行列と行列式

matrix & determinant

行列表現

たとえば1次2元連立方程式があるときに

$$x + y = 2$$
$$2x + 3y = 5$$

行列に書き直せば

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

となる。

（この解法は後に書きます。）

ここで、

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$:係数行列、

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:変数、ベクトル、

$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$:定数行列

といいます。

行列の要素element a_{ij}

行列の要素はi:行番号、j:列番号で示す。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

行row

列column

行列の次数(order)

（例1）

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 3\end{bmatrix}、\quad B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

Aは２行、３列の行列なので、

（2×3）次の行列という。

Bは（3×2）次である。

特別な行列

単位行列unit(I,Eで表す)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ゼロ行列zero

$$\mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

対角行列diagonal

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

逆行列inverse

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{1}/_{a_{11}} & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{a_{22}} \end{bmatrix}$$

（注意）A⁻¹は分数ではない、要素は分数。

行列計算の規則

- $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] =$
- $[a_{ij} + b_{ij}]$
- A+(B+C)=(A+B)+C
- A+B=B+A
- スカラーの掛算と行列の掛算
- kA＝Ak
- $kA = k[a_{ij}] = [ka_{ij}]$
- C=AB
- $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$
- (i=1,2,…,r;j=1,2,…,c)
- A(BC)=(AB)C
- A(B+C)=AB+AC
- (B-C)A=BA-CA
- 一般にAB≠BA
- $(AB)^T = B^T A^T$

規則

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

- Aのトレース
- tr(A)=a１１+a２２+…
- tr(A+B)=tr(A)+tr(B)
- tr(A^T)=tr(A)
- tr(kA)=k　tr(A)
- tr(AB)=tr(BA)

LU分解

- $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -3 & -4 & 13\\ 2 & 1 & -5\end{bmatrix}$
- 乗数＝3、-2
- $A\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -3 & 1\end{bmatrix}\sim$
- 乗数$\frac{3}{2}$
- $\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -3+\frac{3}{2}2 & 1+\frac{3}{2}4\end{bmatrix}$
- $\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$
- A=LU
- $U=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$
- 乗数の負の数より
- $L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 2 & -\frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}$

行列の逆行列

- AB=BA=I
- のときBはAの逆行列という。
- $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$は
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列である。
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$であるから。

- 例題）次の逆行列の行列Aを求めよ。
- $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$
- $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

和sumとスカラー積scalar

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -9\\ -6 & -9\\ 5 & -9\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}2+3 & 5-9\\ 3-6 & 1-9\\ 3+5 & 2-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -3 & -8\\ 8 & -7\end{bmatrix}=B+A$$

$$kA=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12} & ka_{13}\\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23}\end{bmatrix}$$

$$-A=(-1)A=A(-1)$$

$$A-B=A+(-B)=-B+A$$

行列積product

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

(例)$\begin{bmatrix} 7 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -18 \end{bmatrix}$

ブロック行列

- $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} E & F \\ O & G \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} R & S \\ O & 1 \end{bmatrix}$
- $AB = \begin{bmatrix} ER & ES + FT \\ O & GT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 & 4 \\ 19 & 26 & 33 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

直交行列

- $A^T = A^{-1}$, つまり$AA^T = A^T A$ならば
- 実行列Aは直交行列である。
- Aが3×3次の行
- $u_1 = (a_1, a_2, a_3), u_2 = (b_1, b_2, b_3),$
- $u_3 = (c_1, c_2, c_3)$
- をもつ実直交行列とする。

- $AA^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$
- $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$
- ${a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 = 1$
- $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

- $a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$
- $b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = 0$
- ${b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 = 1$
- $b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$
- $c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0$
- $c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 = 0$
- ${c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2 = 1$

直交行列

- つまり
- $u_1 \cdot u_1 = 1, u_2 \cdot u_2 = 1\ , u_3 \cdot u_3 = 1$
- $u_i \cdot u_j = 0\ (i \neq j)$
- R^n上のベクトル$u_1, u_2, \ldots, u_n$は、ベクトルが単位ベクトルで、それぞれ直交している場合、ベクトルの直交集合を形成しているといえる。
- $u_i \cdot u_j \begin{cases} 0 & i \neq j\text{の場合} \\ 1 & i = j\text{の場合} \end{cases}$

転置行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

行と列を入れ替えた行列を、転置行列(transposed matrix)という。

転置行列の定理

A,Bは行列、kはスカラー（1個の数字）

1）$(A+B)^T = A^T + B^T$

2)$(kA)^T = kA^T = A^T k$

3)$(A^T)^T = A$

4)$(AB)^T = B^T A^T$

正方行列

（例）行列A_{mn}においてm=nの行列を正方行列(square)という。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 10 & 12 & 14 \end{bmatrix}$$

続き

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -15 \\ 12 & 0 & -20 \\ 17 & 7 & -35 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -13 & -10 & -7 \\ 2 & 0 & -2 \\ -11 & -14 & -17 \end{bmatrix}$$

一般に$AB \neq BA$であることがわかる。

（AB=BAは特別な行列。BはAの逆行列、Aは直交行列、A＝B=Iなど。$A^{-1}A = AA^{-1} = I$(単位行列)）

単位行列(I)

単位行列(unit)は”I”又は”E”で表す。

$AI = IA = A$

kはスカラーとすると

$(kI)A = k(IA) = kA$

(例)$k = 5,$

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ならば$kI = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

対角行列

対角要素(diagonal)以外の要素がゼロの行列

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

（例）多角測量、水準測量の重量は対角行列です。そのときには対角要素は路線長の逆数にします。重量＝1/路線長。

対角行列の逆行列

- $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$,
$\begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$

対称、直交、正規

1) 対称行列symmetry：行列Aにおいて$A^T = A$
2) 交代行列：$A^T = -A$

ただし、Aは正方行列

（例）

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Aは対称行列

交代行列

（例）$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

Bは交代行列

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Cは、正方行列でないので、対称でも、歪対称でもない。

直交行列

実行列Aにおいて$A^T = A^{-1}$のとき、すなわち$AA^T = A^TA = I$ならば、Aを直交行列(orthogonal)という。

（例）

$$A = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

$AA^T = A^TA = I$ なのでAは直交行列

正規行列normal

正規行列は、複素数に成分をとる正方行列、自身のエルミート共軛と可換の行列。

A*A＝AA*

A*:Aの共軛転置

成分が実数の場合A*＝A^Tが成り立ち、交換法則$A^TA=AA^T$が成り立つとき、Aは正規である。

Aは対称、直交、又は交代行列ならば、Aは正規行列である。

（例）$A=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $AA^T=\begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$

$A^TA=\begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$ したがってAは正規

正規性と対角化

正規性は、対角化可能を調べるのが便利。

行列が正規であるための必要十分条件は、それが対角行列とユニタリ行列に対して相似となること。

A*A＝AA*を満たす任意の行列Aは対角可能である。

ユニタリ行列(複素行列）

- U*U=UU*
- 正規行列、任意ベクトルxに対して
- Uによる変換は等長変換$\|Ux\| = \|x\|$
- 正則、逆行列$U^{-1} = U^*$
- 対角可能、|固有値|＝1、|λ|＝1
- 特異値＝1、$\sigma_i(U) = 1$
- 行列式の絶対値＝1

ユニタリと同値

1. UU*＝I
2. U*U=I
3. Uは正則、$U^{-1} = U^*$
4. Uの列は正規直交基底
5. Uの行は正規直交基底
6. Uは等長写像
7. Uは単位円上の固有値を持つ正規行列

エルミート行列

Aのエルミート転置、A^HはAの複素共役転置

$$A^H = \overline{A^T}$$

$$AA^H = A^H A$$

ならば、Aは正規である。

正規の条件:

正規行列は対角行列

正規行列は正規直交集合を形成配置する固有値の基準基底をもつ。

エルミート行列

自己のエルミート転置に等しい（又は複素共役転置に等しい）場合、Aはエルミートである。

$$A = A^H$$

相似行列

$$A = P^{-1}DP$$

D:対角行列

においてAはDに相似である。

例1）対角化

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \mathrm{P} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

続き

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -6/11 & -6/11 & 5/11 \\ -3/11 & 8/11 & -3/11 \\ 1/11 & 1/11 & 1/11 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

例2）$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$を対角化せよ。

$$P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

行列式determinant

n次の行列の行列式は

det(A), |A|、または

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で表される。行列式は行列と違って、値を持っている。

行列Aの行列式$|A| = 0$のときAは非正則といい、逆行列A^{-1}が存在しない。

２次の行列式（計算法）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

\-　　　　　　　　+

　左上から右下に掛けるとき+、右上から左下に掛けるとき-にします。

(例)

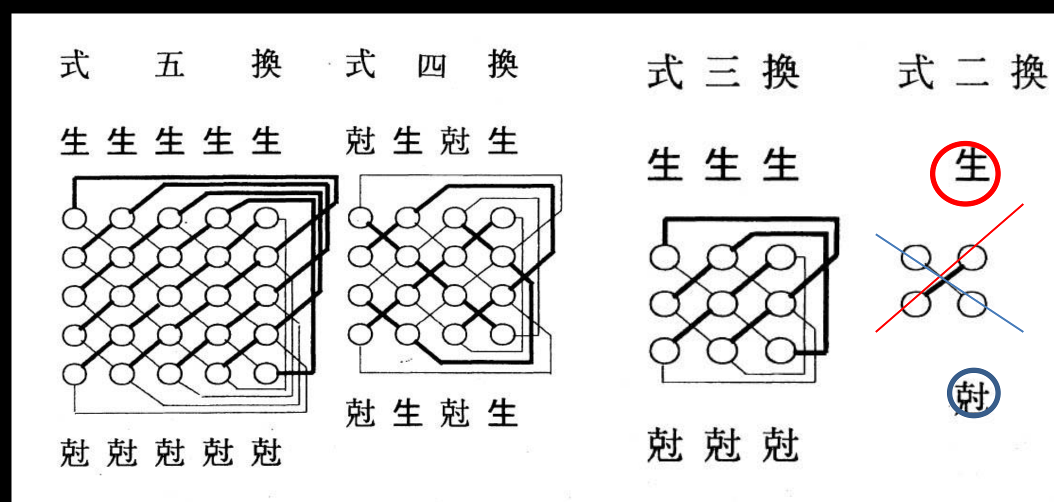
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 12 = 18$$

行列式の発見

- 楊輝（中国、1238？～1298）は詳解九章算術で２元一次連立方程式をクラメルの規則で解く。
- 1545年ジェロラモ・カルダーノ（Gerolamo (**Geronimo**） Cardano1501～76、カルダン継手の発明者）はArs Magnaで2 × 2次のクラメルの規則で解く。
- これらは、行列式を定義したものではないが、その概念の萌芽である。
- 高次の行列式の定義はそれより100年経って、関孝和、田中由真、ドイツのライプニッツによりほぼ同時に独立して考案された。

和算(行列式)

1683年江戸の和算家、関孝和が解伏題之法で2次、3次、4次、5次の行列式を「サラス」(たすきがけの法)で計算する。サラスは(Pierre Frederic Sarrus、1798〜1861)で、ドイツ、フランスでしか知られていない。



関孝和の行列式

関の行列式の表現（縦書きなので、+、-が反対）

-（尅：こく）

$$\begin{matrix} a & x \\ b & y \end{matrix} = xb - ya$$

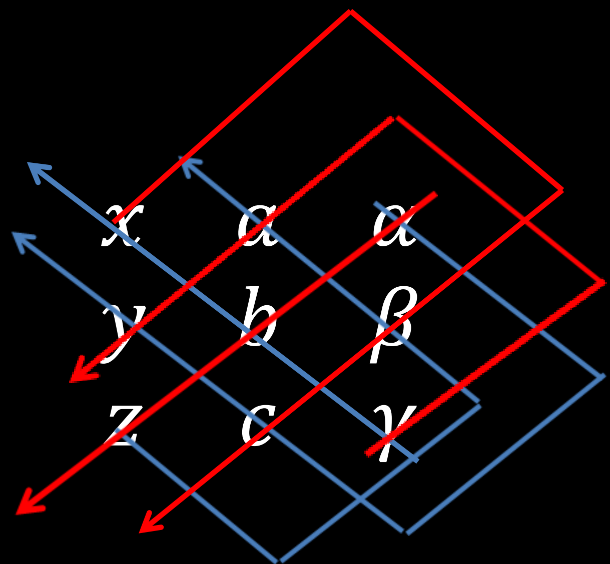
+（生：しょう）

今日の行列式（横書き）

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = xb - ya$$

-　　+　（∵計算結果は同じ。）

関の行列式（縦書き）



青：マイナス、赤：プラス

$$= \alpha(bz - yc) - \beta(az - xc) + \gamma(ay - xb)$$

- 関の3次の行列式も縦書きなのだが、結果は現代と同じになる。4次以降は、サラスでは解けないので関は間違っている。

線形式への応用

$a_1 x + b_1 y = c_1$

$a_2 x + b_2 y = c_2$

$\mathrm{D} = a_1 b_2 - b_1 a_2$ とすると、これは上の式の行列式である。D≠0ならば上の式の解は次の通り求められる。（クラメルcramerの規則、1750年）

$$x = \frac{N_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \mathrm{y} = \frac{N_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

クラメル規則の計算例

2x+3y＝8

4x+9y＝22

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 22 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 22 \end{vmatrix} = 12$$

$$x = \frac{A_x}{A} = \frac{6}{6} = 1$$

$$y = \frac{A_y}{A} = \frac{12}{6} = 2$$

３次の行列式

３次の行列$A = [a_{ij}]$とすると、その行列式は次のように計算する。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

３次の行列式の値

$\det(A) =$

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$+$a_{13}a_{21}a_{32}$

-$a_{13}a_{22}a_{31}$-$a_{12}a_{21}a_{33}$-$a_{11}a_{23}a_{32}$

3次行列式の計算

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{22} & a_{32} \end{matrix}$$

\- \- \- + + +

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{22} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

（注）このサラス（たすきがけの）法は3次まで適用できる。4次以上はサラスは使えないので、余因子展開又は行(列）変換で解く。

行列式の計算規則

①ある行（又は列）の全要素がゼロならば行列式はゼロである

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

②ある行（又は列）をk倍したものを、他の行に加えても行列式の値は変わらない

計算規則

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

（注）次の変換には、最終変換した結果を用いること。

ラプラス展開

- 行列Aの行列式は、任意の行（又は列）の要素とコファクターcofactor（余因子）の積の和で表される。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

行・列変換transformation

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

上の行列式展開時の符号は

$$sgn(a_{23}) = (-1)^{2+3} = -1$$

続き

$$|A| = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} = -(-52 + 14) = 38$$

コファクタから逆行列を求める

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Aの９個のコファクタ（余因子）

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18$$

随伴行列adjoint

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2, A_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14 \, , A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10 \, ,$$

Aの逆行列

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

$$adjA = A^{\dagger^T} = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA$$

逆行列

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -14 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -14 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -46$$

$$\therefore A^{-1} = -\frac{1}{46}\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

部分行列(partitioned)の逆行列

部分行列で考えると、

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

BはAの逆行列、AはBの逆行列、

$A_{11}, B_{11}, A_{22}, B_{22}$は正方行列で、それぞれ逆行列をもつとする。

AB＝BA＝I（単位行列）より

部分行列による逆行列

(1) $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I$

(2) $A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = O$

(3) $B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = O$

(4) $B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I$

$B_{22} = \alpha^{-1}$とおく。

(2)より$A_{11}B_{12} + A_{12}\alpha^{-1} = O$

$A_{11}{}^{-1}A_{11}B_{12} + A_{11}{}^{-1}A_{12}\alpha^{-1} = O$

$B_{12} = -A_{11}{}^{-1}A_{12}\alpha^{-1}$

（3）より

$B_{21}A_{11}A_{11}{}^{-1} + \alpha^{-1}A_{21}A_{11}{}^{-1} = O$

$B_{21} = -\alpha^{-1}A_{21}A_{11}{}^{-1}$

(1)より$A_{11}{}^{-1}A_{11}B_{11} + A_{11}{}^{-1}A_{12}B_{21} = A_{11}{}^{-1}$

$B_{11} = A_{11}{}^{-1} - A_{11}{}^{-1}A_{12}B_{21}$

$= A_{11}{}^{-1} + A_{11}{}^{-1}A_{12}\ \alpha^{-1}A_{21}A_{11}{}^{-1}$

(4)にこれらを代入すると$B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I$

$-\alpha^{-1}A_{21}A_{11}{}^{-1}A_{12} + \alpha^{-1}A_{22} = I$

$\alpha = A_{22} - A_{21}A_{11}{}^{-1}A_{12}$

部分行列による逆行列

（まとめ）

$$A^{-1} = B$$

$$= \begin{bmatrix} {A_{11}}^{-1} - {A_{11}}^{-1} A_{12} B_{21} & -{A_{11}}^{-1} A_{12} \alpha^{-1} \\ -\alpha^{-1} A_{21} {A_{11}}^{-1} & (A_{22} - A_{21} {A_{11}}^{-1} A_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

ただし

$$\alpha = A_{22} - A_{21} {A_{11}}^{-1} A_{12}$$

例：部分行列による逆行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}{}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}{}^{-1}A_{12} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}{A_{11}}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = [1] - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\frac{1}{3}\right]$$

$$\alpha^{-1} = [3]$$

$$B_{11} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} [3] \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_{22} = [3]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

線形方程式の解

線形方程式（連立一次方程式）

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$$

記号で書くとAX=Bであり、$|A| \neq 0$ならば、Aは正則であり、$X = A^{-1}B$で解ける。

ここで、A^{-1}はAの逆行列であり、$A^{-1}A = AA^{-1} = I$(単位行列)で表せる。

行列式$|A| = \begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$

$$\text{転置行列}A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{随伴行列}adjA = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{逆行列}A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordanの消去法

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 2 & 1 & -4 & -30 \\ -5 & 8 & 17 & 96 \end{array}\right)\sim i$$

各行/aii

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 1 & 0.5 & -2 & -15 \\ 1 & -1.6 & -3.4 & -19.2 \end{array}\right)\sim$$

②、③行-①行

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1.3 & 2 & 4.33 \\ 0 & -1.5 & -5 & -33 \\ 0 & -3.6 & -6.4 & -37.2 \end{array}\right)\sim$$

②、③行/aii

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 3.333 & 22 \\ 0 & 1 & 1.777 & 10.333 \end{array}\right)\sim$$

③行-②行

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 3.333 & 22 \\ 0 & 0 & -1.555 & -11.666 \end{array}\right)$$

$\sim$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 3.333 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 7.5 \end{array}\right)\sim$$

③行/aii

Back Solution

②行-③行×a23

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7.5 \end{pmatrix} \sim$$

①行-③行×a13

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4.5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7.5 \end{pmatrix} \sim$$

- ①行-②行×a22

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7.5 \end{pmatrix} \sim$$

∴x1=1.5,x2=-3,x3=7.5

特別な解法(Gauss解法)

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$a11=0なので、
a11で割ると不定になる。
～ピボットに微小量をたすと

$\left(\begin{array}{cc|c} 0.001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\sim$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1000 & 1000 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\sim$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1000 & 1000 \\ 0 & -999 & -998 \end{array}\right)\sim$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1000 & 1000 \\ 0 & 1 & 0.999 \end{array}\right)\sim$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.999 \end{array}\right)\sim$

∴x1≒1、x2≒1

（上の例はコンピュータで計算する場合の処理法）

正則行列・ランクrank

1) 正方行列Aにおいて$|A| \neq 0$の行列ならばA^{-1}が存在する。これを正則行列という。

2) ランク(階数)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 3 & -2 & -8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 5\\ 0 & 3 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

これ以上行変換して、各行の要素が0にならないので、$Rank(A) = 3$となります。

行列微分differential

$$\frac{\partial(A^T P X)}{\partial X} = (A^T P)^T = P^T A$$

$$\frac{\partial(X^T P A)}{\partial X} = PA$$

$$\frac{\partial(X^T P A X)}{\partial X} = PAX + (X^T P A)^T$$
$$= PAX + A^T P^T X$$

最小二乗(Least squares)の期待値E

残差v、重量pとするとn個の観測値に関して

$\mathrm{E} = \sum p_i v_i v_i$ → 最小（普通の式）

$E = V^T PV$ → 最小 （行列表現）

観測方程式$V = AX - f$ これをEに代入し、展開すると

$E = (AX - f)^T P(AX - f) =$

$(X^T A^T - f^T)(PAX - Pf) = X^T A^T PAX - X^T A^T Pf - f^T PAX + f^T Pf$ → 最小

ここで、$P^T = P$（対称行列）

正規方程式(normal):NX=F

EをXで偏微分すると

$\frac{\partial E}{\partial X} = A^T PAX$+$(X^T A^T PA)^T$$-A^T Pf - (f^T PA)^T$

$= 2A^T PAX$-2 $A^T Pf$=0

正規方程式$A^T PAX = A^T Pf$

$A^T PAX = N, A^T Pf = f$ とおくと、正規方程式は

$NX = f$で書ける。これを解くと

$$\mathrm{X} = N^{-1}F$$

補正値$V = AX - f$

パラメータの分散共分散$\sigma_o{}^2 N^{-1}$

単位重量当たりの分散

分散$\sigma_o{}^2 = \frac{1}{n-r} V^T P V$

n:観測値の数、r:未知数の数

（注）Nは$N = N^T$なので、対称行列である。

対角化:固有値、固有ベクトル

$D=P^{-1}AP$ のとき

$A=PDP^{-1}$ で表される。D＝対角行列

$$A^m=(PDP^{-1})^m=PD^mP^{-1}$$

(例①)

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$$

A^n と $A^{1/2}$ を求めよ。(ケーリーハミルトンでは求められない。)相似行列による。

固有値eigen value

固有方程式characteristic eqs.

$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$=$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$

固有値$\lambda = 1, 4$

λ＝1のとき固有ベクトルは

$$2x_1 + x_2 = 0$$
$$2x_1 + x_2 = 0$$

ベクトルvector

$x_2 = -2$とすると　$x_1 = 1$ なので

ベクトル$X = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

λ＝4のときベクトルは

$-x_1 + x_2 = 0$

$2x_1 - x_2 = 0$

$x_1 = 1$ とすると$x_2 = 1$

行列PとD

ベクトル$X = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$D = P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

固有値、固有ベクトル、対角化

- 対角化アルゴリズム（n正方行列A）
- 1）Aの固有方程式Δ（t）
- 2）Aの固有値のためのΔ（t）の根の計算
- 3）Aの固有値λの繰り返し計算
- (a)M=A-λI=0のλに代入
- (b)MX=Oの同時方程式の解
- （c）viの計算

Pの計算

- $P = \{v1, v2, \dots, vn\}$
- vi:固有ベクトル
- $D=P^{-1}AP=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$
- $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$：固有値

A^nの計算

$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ …Pは固有ベクトルなので

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2n} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2^{2n} \\ -2 & 2^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2^{n+1} & -1 + 2^{2n} \\ -2 + 2^{2n+1} & 2 + 2^{2n} \end{bmatrix}$$

$A^{1/2}$の計算

$A^{1/2} = (PDP^{-1})^{1/2} = P\sqrt{D}P^{-1}$ …Pは固有ベクトルなので

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + 2\sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ -2 + \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

（例②）固有多項式でA^3を求める

行列の固有多項式(ケーリーハミルトン)

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{A}^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

固有方程式

$$|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 5\lambda + \lambda^2 - 6 =$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

固有多項式＝行列多項式

固有方程式から行列多項式は次式で書ける。

$\mathrm{A}^2 - 5\mathrm{A} - 2\mathrm{I} = 0,\ \ A^2 = 5A + 2I$

$$AA^2 = A(5A + 2I)$$

$\mathrm{A}^3 = 5\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 35 & 50 \\ 75 & 110 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}$

固有多項式

(a) $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$\Delta(t)=t^2-tr(A)t+\det(A)=$
$t^2-(a_{11}+a_{22})t+\det(A)$

(b) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \mathrm{a}_{13} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} \\ \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{32} & \mathrm{a}_{33} \end{bmatrix}$

$\Delta(\mathrm{t})=\mathrm{t}^3-\mathrm{tr}(\mathrm{A})\mathrm{t}^2+(\mathrm{A}_{11}+\mathrm{A}_{22}+\mathrm{A}_{33})t-$
$\det(\mathrm{A})$

ここで$\mathrm{A}_{11},\mathrm{A}_{22},\mathrm{A}_{33}$は$\mathrm{a}_{11},\mathrm{a}_{22},\mathrm{a}_{33}$のコファクタである。

多項式による逆行列(2次)

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \Delta(t) = t^2 - tr(A)t + \det(A);$

tr(A)=7, det(A)=10-12=-2 より $\Delta(t) = t^2$-7t-2なので

$A^2 - 7A - 2I = 0$となり　A^{-1}をかけて、

$A^{-1} = \frac{1}{2}\{A - 7I\} = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$$

多項式による逆行列（3次）

（b）$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\Delta(\mathrm{t}) = \mathrm{t}^3 - \mathrm{tr(A)t}^2 + (\mathrm{A}_{11} + \mathrm{A}_{22} + \mathrm{A}_{33})t - \det(\mathrm{A})$

ここでtr(A)=6,$A_{11} = 0, A_{22} = 3, A_{33} = 1$より,

$\mathrm{A}_{11} + \mathrm{A}_{22} + A_{33}$＝4、

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1$$

$$\Delta(\mathrm{t})=\mathrm{t}^3-\mathrm{tr(A)t}^2+(\mathrm{A}_{11}+\mathrm{A}_{22}+\mathrm{A}_{33})t-\det(\mathrm{A})$$
$$=t^3-6t^2+4t-1$$

$$A^3-6A^2+4A-I=0\text{；}\ I=A^3-6A^2+4A$$

A^{-1}をかけると

$$A^{-1}=A^2-6A+4I,$$

$$A^2=\begin{bmatrix}2 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 10\\ 5 & 11 & 21\end{bmatrix}$$

答え(逆行列)

$$A^{-1} = A^2 - 6A + 4I$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 10 \\ 5 & 11 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \\ -6 & -12 & -24 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

４次の逆行列（行変換）

$$[A|I] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -3 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 & -3 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆行列

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 27/265 & -120/265 & 97/265 & -30/265 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 13/265 & 60/265 & -22/265 & 15/265 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -57/265 & 165/265 & -87/265 & -25/265 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 49/265 & -100/265 & 19/265 & -25/265 \end{bmatrix}$$

$$= [I|A^{-1}]$$

内積

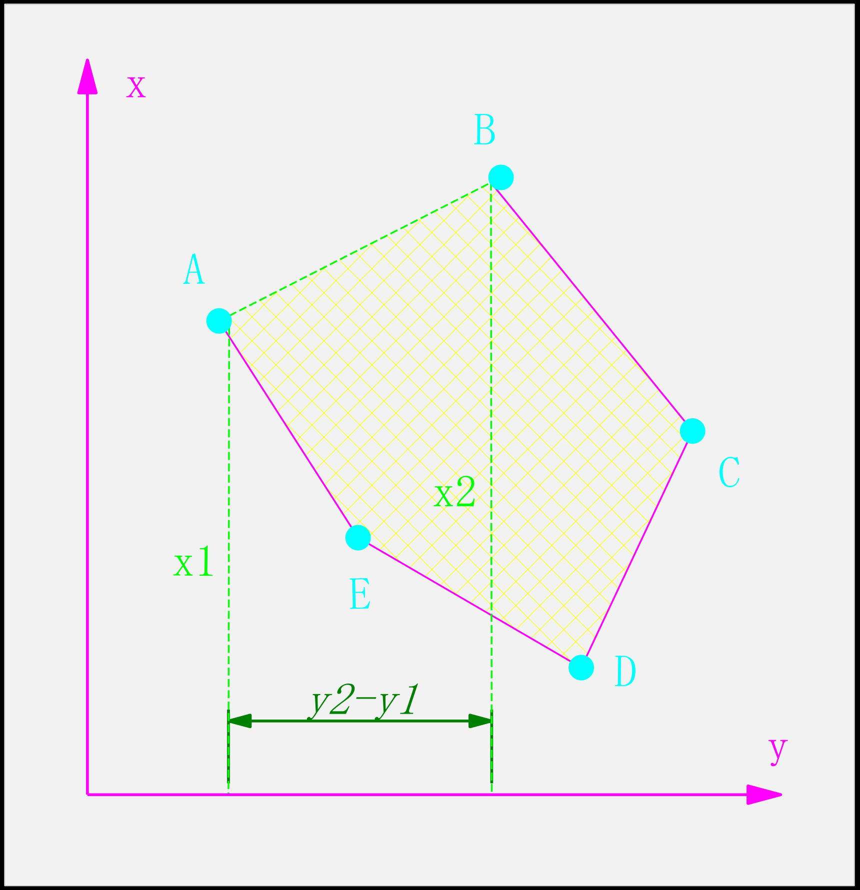
- スカラーz=a+ibの複素共役は$\bar{z} = a - ib$
- 行列Aの複素共役は$\bar{A}$
- C1. スカラー$\bar{\bar{x}} = x$, $\bar{\bar{A}} = A$
- C2. $\bar{x} = x$のときxは実数、$\bar{A} = A$ならばAは実行列
- C3. $x + \bar{x}$は実スカラー、$\mathrm{A} + \bar{A}$は実行列
- C4. $\overline{xy} = (\bar{x})(\bar{y})$,後者の積が定義されるならば$\overline{\mathrm{AB}} = \bar{A}\bar{B}$

面積計算-倍横距法double meridian

多角形ABCDEの面積＝

$$2S = (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + \cdots + (x_n + x_1)(y_1 - y_n)$$

右の図ではn=5



座標法coordinate method

倍横距の式を展開して、

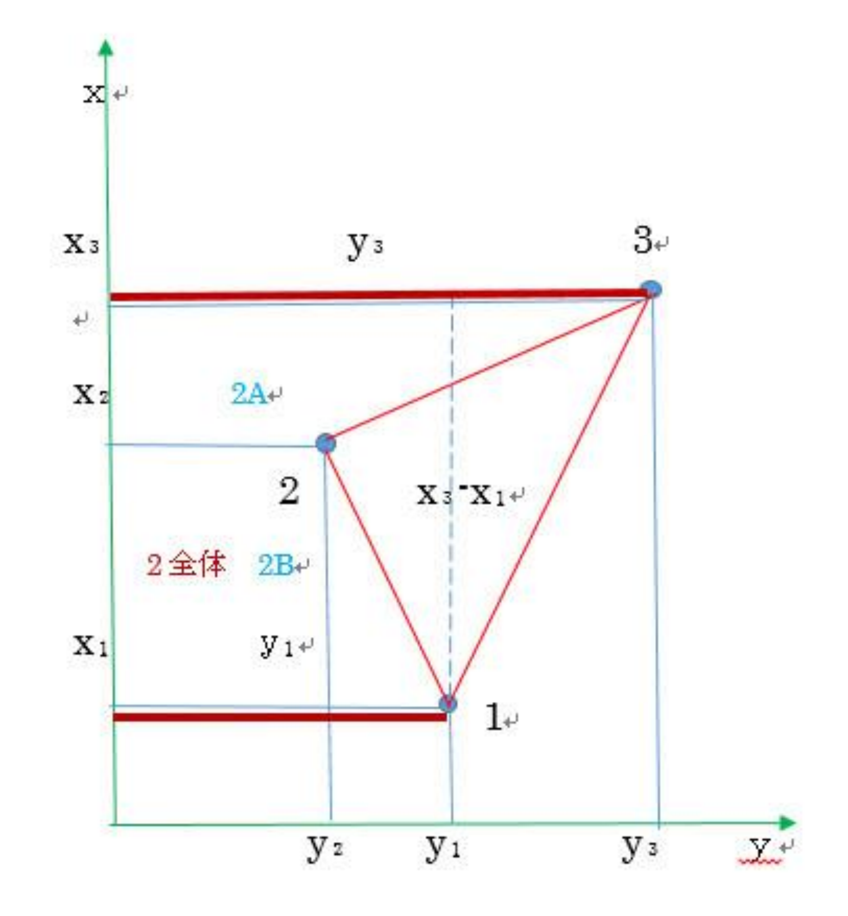
次のようにまとめることができる。

$$2S = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_{i+1} - y_{i-1})$$

（証明）△123の面積

2（全体）

$= (y_3 + y_1)(x_3 - x_1) =$
$y_3x_3 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_1y_1$



（証明）△123の面積

2（全体）

$= (y_3 + y_1)(x_3 - x_1) =$

$y_3x_3 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_1y_1$

$2(A) = (y_2 + y_3)(x_2 - x_3)$

$= x_2y_2 - x_3y_2$

$+ x_2y_3 - x_3y_3$

$2(B) = (y_1 + y_2)(x_1 - x_2)$

$= x_1y_1 - x_2y_1 +$

$x_1y_2 - x_2y_2$

$2 \times \Delta 123 = 2S$

$= 2(\text{全体}) + 2(A)$

$+ 2(B)$

$= x_1(y_2 - y_3) +$

$x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$

一般的に

$$\therefore 2S = \sum_{i=1}^{n} x_i(y_{i+1} - y_{i-1})$$

行列式による面積

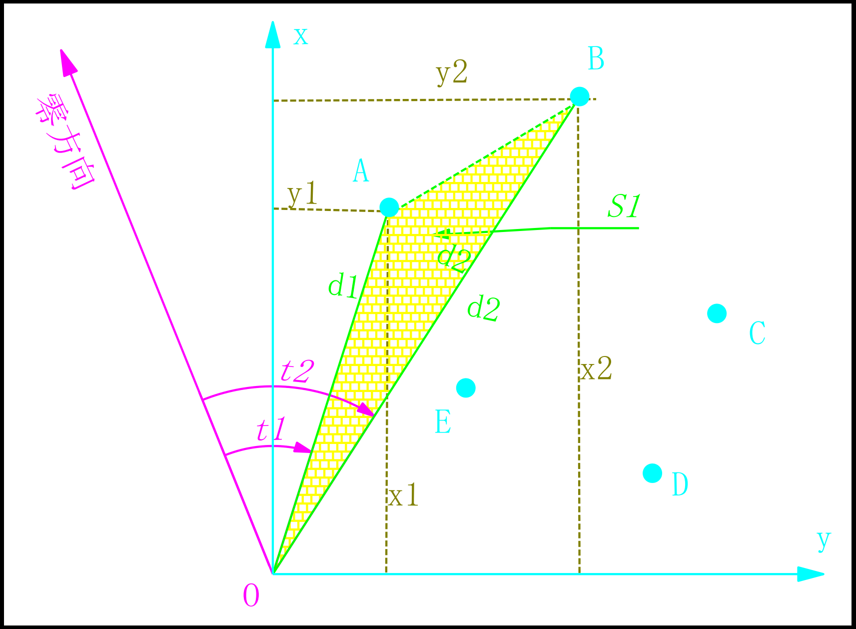
放射法による方向角tと距離dによる△OABの面積は

$$2S_1 = d_1 d_2 \sin(t_2 - t_1)$$

で求められ、

$$\sin(t_2 - t_1) = sint_2$$
$$cost_1 - cost_2 sint_1$$

なので、



n個の三角形の面積S

$$2S_1$$
$$= d_1 d_2 \begin{vmatrix} cost_1 & sint_1 \\ cost_2 & sint_2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} d_1 cost_1 & d_1 sint_1 \\ d_2 cost_2 & d_2 cost_2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

これが三角形OABの面積

n個の三角形は

$$2S = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}$$

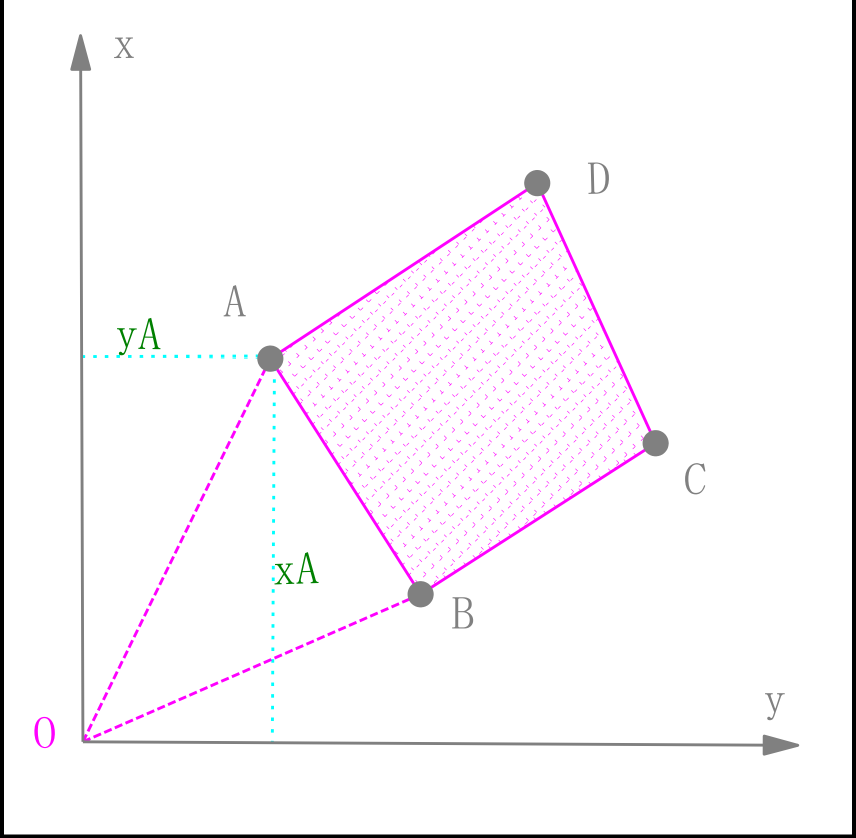
四辺形quadrilateralの面積

三角形OABの面積

$$2S = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix}$$

四辺形ABCDの面積

$$2\square\mathrm{ABCD} = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_C & y_C \\ x_D & y_D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_D & y_D \\ x_A & y_A \end{vmatrix}$$



四辺形の面積（続）

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B & y_B \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_D & y_D \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_D - x_B & y_D - y_B \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

三角形の面積

△ABC→ABCCの面積

$$2\Delta ABC = \begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_C - x_B & y_C - y_B \end{vmatrix}$$

$$2\Delta ABC = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

とおき、前式と等式であることを証明する。

1行－3行、2行－3行より

三角形の面積

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C & 0 \\ x_B - x_C & y_B - y_C & 0 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix}$$

$$\therefore 2\Delta ABC = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

直線回帰(linear regression)①
yに誤差、xになし

n個の観測したyがy=ax+bの直線式で表される場合のy=ax+bの推定を直線回帰という。

残差方程式

$$v_i = ax_i + b - y_i$$

n個観測値

（x_1, y_1）,(x_2, y_2),…,

(x_n, y_n)

n個の観測値を残差方程式に代入して

$$v_1 = ax_1 + b - y_1$$
$$v_2 = ax_2 + b - y_2$$

…

$$v_n = ax_n + b - y_n$$

- これらを用いて最小二乗法の目的関数Eに代入すると

直線回帰

$$\mathrm{E} = \sum {v_i}^2 = \sum (ax_i + b - y_i)^2$$

＝最小

これは$\frac{\partial E}{\partial a} = 0, \frac{\partial E}{\partial b} = 0$から解ける。

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum 2x(ax + b - y) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum 2(ax + b - y) = 0$$

すなわち、これらを整理すると

$$a\sum x^2 + b\sum x = \sum xy$$

$a\sum x + nb$=$\sum y$

これらを解くために2つ目の式より

$$nb = \sum y - a\sum x$$

$$b = \frac{\sum y}{n} - a\frac{\sum x}{n}$$

$$an\sum x^2 + nb\sum x = n\sum xy$$

-)$a(\sum x)^2$+nb$\sum x$=$\sum x \sum y$

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

直線回帰②xに誤差、yになし

y＝ax+b

x=y/a-b/a

A=1/a,B=-b/aとすると

x=Ay+Bが回帰式

v=Ay+B-x

n個の観測値を代入すると

$$E = \sum v^2 = \sum (Ay + B - x)^2$$

＝最小

$$\frac{\partial E}{\partial A} = \sum 2y(Ax + B - x) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum 2(Ax + B - x) = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{A}} &= \sum(2\mathrm{y_i})(\mathrm{A}\cdot \mathrm{y_i}+\mathrm{B}-\mathrm{x_i}) = 0\\ \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{B}} &= \sum(2)(\mathrm{A}\cdot \mathrm{y_i}+\mathrm{B}-\mathrm{x_i}) = 0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{A}\sum \mathrm{y_i^2}+\mathrm{B}\sum \mathrm{y_i}-\sum \mathrm{x_i y_i} = 0\\ \mathrm{A}\sum \mathrm{y_i}+\mathrm{nB}-\sum \mathrm{x_i} = 0\end{aligned}\right\}$$

二番目の式より

$$B = (\sum \mathrm{x_i})/n - A(\sum y_i)/n$$

$$\therefore \mathrm{A} = \frac{\sum \mathrm{xy}-\frac{\sum \mathrm{x}\sum \mathrm{y}}{\mathrm{n}}}{\sum \mathrm{y}^2-\frac{(\sum \mathrm{y})^2}{\mathrm{n}}}\left(\equiv \frac{\mathrm{S_{xy}}}{\mathrm{S_y^2}}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{A}} = \frac{\sum \mathbf{y^2}-\frac{(\sum \mathbf{y})^2}{\mathbf{n}}}{\sum \mathbf{xy}-\frac{\sum \mathbf{x}\sum \mathbf{y}}{\mathbf{n}}}\left(\equiv \frac{\mathbf{S_y^2}}{\mathbf{S_{xy}}}\right)$$

$$\therefore \mathrm{b} = \frac{\sum \mathrm{y}}{\mathrm{n}} - \mathrm{a}\cdot\frac{\sum \mathrm{x}}{\mathrm{n}}$$

直交回帰orthogonal

xにも、yにも誤差があり、誤差ヴェクトルが回帰直線y=ax+bに直角に交わっている場合、直交回帰という。

重心座標

$$\left.\begin{aligned} X_i &= x_i - \frac{\sum x_i}{n} = x_i - \bar{x} \\ Y_i &= y_i - \frac{\sum y_i}{n} = y_i - \bar{y} \end{aligned}\right\}$$

- 重心座標系(X_i, Y_i)から重心を座標原点にした回帰直線自体をu軸、それに直角な軸をv軸とし、座標軸の回転はθである。

$$\left.\begin{aligned} u_i &= X_i \cos\theta + Y_i \sin\theta \\ v_i &= -X_i \sin\theta + Y_i \cos\theta \end{aligned}\right\}$$

直交回帰

$$\mathrm{E} = \sum \mathrm{v_i^2} \to \min$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{v_i}} \cdot \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{v_i}} = \frac{\partial \sum \mathrm{v_i^2}}{\partial \mathrm{v_i}} = \sum (2\mathrm{v_i})$$

$$\frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \theta} = \frac{\partial (-\mathrm{X_i} \cdot \sin\theta + \mathrm{Y_i} \cdot \cos\theta)}{\partial \theta}$$

$$= -\mathrm{X_i} \cdot \cos\theta - \mathrm{Y_i} \cdot \sin\theta = -\mathrm{u_i}$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{v_i}} \cdot \frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \theta} = (2\mathrm{v_i})(-\mathrm{u_i})$$

$$= 0$$

$$\therefore \sum \mathrm{u_i v_i} = 0$$

$$\cos\theta \sin\theta \sum (\mathrm{X_i^2} - \mathrm{Y_i^2})$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \sum \mathrm{X_i Y_i}$$

$$\cos\theta \sin\theta \sum (\mathrm{X_i^2} - \mathrm{Y_i^2})$$

$$= (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \sum \mathrm{X_i Y_i}$$

直交回帰

$$\therefore \frac{2\mathrm{cos\theta sin\theta}}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{2\sum \mathrm{X_i Y_i}}{\sum(\mathrm{X_i^2} - \mathrm{Y_i^2})} (\equiv \mathrm{tan2\theta})$$

$$\mathrm{tan2\theta} = \frac{2\mathrm{S_{xy}}}{\mathrm{S_x}^2 - \mathrm{S_y}^2}$$

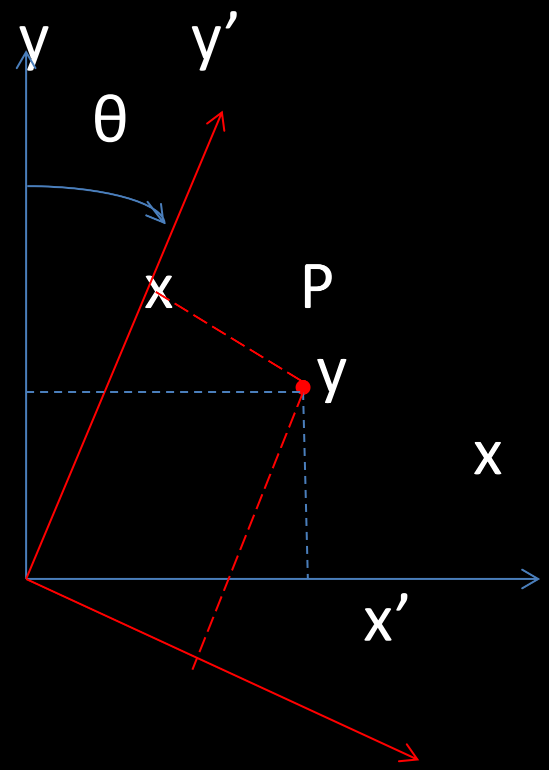
$$\mathrm{S_{xy}}\tan^2\theta + \left(\mathrm{S_x^2} - \mathrm{S_y^2}\right)\mathrm{tan\theta} - \mathrm{S_{xy}} = 0$$

$$\mathrm{a} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{S_x^2} - \mathrm{S_y^2}}{\mathrm{S_{xy}}}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{S_x^2} - \mathrm{S_y^2}}{\mathrm{S_{xy}}}\right)^2 + 1}$$

$$\therefore \mathrm{b} = \frac{\sum \mathrm{y}}{\mathrm{n}} - a \cdot \frac{\sum \mathrm{x}}{\mathrm{n}}$$

Helmert変換

(回転)



（x,y）⇒（x’,y’）への変換

$$x' = x cos\theta - y sin\theta$$

$$y' = y cos\theta + x sin\theta$$

(回転)+（軸移動）+（縮率）

$$x' = sx cos\theta - sy sin\theta + x_o$$

$$y' = sy cos\theta + sx sin\theta + y_o$$

ここで

a=$s cos\theta$,b= $s sin\theta$, $c = x_o$,

$d = y_o$とおくと

$$x' = ax - by + c$$

$$y' = ay + bx + d$$

アフィン変換

(回転)+（軸移動）+（縮率）

$$x' = s_x x cos\theta - s_y y sin\theta + x_o$$

$$y' = s_x x sin\theta + s_y y cos\theta + y_o$$

ここで

a=$s_x cos\theta$,b=-$s_y sin\theta$,
$c = x_o, d = s_x sin\theta,$
$d = s_y cos\theta, e = y_o$とおくと

$$x' = ax + by + c$$

$$y' = dx + ey + f$$

ヘルマート変換(例題)

- 地図上の位置(x,y)

1(2000,1500)

2(0,1500)

3(0,0)

4(2000,0)

- ディスプレイ上の位置(X,Y)

1(8605,6490)

2(605,6640)

3(500,650)

4(8480,510)

- X=xa-yb+c
- Y=ya+xb+d

の観測方程式に上の座標を代入すると

$$
\begin{bmatrix}
2000 & -1500 & 1 & 0 \\
1500 & 2000 & 0 & 1 \\
1500 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1500 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
2000 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2000 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 8605 \\ 6490 \\ 605 \\ 6640 \\ 500 \\ 650 \\ 8480 \\ 510 \end{bmatrix}
$$

方程式はAX=B

又はV=AX-B

V:残差

残差の二乗を最小にすることから

$$E = v^T v \Rightarrow \text{最小}$$

$\frac{\partial v^T v}{\partial a} = 0, \frac{\partial v^T v}{\partial b} = 0, \dots$

$A^T AX = A^T B$,又はNX=Fより

$$\begin{bmatrix} 125 \cdot 10^5 & 0 & 4000 & 3000 \\ 0 & 125 \cdot 10^5 & -3000 & 4000 \\ 4000 & -3000 & 4 & 0 \\ 3000 & 4000 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 53{,}865{,}000 \\ 185{,}000 \\ 18{,}190 \\ 14{,}290 \end{bmatrix}$$

a=9983/2500=3.9932

b=-37/500=-0.074000

c=2494/5=498.80

d=3258/5=651.60

v_{x1}=2000･3.9932-1500(-0.074)+498.80-8605=-8.8

v_{y1}=1500･3.9932+2000･(-0.074)+651.60-6490=3.4

v_{x2}=-1500(-0.074)+498.80-605=4.8

v_{y2}=1500･3.9932+0(-0.074)+651.60-6640=1.4

v_{x3}=498.80-500=-1.2

v_{y3}=651.60-650=1.6

v_{x4}=2000･3.9932+498.80-8480=5.2

v_{y4}=2000･(-0.074)+651.60-510=-6.4

アフィン変換（例題）

X=ax+by+c

Y=dy+ex+f

ヘルマートに使用したデータにより観測方程式を立てると

X=xa+yb+cより

$$\begin{bmatrix} 2{,}000 & 1{,}500 & 1 \\ 0 & 1{,}500 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2{,}000 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}605 \\ 605 \\ 500 \\ 8{,}480 \end{bmatrix}$$

これもヘルマートと同様に

AX=Bなので$A^T AX = A^T B$

又は正規方程式NX=Fは

$$\begin{bmatrix} 8 \cdot 10^6 & 3 \cdot 10^6 & 4000 \\ 3 \cdot 10^6 & 45 \cdot 10^5 & 3000 \\ 4000 & 3000 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3417 \cdot 10^4 \\ 13815 \cdot 10^3 \\ 18190 \end{bmatrix}$$

a=799/200=3.995

b=23/300=0.07667

c=495

v_{x1}=2000･3.995+1500(0.07667)+495-8605=-4.995

v_{x2}=1500(0.07667)+495-605=5.005

v_{x3}=495-500=-5.000

v_{x4}=2000･3.995+495-8480=5.000

Y=xd+ye+fに代入すると

$$\begin{bmatrix} 2000 & 1500 & 1 \\ 0 & 1500 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2000 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6490 \\ 6640 \\ 650 \\ 510 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \cdot 10^6 & 3 \cdot 10^6 & 4000 \\ 3 \cdot 10^6 & 45 \cdot 10^5 & 3000 \\ 4000 & 3000 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \cdot 10^5 \\ 19695 \cdot 10^3 \\ 14290 \end{bmatrix}$$

d=-29/400=-0.072500

e=399/100=3.9900

f=1305/2=652.5

$d=-29/400=-0.072500$

$e=399/100=3.9900$

$f=1305/2=652.5$

$v_{y1}=2000 \cdot (-0.0725)+1500(3.99)+652.5-6490=2.5$

$v_{y2}=1500(3.99)+652.5-6640=-2.5$

$v_{y3}=652.5-950=2.5$

$v_{y4}=2000(-0.0725)+652.5-510=-2.5$

最小二乗法:標準問題II

(仮説II)観測値の集合から求めた算術平均よりも、確からしい値X+vを仮定する。

すべての観測値Xを中間値$\hat{X}$で表現される。

$$\hat{X} = AX + A_o$$

仮説IIから

$$X + v = AX + A_o$$
$$X = X_o + \Delta x$$

ここで、X:観測値、X_o:近似値、Δx:微小パラメータ

$$X + v = \mathrm{A}(X_o + \Delta x) + A_o$$
$$v = A\Delta x - f$$

ここで$f = X - AX_o - A_o$

LSの目的関数

最小二乗法の目的関数$E = v^T P v \Rightarrow$ 最小

ここで、v:残差、P:重量

$$E = (A\Delta x - f)^T P (A\Delta x - f)$$

$$= (\Delta x^T A^T - f^T)(PA\Delta x - Pf)$$

$$= \Delta x^T A^T PA\Delta x - \Delta x^T A^T \mathrm{P} f - f^T PA\Delta x +$$

$$f^T \mathrm{P} f$$

$\frac{\partial E}{\partial \Delta x} = 0$より

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta x}=0$$

$$\frac{\partial E}{\partial \Delta x} = A^T PA\Delta x + (\Delta x^T A^T PA)^T - A^T Pf - (f^T PA)^T = 2A^T PA\Delta x - 2A^T Pf = 0$$

$$A^T PA\Delta x = A^T Pf$$

又は次のように書ける。

$$N\Delta x = F$$

これを正規方程式と呼ぶ。

これによりΔXが解けるので、残差(補正値)は

$$v = A\Delta x - f$$

から計算できる。

パラメータの分散

単位重量当たりの分散$\sigma_o{}^2 = \frac{1}{r} v^T P v$

ここで、

過剰観測数r＝観測値の数-未知数の数

パラメータΔXの分散共分散行列

$$\Sigma_{XX} = \sigma_o{}^2 N^{-1}$$

（留意点）コファクタ$G = P^{-1} = \frac{1}{\sigma_o{}^2} \Sigma$

補正量vの分散

$$v = AN^{-1}(A^T P f) - f$$
$$= (AN^{-1}A^T P - I)(X - AX_o - A_o)$$
$$J_v = \frac{\partial v}{\partial X} = AN^{-1}A^T P - I$$

vにコファクタの伝播法則を適用すると

$$G_{vv} = J_v G {J_V}^T$$
$$= (AN^{-1}A^T P - I)G(AN^{-1}A^T P - I)^T$$
$$= G - AN^{-1}A^T$$

補正値の分散行列$\Sigma_{\mathrm{vv}} = {\sigma_o}^2(G - AN^{-1}A^T)$

最確値の分散

$$X + v$$
$$= (AN^{-1}A^T P)(X - AX_o - A_o) + AX_o + A_o - X + X$$
$$X + v$$
$$= AN^{-1}A^T P(\mathrm{X} - \mathrm{A}X_o - A_o) + \mathrm{A}X_o + A_o$$
$$J_{X+v} = \frac{\partial(X + v)}{\partial X} = AN^{-1}A^T P$$
$$G_{X+v,X+v} = J_{X+v} G J_{X+v}{}^T$$
$$= (AN^{-1}A^T P)G(AN^{-1}A^T P)^T$$
$$= AN^{-1}A^T PAN^{-1}A^T = AN^{-1}NN^{-1}A^T$$
$$= AN^{-1}A^T$$

最確値の分散行列$\Sigma_{\mathrm{X+vX+v}} = \sigma_o{}^2\, AN^{-1}A^T$

パラメータΔxのコファクタ

$$\Delta x = N^{-1}A^T\,Wf = N^{-1}A^T\mathrm{P}(X - Ax_o - A_o)$$

$$J_{\Delta x} = \frac{\partial \Delta x}{\partial x} = N^{-1}A^T\mathrm{P}$$

パラメータのコファクタ

$$G_{\Delta x\Delta x} = J_{\Delta x}G{J_{\Delta x}}^T = (N^{-1}A^T\,P)G(N^{-1}A^T\,P)^T$$

$$= N^{-1}A^T P\mathrm{A}N^{-1}$$

$$= N^{-1}NN^{-1}$$

$$= N^{-1}$$

パラメータの分散共分散$\Sigma_{\Delta x\Delta x}$＝$\sigma o^2N^{-1}$

標準問題I

- Lagrangeの未定係数法

（仮説I）数学モデルを満たす最確値が存在する。

仮説Iにより最確値$\hat{X}$を表すと

$$\mathrm{U}\hat{X} = U_o$$

仮説II最確値は観測値に補正値を加えたものとする。仮説IIより

$$\mathrm{U}(X + v) = U_o$$

条件方程式：$Uv = U_o - UX = t$

ここで、v：補正値、t：閉合差

LSの目的関数

最小二乗法の目的関数$E = v^T P v \Rightarrow$ 最小

又はここで、上のままではvは解けないのでラグランジェの未定係数$-2k^T$を考える。Uv=tよりUv-t=0なので以下の式は上の式と同じなので

$$E = v^T P v - 2k^T(Uv - t) \Rightarrow \text{最小}$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = Pv + (v^T P)^T - (2k^T U)^T = 0$$

$$Pv = U^T k$$

両辺に重量の逆行列をかけると

$$\mathrm{v} = P^{-1} U^T k$$

上の式を条件式に代入すると

$$\mathrm{U}P^{-1}U^{T}k = t$$

又は

$$Nk = t$$

$$k = N^{-1}t$$

これが相関方程式である。

kを解けば補正値は計算される。

$$\mathrm{v} = P^{-1}U^{T}k = P^{-1}U^{T}N^{-1}t$$

分散の伝播法則

最確値は観測値X+補正値vより

$$\hat{X} = X + v = X + P^{-1}U^{T}N^{-1}t$$
$$= X + P^{-1}U^{T}N^{-1}(U_{o} - UX)$$
$$= P^{-1}U^{T}N^{-1}U_{o} - (\mathrm{I} - P^{-1}U^{T}N^{-1}U)X$$

これにコファクタG(＝P^{-1})の伝播法則を適用すると

$$J_{\hat{X}} = \frac{\partial \hat{X}}{\partial X} = P^{-1}U^{T}N^{-1}U - I$$
$$G_{\hat{X}\hat{X}} = J_{\hat{X}} G {J_{\hat{X}}}^{T}$$

最確値の分散共分散行列

$$G_{\hat{X}\hat{X}} = J_{\hat{X}} G J_{\hat{X}}{}^{T} =$$
$$(P^{-1}U^{T}N^{-1}U - I)G(P^{-1}U^{T}N^{-1}U - I)^{T}$$
$$= (GU^{T}N^{-1}UG - G)(U^{T}N^{-1}UG - I)$$
$$= G - GU^{T}N^{-1}UG$$

最確値の分散共分散行列

$\Sigma_{\hat{X}\hat{X}}$=$\sigma_{o}{}^{2}(G - GU^{T}N^{-1}UG)$