選べば，

$$(A \cup B)_{INT} = [\{A_- - \phi(A_+)\} \cup (B_+ - C)]_{INT} = A_{INT} + B_{INT}$$

（イ）次に，$(A \cup B)_{INT} = \Theta_\alpha$とする．ここで，$A_{INT}$，$B_{INT}$は，ともに確定数であるので，次のいずれかでなくてはならない．

① $\mathrm{card}A_+ = \mathrm{card}B_- = \aleph_\alpha$，$\mathrm{card}A_- < \aleph_\alpha$，$\mathrm{card}B_+ < \aleph_\alpha$

② $\mathrm{card}A_- = \mathrm{card}B_+ = \aleph_\alpha$，$\mathrm{card}A_+ < \aleph_\alpha$，$\mathrm{card}B_- < \aleph_\alpha$

ここで，

①のときは，$A_{INT} + B_{INT} = \infty_\alpha + (-\infty_\alpha) = \Theta_\alpha = (A \cup B)_{INT}$

②のときは，$A_{INT} + B_{INT} = (-\infty_\alpha) + \infty_\alpha = \Theta_\alpha = (A \cup B)_{INT}$■

$\boxed{13}$ 定理7

a，**b**，**c**∈U(Ω)とすれば，次の式が成り立つ.

(ⅰ) **a**＋**b**＝**b**＋**a**　(加法の交換法則)

(ⅱ) (**a**＋**b**)＋**c**＝**a**＋(**b**＋**c**)　(加法の結合法則)

(ⅲ) **a b**＝**b a**　(乗法の交換法則)

(ⅳ) (**a b**) **c**＝**a** (**b c**)　(乗法の結合法則)

証明　a∈**a**，b∈**b**，c∈**c**として，A，B，Cを，A_{INT}＝a，B_{INT}＝b，C_{INT}＝cとなる正規集合 (加法の場合は互いに素) とする.

(ⅰ) A∪B＝B∪Aであるので，定義2の(ⅱ)より，a＋b＝b＋aが成り立つ.

ゆえに，定義3の(ⅱ)より，**a**＋**b**＝**b**＋**a**が成り立つ■

(ⅱ) 定理6より，

$$(a+b)+c=((A\cup B)\cup C)_{INT}=(A\cup(B\cup C))_{INT}=a+(b+c)$$

が成り立つ. ゆえに，定義3の(ⅱ)より，(**a**＋**b**)＋**c**＝**a**＋(**b**＋**c**)が成り立つ■

(ⅲ) 結合集合(A，B)と(B，A)の，それぞれの元(a，b)と(b，a)は同符号であり，card(A，B)＝card(B，A)であるので，定義2の(ⅲ)より，a b＝b aが成り立つ.

ゆえに，定義3の(ⅱ)より，**a b**＝**b a**が成り立つ■

(ⅳ) 結合集合((A，B)，C)と(A，(B，C))の，それぞれの元((a，b)，c)と(a，(b，c))は同符号であり，card((A，B)，C)＝card(A，(B，C))であるので，　(a b) c＝a (b c)が成り立つ.

ゆえに，定義3の(ⅱ)より，(**a b**) **c**＝**a** (**b c**)が成り立つ■

$\boxed{14}$ 定理8 (分配法則)

a，b，c∈Ωとする. 分配法則a (b＋c)＝a b＋a c・・・(*)は，

(ⅰ) a b＋a cが確定数ならば，常に成り立つ.

(ⅱ) a b＋a cが不定数ならば，「a＝1またはa＝－1」のときのみ成り立つ.

(ⅲ) b＋cが確定数で，aが有限ならば，常に成り立つ.

証明　aが無限大「∞_αまたは$-\infty_\alpha$」であることを，記号a_αで表す.

(ⅰ)と(ⅱ)を合わせて証明する. a，b，cを次の(ア)～(カ)の場合に分ける.

a，b，cの少なくとも1つが0　・・・(ア)

a，b，cのいずれもが0でなくて，

b，cが同符号　・・・(イ)

b，cが異符号で，

a，b，cがすべて有限　・・・(ウ)

a，b，cのうちの1つだけが無限大　・・・(エ)

a，b，cのうちの1つだけが有限　・・・(オ)

a，b，cがすべて無限大　・・・(カ)

ここで，それぞれの場合の，「a b＋a cが確定数か否か」と「(*)が成り立つか否か」について調べると次のようになる.

(ア)の場合は，明らかに，$ab+ac$は確定数で，(＊)が成り立つ．

(イ)の場合は，A，B，Cを，$A_{INT}=a$，$B_{INT}=b$，$C_{INT}=c$となる正規集合とする．$B\cap C=\phi$とすれば，

$$(A,\ B\cup C)=(A,\ B)\cup(A,\ C),\qquad (A,\ B)\cap(A,\ C)=\phi$$

であり，条件「b，cが同符号」より，(A，B∪C)，(A，B)，(A，C)はすべて同じ符号の正規集合である．したがって，$ab+ac$は確定数で，(＊)が成り立つ．

(ウ)の場合は，明らかに，$ab+ac$は確定数で，(＊)が成り立つ．

(エ)の場合は，

① a_αで，bとcが有限ならば，$a_\alpha b+a_\alpha c=\Theta_\alpha$(不定数)で，
$a_\alpha(b+c)$は「∞_αまたは$-\infty_\alpha$または0」となるので，(＊)は成り立たない．

② b_βで，aとcが有限ならば，$ab_\beta+ac=ab_\beta$は確定数で，
$a(b_\beta+c)=ab_\beta=ab_\beta+ac$が成り立つ．

③ c_γで，aとbが有限ならば，$ab+ac_\gamma=ac_\gamma$は確定数で，
$a(b+c_\gamma)=ac_\gamma=ab+ac_\gamma$が成り立つ．

(オ)の場合は，

① aが有限で，b_β，c_γならば，

$\beta>\gamma$のとき，$ab_\beta+ac_\gamma=ab_\beta$は確定数で，
$a(b_\beta+c_\gamma)=ab_\beta=ab_\beta+ac_\gamma$が成り立つ．

$\beta<\gamma$のとき，$ab_\beta+ac_\gamma=ac_\gamma$は確定数で，
$a(b_\beta+c_\gamma)=ac_\gamma=ab_\beta+ac_\gamma$が成り立つ．

$\beta=\gamma$のとき，$ab_\beta+ac_\gamma=\Theta_\beta$(不定数)で，$a(b_\beta+c_\gamma)=a\Theta_\beta$であるので，
「$a=1$または$a=-1$」のときのみ$a\Theta_\beta=\Theta_\beta$となり，(＊)が成り立つ．

② bが有限で，a_α，c_γならば，

$\alpha\geqq\gamma$のとき，$a_\alpha b+a_\alpha c_\gamma=\Theta_\alpha$(不定数)で，
$a_\alpha(b+c_\gamma)=a_\alpha c_\gamma$であるので，(＊)は成り立たない．

$\alpha<\gamma$のとき，$a_\alpha b+a_\alpha c_\gamma=a_\alpha c_\gamma$は確定数で，
$a_\alpha(b+c_\gamma)=a_\alpha c_\gamma=a_\alpha b+a_\alpha c_\gamma$が成り立つ．

③ cが有限で，a_α，b_βならば，

$\alpha\geqq\beta$のとき，$a_\alpha b_\beta+a_\alpha c=\Theta_\alpha$(不定数)で，
$a_\alpha(b_\beta+c)=a_\alpha b_\beta$であるので，(＊)は成り立たない．

$\alpha<\beta$のとき，$a_\alpha b_\beta+a_\alpha c=a_\alpha b_\beta$は確定数で，
$a_\alpha(b_\beta+c)=a_\alpha b_\beta=a_\alpha b_\beta+a_\alpha c$が成り立つ．

(カ)の場合は，

$\alpha\geqq\beta$，γのとき，$a_\alpha b_\beta+a_\alpha c_\gamma=\Theta_\alpha$(不定数)で，
$a_\alpha(b_\beta+c_\gamma)$は，「$a_\alpha b_\beta$，$a_\alpha c_\gamma$，$\{-a_\alpha,\ 0,\ a_\alpha\}$」のいずれかであるので，(＊)は成り立たない．

$\beta>\alpha$，γのとき，$a_\alpha b_\beta+a_\alpha c_\gamma=a_\alpha b_\beta$は確定数で，
$a_\alpha(b_\beta+c_\gamma)=a_\alpha b_\beta=a_\alpha b_\beta+a_\alpha c_\gamma$が成り立つ．

$\gamma>\alpha$，βのとき，$a_\alpha b_\beta+a_\alpha c_\gamma=a_\alpha c_\gamma$は確定数で，
$a_\alpha(b_\beta+c_\gamma)=a_\alpha c_\gamma=a_\alpha b_\beta+a_\alpha c_\gamma$が成り立つ．

$\beta=\gamma>\alpha$のとき，$a_\alpha b_\beta+a_\alpha c_\gamma=\Theta_\beta$(不定数)で，
$a_\alpha(b_\beta+c_\gamma)=a_\alpha\Theta_\beta\neq\Theta_\beta$であるので，(＊)は成り立たない．

以上(ア)～(カ)により，(＊)は，$ab+ac$が確定数ならば常に成り立ち，$ab+ac$が不定数ならば，「$a=1$または$a=-1$」のときのみ成り立つ■

（iii） ｂ＋ｃが確定数で，ａが有限ならば，ａｂ＋ａｃが確定数であることを示せばよい．実際，ａｂ＋ａｃが確定数ならば，（ｉ）より（＊）が成り立つ．
仮定「ａが有限」より，ａ，ｂ，ｃを次の(ア)～(オ)の場合に分ける．

ａ，ｂ，ｃの少なくとも１つが０ ・・・(ア)
ａ，ｂ，ｃのいずれもが０でなくて，
ｂ，ｃが同符号 ・・・(イ)
ｂ，ｃが異符号で，ｂ，ｃの両方が有限 ・・・(ウ)
ｂ，ｃのうちの片方が有限で，他方が無限大 ・・・(エ)
ｂ，ｃの両方が無限大 ・・・(オ)

ここで，それぞれの場合の，「ａｂ＋ａｃが確定数か否か」を調べると次のようになる．
(ア)の場合は，明らかに，ａｂ＋ａｃは確定数である．
(イ)の場合は，ａｂ，ａｃが同符号であるので，ａｂ＋ａｃは確定数である．
(ウ)の場合は，ａ，ｂ，ｃがすべて有限であるので，ａｂ＋ａｃは確定数である．
(エ)の場合は，b_β，ｃは有限とすれば，$ab_\beta + ac = ab_\beta$は確定数である．
ｂは有限，c_γとすれば，$ab + ac_\gamma = ac_\gamma$は確定数である．
(オ)の場合は，b_β，c_γとすれば，
$\beta > \gamma$のとき，$ab_\beta + ac_\gamma = ab_\beta$は確定数である．
$\beta < \gamma$のとき，$ab_\beta + ac_\gamma = ac_\gamma$は確定数である．
$\beta = \gamma$のとき，$ab_\beta + ac_\gamma = \Theta_\beta$(不定数)である．しかし，このときは，
$b + c = \Theta_\beta$であるので，仮定「ｂ＋ｃが確定数」に反する■

$\boxed{15}$ 定理9（等式に関する諸性質）
ａ，ｂ，$c \in \Omega$とすれば，次の関係が成り立つ．
（ｉ） ａが有限ならば，「$a = b \Leftrightarrow a - b = 0$」
（ii） ｃが有限ならば，「$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$」
（iii） $c\,(\neq 0)$が有限ならば，「$a = b \Leftrightarrow ac = bc$」
（iv） $ab = 0 \Leftrightarrow$ 「$a = 0$ または $b = 0$」
（ｖ） $a = b$ならば，$a + c = b + c$
（vi） $a = b$ならば，$ac = bc$
（vii） a_αならば，「$a = b \Leftrightarrow a - b = \Theta_\alpha$」
（viii） c_γならば，「『ａ，$b \in \Theta_\gamma$で$a \neq b$』でなければ『$a + c = b + c \Rightarrow a = b$』」
（ix） c_γならば，「『ａ，$b \in \Theta_\gamma$で$a \neq b$』でなければ『$ac = bc \Rightarrow a = b$』」
証明 A，B，Cを，$A_{INT} = a$，$B_{INT} = b$，$C_{INT} = c$となる正規集合とする．
（ｉ）(ア) $a = b \Rightarrow a - b = 0$の証明：
ａが有限ならばｂも有限であるので，定理１の（ii）より明らか．
(イ) $a - b = 0 \Rightarrow a = b$の証明：
ａが有限ならばｂも有限である．実際，b_βとすれば，$a - b_\beta = -b_\beta \neq 0$となり仮定に反する．したがって，定理１の（ii）より明らか■
（ii）(ア) $a = b \Rightarrow a + c = b + c$の証明：
$a = b$が有限ならば，ａ，ｂ，ｃがすべて有限であるので，定理１の（ii）より明らか．
$a = b = \infty_\alpha$ならば，ｃが有限より，$a + c = \infty_\alpha = b + c$
$a = b = -\infty_\alpha$ならば，ｃが有限より，$a + c = -\infty_\alpha = b + c$

（イ）$a+c=b+c \Rightarrow a=b$の証明：
aが有限ならば，a，b，cがすべて有限になるので，定理１の（ⅱ）より明らか．
$a=\infty_\alpha$ならば，cが有限より，$a+c=\infty_\alpha=b+c$であるので，$b=\infty_\alpha$
$a=-\infty_\alpha$ならば，cが有限より，$a+c=-\infty_\alpha=b+c$であるので，$b=-\infty_\alpha$■

（ⅲ）（ア）$a=b \Rightarrow ac=bc$の証明：
$a=b$が有限ならば，a，b，cがすべて有限であるので，定理１の（ⅱ）より明らか．
$a=b=\infty_\alpha$ならば，$c(\neq 0)$が有限より，$ac=(\mathrm{sgn}\,c)\infty_\alpha=bc$
$a=b=-\infty_\alpha$ならば，$c(\neq 0)$が有限より，$ac=(-\mathrm{sgn}\,c)\infty_\alpha=bc$
（イ）$ac=bc \Rightarrow a=b$の証明：
aが有限ならば，a，b，cがすべて有限になるので，定理１の（ⅱ）より明らか．
$a=\infty_\alpha$ならば，$c(\neq 0)$が有限より，$ac=(\mathrm{sgn}\,c)\infty_\alpha=bc$であるので，$b=\infty_\alpha$
$a=-\infty_\alpha$ならば，$c(\neq 0)$が有限より，$ac=(-\mathrm{sgn}\,c)\infty_\alpha=bc$であるので，$b=-\infty_\alpha$■

（ⅳ）結合集合$(A, B)=\phi \Leftrightarrow$「$A=\phi$ または $B=\phi$」■

（ⅴ）（ア）$a=b$が有限の場合：
cが有限ならば，a，b，cがすべて有限であるので，定理１の（ⅱ）より明らか．
c_γならば，$a+c=c=b+c$
（イ）$a=b=\infty_\alpha$の場合：
cが有限ならば，$a+c=\infty_\alpha=b+c$
$c=\infty_\gamma$ならば，$a+c=\infty_{\max\{\alpha, \gamma\}}=b+c$
$c=-\infty_\gamma$，　$\alpha>\gamma$ならば，$a+c=\infty_\alpha=b+c$
　　　　　　$\alpha=\gamma$ならば，$a+c=\Theta_\alpha=b+c$
　　　　　　$\alpha<\gamma$ならば，$a+c=-\infty_\gamma=b+c$
（ウ）$a=b=-\infty_\alpha$の場合：
cが有限ならば，$a+c=-\infty_\alpha=b+c$
$c=\infty_\gamma$，　$\alpha>\gamma$ならば，$a+c=-\infty_\alpha=b+c$
　　　　　$\alpha=\gamma$ならば，$a+c=\Theta_\alpha=b+c$
　　　　　$\alpha<\gamma$ならば，$a+c=\infty_\gamma=b+c$
$c=-\infty_\gamma$ならば，$a+c=-\infty_{\max\{\alpha, \gamma\}}=b+c$■

（ⅵ）AとBは同符号または空集合であり，$\mathrm{card}A=\mathrm{card}B$であるので，結合集合$(A, C)$と$(B, C)$も同符号または空集合で，$\mathrm{card}(A, C)=\mathrm{card}(B, C)$である■

（ⅶ）（ア）$a=b \Rightarrow a-b=\Theta_\alpha$の証明：
$a=b=\infty_\alpha$ならば，$a-b=\infty_\alpha-\infty_\alpha=\Theta_\alpha$
$a=b=-\infty_\alpha$ならば，$a-b=-\infty_\alpha-(-\infty_\alpha)=-\infty_\alpha+\infty_\alpha=\infty_\alpha-\infty_\alpha=\Theta_\alpha$
（イ）$a-b=\Theta_\alpha \Rightarrow a=b$の証明：
$a-b=\Theta_\alpha$となるのは，$a=b=\infty_\alpha$ または $a=b=-\infty_\alpha$の場合だけである■

（ⅷ）$a\in\Theta_\gamma$，$b\in\Theta_\gamma$で$a+c=b+c$となるのは，$a=b$と$a\neq b$の両方の場合があるが，$a\neq b$でなければ当然$a=b$である．
$a\notin\Theta_\gamma$，$b\in\Theta_\gamma$ならば$a+c\neq b+c$であるので仮定に反する．
$a\in\Theta_\gamma$，$b\notin\Theta_\gamma$ならば$a+c\neq b+c$であるので仮定に反する．

　$a \notin \Theta_\gamma$，$b \notin \Theta_\gamma$ならば$a+c=a$，$b+c=b$，$a+c=b+c$より$a=b$■

（ⅸ）$a \in \Theta_\gamma$，$b \in \Theta_\gamma$で$ac=bc$となるのは，$a=b$と$a \neq b$の両方の場合があるが，$a \neq b$でなければ当然$a=b$である．

　$a \notin \Theta_\gamma$，$b \in \Theta_\gamma$ならば$ac \neq bc$であるので仮定に反する．

　$a \in \Theta_\gamma$，$b \notin \Theta_\gamma$ならば$ac \neq bc$であるので仮定に反する．

　$a \notin \Theta_\gamma$，$b \notin \Theta_\gamma$ならば$ac=(\mathrm{sgn}\, c)a$，$bc=(\mathrm{sgn}\, c)b$，$ac=bc$より$a=b$■

$\boxed{16}$ 定理10（不等式に関する諸性質その１）

　$\mathbf{a}$，$\mathbf{b} \in U(\Omega)$，$a \in \mathbf{a}$，$b \in \mathbf{b}$とすれば，次の関係が成り立つ．

（ⅰ）$a<b \Leftrightarrow b-a>0$

（ⅱ）$\mathbf{a}<\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b}-\mathbf{a}>0$

　証明（ⅰ）A，Bを，$A_{INT}=a$，$B_{INT}=b$，$A \cap B=\phi$となる正規集合とする．

（ア）$a<b \Rightarrow b-a>0$の証明：

　仮定$a<b$より，$^\forall\phi$，$\{B \cup (-A)\}_\phi$は正の正規集合である．ここで，

$$\{B \cup (-A)\} \cup (-\phi)=B \cup (-A)$$

であるので，$^\forall\phi$，$[\{B \cup (-A)\} \cup (-\phi)]_\phi$は正の正規集合である．

（イ）$b-a>0 \Rightarrow a<b$の証明：

　$b-a$は確定数である．実際，不定数とすれば，$b-a=\Theta_\alpha$でなくてはならないので，仮定$b-a>0$に反する．したがって，

$$^\forall\phi,\ [\{B \cup (-A)\} \cup (-\phi)]_\phi$$

は正の正規集合であるので，$^\forall\phi$，$\{B \cup (-A)\}_\phi$は正の正規集合である■

（ⅱ）$\mathbf{a}<\mathbf{b}$は，「$^\forall a \in \mathbf{a}$，$^\forall b \in \mathbf{b}$，$a<b$」のことであり，

$$\mathbf{b}-\mathbf{a}=\bigcup_{a \in \mathbf{a},\, b \in \mathbf{b}}(b-a)$$

であるので，（ⅰ）より，（ⅱ）を得る■

$\boxed{17}$ 定理11（不等式に関する諸性質その２）

　a，b，c，$d \in \Omega$とすれば，次の関係が成り立つ．

（ⅰ）cが有限ならば，「$a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$」

（ⅱ）cが正の有限ならば，「$a<b \Leftrightarrow ac<bc$」

（ⅲ）cが負の有限ならば，「$a<b \Leftrightarrow ac>bc$」

（ⅳ）c_γならば，

$$「a<b \Rightarrow 『a+c=b+c』 \text{ or } 『a+c<b+c』 \text{ or } 『a+c \leqq b+c』」$$

（ⅴ）c_γならば，「$a+c<b+c \Rightarrow a<b$」

（ⅵ）$c=\infty_\gamma$ならば，「$a<b \Rightarrow ac \leqq bc$」

（ⅶ）$c=\infty_\gamma$ならば，「$ac<bc \Rightarrow a<b$」

（ⅷ）$a<b$，$c<d$ならば，$a+c<b+d$

（ⅸ）$0<a<b$，$0<c<d$ならば，$0<ac<bd$

　証明（ⅰ）仮定「cが有限」より，$a+c$，$b+c$はともに確定数である．

（ア）$a<b \Rightarrow a+c<b+c$の証明：

$$\begin{aligned}(b+c)-(a+c)&=b+c-a-c\ （\because 定理８の(ⅲ)，定理７の(ⅱ)）\\ &=(b-a)+(c-c)\ （\because 定理７の(ⅰ)と(ⅱ)）\\ &=b-a\ （\because c は有限）\end{aligned}$$

>0（∵仮定$a<b$，定理10の(ｉ)）

であるので，定理10の(ｉ)より，$a+c<b+c$を得る．

（イ）$a+c<b+c \Rightarrow a<b$の証明：

$$(b+c)-(a+c)>0 \quad (\because 仮定a+c<b+c，定理10の(ｉ))$$

ここで，

$$(b+c)-(a+c)=b+c-a-c \quad (\because 定理8の(ⅲ)，定理7の(ⅱ))$$
$$=(b-a)+(c-c) \quad (\because 定理7の(ｉ)と(ⅱ))$$
$$=b-a \quad (\because cは有限)$$

であるので，$b-a>0$，すなわち，$a<b$を得る■

（ⅱ）（ア）$a<b \Rightarrow ac<bc$の証明：

a，bが有限ならば，a，b，cはすべて有限である．

aが有限で$b=\infty_\alpha$ならば，cが正の有限より，「acは有限で$bc=\infty_\alpha$」である．

aが有限で$b=-\infty_\alpha$ならば，$b<a$となるので仮定に反する．

bが有限で$a=\infty_\alpha$ならば，$b<a$となるので仮定に反する．

bが有限で$a=-\infty_\alpha$ならば，cが正の有限より「$ac=-\infty_\alpha$でbcは有限」である．

a，bが無限大ならば，cが正の有限より，「$ac=a$で$bc=b$」である．

したがって，仮定$a<b$が成り立つ場合は，いずれの場合も，$ac<bc$を得る．

（イ）$ac<bc \Rightarrow a<b$の証明：

ac，bcはともに確定数であるので，

$$bc-ac>0 \quad (\because 仮定ac<bc，定理10の(ｉ))$$

となり，$bc-ac$も確定数である．したがって，定理8の(ｉ)より，

$$bc-ac=(b-a)c>0$$

と変形できるので，仮定$c>0$より，$b-a>0$，すなわち，$a<b$を得る■

（ⅲ）（ア）$a<b \Rightarrow ac>bc$の証明：

a，bが有限ならば，a，b，cはすべて有限である．

aが有限で$b=\infty_\alpha$ならば，cが負の有限より，「acは有限で$bc=-\infty_\alpha$」である．

aが有限で$b=-\infty_\alpha$ならば，$b<a$となるので仮定に反する．

bが有限で$a=\infty_\alpha$ならば，$b<a$となるので仮定に反する．

bが有限で$a=-\infty_\alpha$ならば，cが負の有限より，「$ac=\infty_\alpha$でbcは有限」である．

a，bが無限大ならば，cが負の有限より，「$ac=-a$で$bc=-b$」である．また，仮定$a<b$と定理2の(ⅱ)より，$-a>-b$である．

したがって，仮定$a<b$が成り立つ場合は，いずれの場合も，$ac>bc$を得る．

（イ）$ac>bc \Rightarrow a<b$の証明：

ac，bcはともに確定数であるので，

$$ac-bc>0 \quad (\because 仮定ac>bc，定理10の(ｉ))$$

となり，$ac-bc$も確定数である．したがって，定理8の(ｉ)より，

$$ac-bc=(a-b)c>0$$

と変形できるので，仮定$c<0$より，$a-b<0$，すなわち，$a<b$を得る■

（iv）次の４つの場合(ア)～(エ)に分けて証明する.

（ア） a，$b \in \Theta_\gamma$の場合は，仮定$a < b$より，

①$c = \infty_\gamma$ならば，次のいずれかが成り立つ.

$$a + c = c = b + c, \quad a + c = \Theta_\gamma \leqq c = b + c$$

②$c = -\infty_\gamma$ならば，次のいずれかが成り立つ.

$$a + c = c = b + c, \quad a + c = c \leqq \Theta_\gamma = b + c$$

（イ） $a \in \Theta_\gamma$，$b \notin \Theta_\gamma$の場合は，仮定$a < b$より，$\infty_\gamma < b$となるので，仮定c_γより，次のいずれかが成り立つ.

$$a + c = c < b = b + c, \quad a + c = \Theta_\gamma < b = b + c$$

（ウ） $a \notin \Theta_\gamma$，$b \in \Theta_\gamma$の場合は，仮定$a < b$より，$a < -\infty_\gamma$となるので，仮定c_γより，次のいずれかが成り立つ.

$$a + c = a < c = b + c, \quad a + c = a < \Theta_\gamma = b + c$$

（エ） $a \notin \Theta_\gamma$，$b \notin \Theta_\gamma$の場合は，仮定$a < b$より，

$$\infty_\gamma < a < b, \quad a < b < -\infty_\gamma, \quad 「a < -\infty_\gamma,\ \infty_\gamma < b」$$

のいずれかであるが，仮定c_γより，いずれにおいても，次の式が成り立つ.

$$a + c = a < b = b + c \blacksquare$$

（v）次の４つの場合(ア)～(エ)に分けて証明する.

（ア） a，$b \in \Theta_\gamma$の場合は，仮定c_γより，仮定$a + c < b + c$は成り立たない.

（イ） $a \in \Theta_\gamma$，$b \notin \Theta_\gamma$の場合は，

$$b < -\infty_\gamma \text{ または } \infty_\gamma < b$$

である．ここで，

① $\infty_\gamma < b$ならば，$a \in \Theta_\gamma \leqq \infty_\gamma < b$より，$a < b$が成り立つ.

② $b < -\infty_\gamma$ならば，仮定c_γより，

「$a + c = c$，$b + c = b < -\infty_\gamma$」または「$a + c = \Theta_\gamma$，$b + c = b < -\infty_\gamma$」

であるので，仮定$a + c < b + c$は成り立たない.

（ウ） $a \notin \Theta_\gamma$，$b \in \Theta_\gamma$の場合は，

$$a < -\infty_\gamma \text{ または } \infty_\gamma < a$$

である．ここで，

① $\infty_\gamma < a$ならば，仮定c_γより，

「$\infty_\gamma < a = a + c$，$b + c = c$」または「$\infty_\gamma < a = a + c$，$b + c = \Theta_\gamma$」

であるので，仮定$a + c < b + c$は成り立たない.

② $a < -\infty_\gamma$ならば，$b \in \Theta_\gamma \geqq -\infty_\gamma > a$より，$b > a$が成り立つ.

（エ） $a \notin \Theta_\gamma$，$b \notin \Theta_\gamma$の場合は，次のいずれかである.

① $\infty_\gamma < a$，$\infty_\gamma < b$　　② $\infty_\gamma < a$，$b < -\infty_\gamma$

③ $a < -\infty_\gamma$，$\infty_\gamma < b$　　④ $a < -\infty_\gamma$，$b < -\infty_\gamma$

仮定c_γより，いずれも，$a + c = a$，$b + c = b$である．したがって，

①のときは，仮定$a + c < b + c$より，$a < b$

②のときは，$b + c = b < -\infty_\gamma < \infty_\gamma < a = a + c$となるので，仮定$a + c < b + c$は成り立たない.

③のときは，仮定$a + c < b + c$より，$a < b$

④のときは，仮定$a + c < b + c$より，$a < b$

以上(ア)～(エ)により，仮定$a + c < b + c$が成り立てば，定理は成り立つ$\blacksquare$

（vi）仮定$a < b$より，次の５つの場合(ア)～(オ)に分けて証明する.

（ア） $0 \leqq a < b$ならば，a，bは非負の整数で，仮定$c = \infty_\gamma > 0$である．したがって，定理１の(i)より，$ac < bc$である.

（イ） ａ＜０≦ｂならば，仮定ｃ＝∞_{γ}より， ａ ｃ＜０≦ｂ ｃである．
（ウ） －∞_{γ}≦ａ＜ｂ＜０ならば，仮定ｃ＝∞_{γ}より， ａ ｃ＝－∞_{γ}＝ｂ ｃである．
（エ） ａ＜－∞_{γ}≦ｂ＜０ならば，仮定ｃ＝∞_{γ}より， ａ ｃ＝ａ＜－∞_{γ}＝ｂ ｃである．
（オ） ａ＜ｂ≦－∞_{γ}ならば，仮定ｃ＝∞_{γ}より， ａ ｃ＝ａ＜ｂ＝ｂ ｃである■

（ⅶ）仮定ａ ｃ＜ｂ ｃより，次の５つの場合(ア)～(オ)に分けて証明する．
（ア） ０≦ａ ｃ， ｂ ｃならば，仮定ｃ＝∞_{γ}＞０より， ａ， ｂは非負の整数になる．したがって，定理１の(ｉ)より，ａ ｃ＜ｂ ｃならば， ａ＜ｂである．
（イ） ａ ｃ＜０≦ｂ ｃならば，仮定ｃ＝∞_{γ}より， ａは負の整数， ｂは非負の整数になるので， ａ＜ｂである．
（ウ） －∞_{γ}≦ａ ｃ， ｂ ｃ＜０ならば，仮定ｃ＝∞_{γ}より，仮定ａ ｃ＜ｂ ｃは成り立たない．
（エ） ａ ｃ＜－∞_{γ}≦ｂ ｃ＜０ならば，仮定ｃ＝∞_{γ}より， ａ＜－∞_{γ}≦ｂ＜０である．
（オ） ａ ｃ， ｂ ｃ≦－∞_{γ}ならば，

(－ａ)ｃ，(－ｂ)ｃ≧∞_{γ}，
仮定ｃ＝∞_{γ}＞０，
仮定ａ ｃ＜ｂ ｃより，(－ａ)ｃ＞(－ｂ)ｃ

であるので，(ア)より，－ａ＞－ｂ，すなわち， ａ＜ｂを得る．
以上(ア)～(オ)により，仮定ａ ｃ＜ｂ ｃが成り立てば，定理は成り立つ■

（ⅷ）仮定ａ＜ｂ， ｃ＜ｄより，

ｂ－ａ＞０，　ｄ－ｃ＞０（∵定理10の(ｉ)）

であるので， ｂ－ａ， ｄ－ｃは，ともに確定数である．したがって，

(ｂ－ａ)＋(ｄ－ｃ)＞０（∵定理１の(ｉ)）

である．ここで，左辺を変形すれば，

(ｂ－ａ)＋(ｄ－ｃ) ＝ｂ－ａ＋ｄ－ｃ（∵定理７の(ⅱ)）
＝(ｂ＋ｄ)－(ａ＋ｃ)
(∵定理７の(ｉ)と(ⅱ)，定理８の(ｉ)と(ⅱ))

したがって，(ｂ＋ｄ)－(ａ＋ｃ)＞０であるので

ａ＋ｃ＜ｂ＋ｄ（∵定理10の(ⅱ)）

が成り立つ■

（ⅸ）定理１の(ｉ)より明らか■

おわりに

私は，ある高校で，理数科の生徒を担当する機会がありました．この学校の理数科は，発足したばかりの新しい科で，その運営方針は，単なる特進クラスではなく，本当に理科・数学の興味を育てることに主眼をおいた名称通りの科でした．

課題研究や工場見学をよく実施しました．しかし，私には，１つだけ疑問がありました．それは，課題研究というと，実際に生徒が実施するのは，物理・化学・生物・地学の，いわゆる理科の分野ばかりで，数学の分野での研究が全くないのはなぜだろうか，という疑問でした．

自分が大学生のときも，たしかに卒業論文はありませんでした．そのことを考えると，高校生の段階で数学の研究を課すのは無理があると思われているからなのか，と思ったりもしましたが，腑に落ちませんでした．

そこで，思い切って，数学の授業時間を使って，生徒に「数学の課題研究」を課すことにしました．いきなり研究せよといっても，私自身がそうであったように，何から手をつけてよいか分からない生徒が多いだろうと思い，次の指示をしました．

（ア）現在疑問に思っている数学上の疑問を各自１０問ずつ出す．

（イ）その問題を生徒間で情報交換して解いていく．

（ウ）１か月過ぎても解けずに残っている問題を，個人またはグループで研究する．

しかし，この方法は，最初の段階で，つまずきました．その原因は，生徒が，いままで疑問に思ってきたことを忘れてしまっていて，疑問そのものを生徒自身が認識していないということでした．１人１０問というのも多すぎたのかもしれませんが，生徒は，参考書・問題集および図書館の蔵書から問題を拾ってくるようになり，答えも写してきていました．そこで，改めて，次の指示をしなくてはなりませんでした．

（エ）テーマをさがすのに本を見てはいけない．

（オ）本は疑問を解決するときの参考資料としてだけ利用を認める．

生徒の，この実情を知ってからは，多少飛躍があるかもしれませんが，私は，小学生の夏休みの１人１研究の多くが，理科・社会の分野であることの弊害がでているのではないかと気になるようになりました．数学の研究が容易でないことは周知の通りですが，理科・社会と同じで，数学にも研究する余地はたくさんあります．歴史に残るような大発見につながる研究は，どの分野でも簡単ではありません．しかし，課題研究を，こんなことも成り立つのか，と本人が見つけながら学習する発見学習の延長線上にとらえれば，小学生でも，中学・高校生でも研究はできるのではないかと思います．以来，私が担当する生徒には，そのことを意識して教えることにしました．

上記の「数学の課題研究」で，四角形の合同条件について研究し，レポートを提出してくれた生徒（３人のグループ）がいました．動機は，今までに，だれもこの考えをしたことがないと思ったからだということでした．

本からひろってきた問題ではなく，まったくのオリジナルなテーマを研究する生徒が現れたということで，私は大変うれしく思いました．せめて高校生には，この程度の指導は必要ではないかと思いながら，私自身は拡大実数の研究をしていました．生徒に，「数学は単に学ぶだけのものではなく創るものである」といっていた自分が途中でやめるわけにはいきません．いま思えば，それが適度なプレッシャーになって，４７年間も研究をし続けることができたのではないかと思っています．

著者略歴

1948　誕生.

1971　立命館大学理工学部数学物理学科卒業.
　　　高等学校数学科教諭.

1973　数学セミナー（日本評論社）のNOTE欄に
　　　「累次積分に関する一公式」を投稿し掲載される.

1979　日本数学教育学会(第61回宇都宮大会)にて
　　　「実数の拡張に関する一例」を発表.

1988　日本数学教育学会(第70回静岡大会)にて
　　　「数直線上の点の大きさについて」を発表.

2009　高等学校教頭定年退職.

2011　日本数学教育学会(第93回神奈川大会)にて
　　　「拡大実数論」を発表.

2016　著書「拡大実数論の源流」を自費出版.

著　者：西　田　正　夫

発行者：西　田　正　夫
住　所〒４３２－８００３
静岡県浜松市中区和地山２－８－１５
e-mail：ｋａｋｕｄａｉｊｉｓｓｕｕ＠ｙａｈｏｏ．ｃｏ．ｊｐ

発行日：平成２８年９月２８日