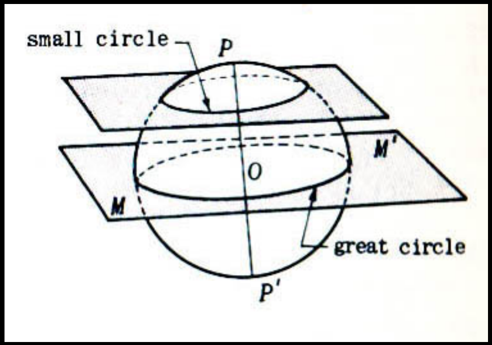
球面三角法

Spherical Triangles

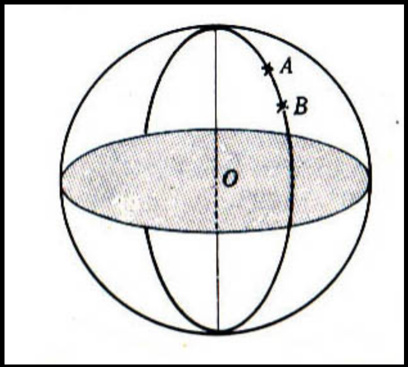
球面角



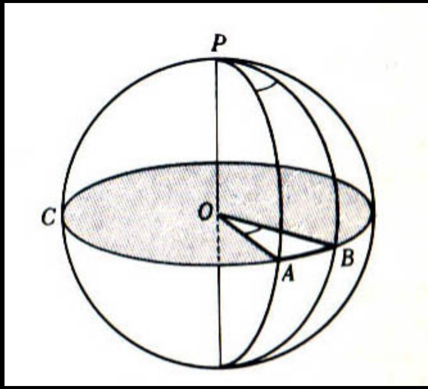
- 球の平面での断面は円
- 球の中心を通る円は大円
- その他の円は小円
- P,P'は極
- PP'に直角な円は緯線（平行圏）
- 球の中心を通る緯線は赤道

球面上の２点A,B

子午線上の２点A,B間の距離(辺）

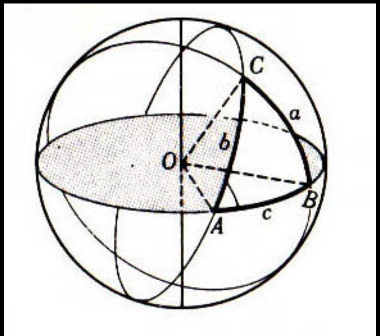


２つの子午線間の角



球面三角形

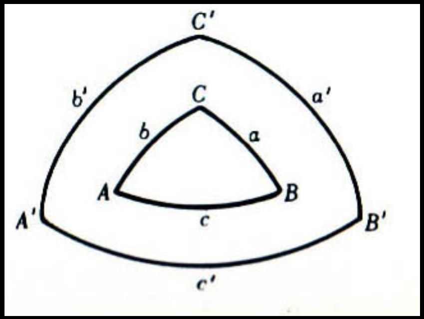
3つの大円＝球面三角



辺と角

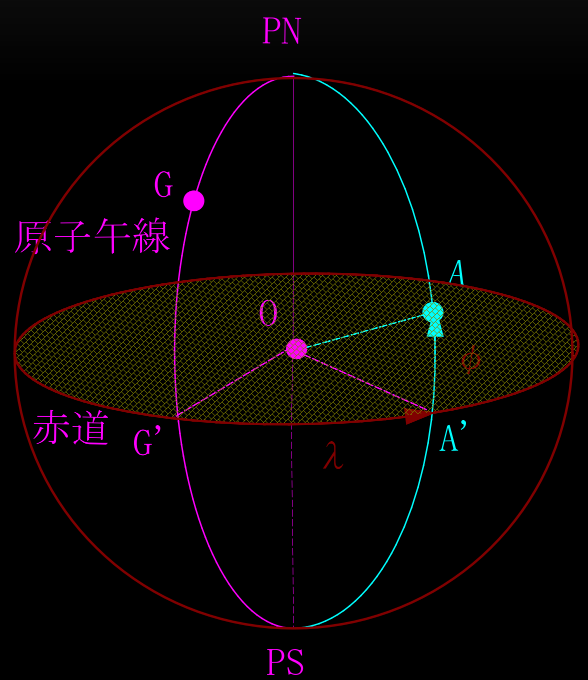
- 弧＝辺a,b,c
- 辺$a=\angle BOC$, 辺$b=\angle AOC$, 辺$c=\angle AOB$
- 角$A=\angle CAB$, 角$B=\angle CBA$, 角$C=\angle ACB$

極三角形



- A'B'C'はABCの極三角形であれば、ABCはA'B'C'の極三角形である。
- $A = 180° - a' \quad B = 180° - b'$
- $C = 180° - c'$
- $A' = 180° - a \quad B' = 180° - b$
- $C' = 180° - c$

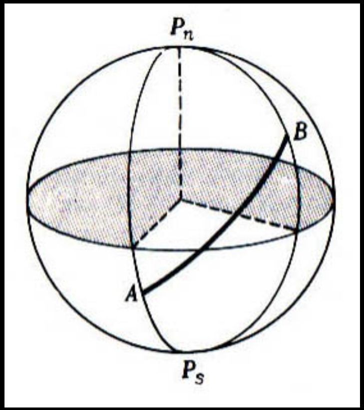
緯度・経度



Aの座標：緯度（φ)と経度（λ)

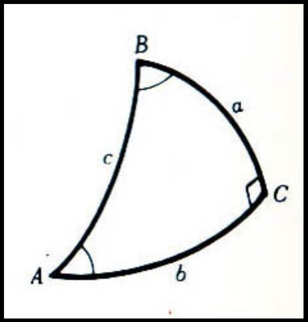
- P_N:北極　　P_S:南極
- 極P_N, P_Sをもつ大円は赤道
- 極から離れた地球上のA点に関し、半球$P_N A P_S$は子午線である。
- 原子午線、又は本初子午線は英国のグリニジ天文台を通る。
- 点Aの緯度（φ)は赤道から点Aまで測る角距離である。
- 経度（λ)はグリニジから西回りに180°までを西経（-）、東回りに180°まで測るのを東経（+）という。

大圏航路（測地線）



- 球の場合点A,Bを通る大円を大圏航路（コース）という。
- 地球を回転楕円体とした場合には、大円ABは測地線（円ではない）と呼ばれる。

球面直角三角形



1） $\sin A = \sin A \sin c$

2) $\tan a = \tan A \sin b$

3) $\tan a = \cos B \tan c$

4) $\cos c = \cos b \cos a$

5) $\cos A = \sin B \cos a$

6) $\sin b = \sin B \sin c$

7) $\tan b = \tan B \sin a$

8) $\tan b = \cos A \tan c$

9) $\cos c = \cot A \cot B$

10) $\cos B = \sin A \cos b$

NAPIERの規則

- 右図において、1個の要素を選び、それを「中部」と呼び、隣の要素を「隣部」、残りの2つの要素を「対部」と呼ぶことにする。

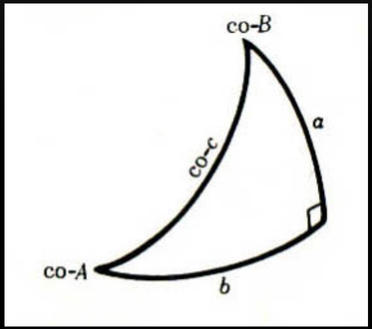
1）任意の中部のsin=隣部のtanの積

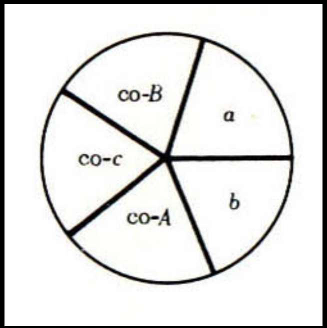
2）任意の中部のsin=対部のcosの積

$\sin(co-A)=\cos(co-B)\cos a$

$\cos A=\sin B\cos a$ (5)が導けた。

ただし、$co-A=90°-A, co-c=90°-c, co-B=90°-B$とした。





非直角球面三角形

- 球面三角形において、角が直角でないものをいう。
- その三角形で、3つの要素がわかるとき、すべての要素が解ける。

1）3つの辺が既知

2）3つの角が既知

3）2つの辺とその挟む1内角

4）2つの角とその挟む1辺

5）2つの辺と対角

6）2つの角と対辺

正弦則

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

辺の余弦則

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \, sin \; b \cos C$$

角の余弦則

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \, sin \, B \cos c$$

半角 · 半辺公式

- *半角*
- $tan\frac{1}{2}A = \frac{\tan r}{\sin(s-a)}$
- $tan\frac{1}{2}B = \frac{\tan r}{\sin(s-b)}$
- $tan\frac{1}{2}C = \frac{\tan r}{\sin(s-c)}$
- $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$
- $\tan r = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$

- 半辺
- $cot\frac{1}{2}a = \frac{\tan R}{\cos(S-A)}$
- $cot\frac{1}{2}b = \frac{\tan R}{cos(S-B)}$
- $cot\frac{1}{2}c = \frac{\tan R}{\cos(S-C)}$
- $S = \frac{1}{2}(A + B + C)$
- $\tan R = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos S}}$

ガウス・ドランブルのアナロジー

ガウス・ドランブル

- $\frac{sin\frac{1}{2}(A-B)}{cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{sin\frac{1}{2}c}$
- $\frac{cos\frac{1}{2}(A-B)}{sin\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{sin\frac{1}{2}c}$
- $\frac{sin\frac{1}{2}(A+B)}{cos\frac{1}{2}C}=\frac{cos\frac{1}{2}(a-b)}{cos\frac{1}{2}c}$
- $\frac{cos\frac{1}{2}(A+B)}{sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{cos\frac{1}{2}c}$

ネイピアのアナロジー

- $\frac{tan\frac{1}{2}(A-B)}{cot\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{sin\frac{1}{2}(a+b)}$
- $\frac{tan\frac{1}{2}(A+B)}{cot\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{cos\frac{1}{2}(a+b)}$
- $\frac{tan\frac{1}{2}(a-b)}{tan\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{sin\frac{1}{2}(A+B)}$
- $\frac{tan\frac{1}{2}(a+b)}{tan\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{cos\frac{1}{2}(A+B)}$

球面三角形の面積（K）

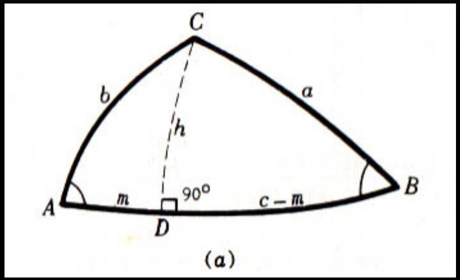
- $K = \frac{\pi R^2 E}{180}$

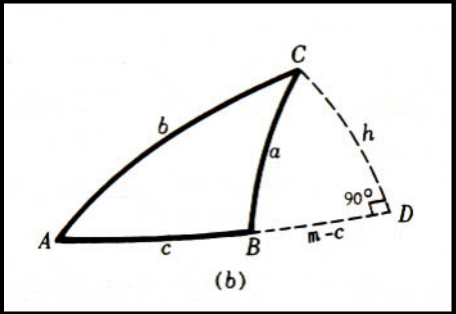
$$\tan^2 \frac{1}{4} E$$

$$= \tan \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} (s - a) \tan \frac{1}{2} (s$$

$$- b) \tan \frac{1}{2} (s - c)$$

正弦比例式の誘導





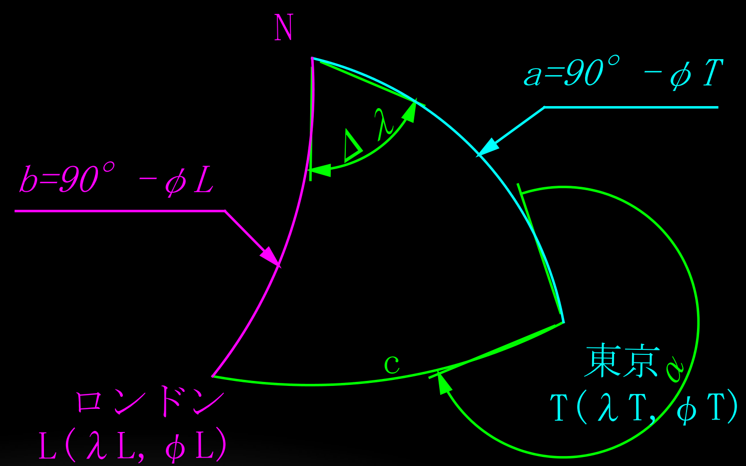
- 左図でABCは球面三角形とする。
- Cを通りABに直角な大円の交点をDとする。そのときCD= h とおく。
- 直角三角形ACDにおいて
- $\sin h = \sin b \sin A$ …①
- また、直角三角形BCDにおいて
- $\sin h = \sin a \sin B$ …②
- ①=②より
- $\sin b \sin A = \sin a \sin B$
- $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B}$ …③

正弦比例式の証明（続）

- 同様に、ACに直角でBを通る大円から
- $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$ …④
- したがって、③と④から
- $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$

例題①東京-ロンドン間の距離、方位角

- ロンドン：経度$\lambda_L = -0°09'W$, 緯度$\varphi_L = 51°31'N$
- 東京：$\lambda_T = +139°45'$, $\varphi_T = +35°39'$
- 地球の半径R=6,371km
- (解)
- $C = \Delta\lambda = \lambda_T - \lambda_L = 139°54'$



辺の余弦則より

- $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \; sin \;\; b \cos C$

$=\cos(90° - \varphi_T)\cos(90° - \varphi_L) + \sin(90° - \varphi_T)\sin(90° - \varphi_L) cos\Delta\lambda$

$= sin\varphi_T \sin\varphi_L + cos\varphi_T \cos\varphi_L cos\Delta\lambda$

$=0.58283 \times 0.78279 + 0.81259 \times 0.62229 \times (-0.76492)$

$= 0.45623 - 0.38651 = 0.06972$

- $c = S_{TL} = 86.0021° = \frac{86.0021}{180} \times \pi \times 6{,}371km = 9{,}563km$

- 正弦比例式より
- $\dfrac{\sin\ b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$
- $\dfrac{\sin\ (90°-\varphi_L)}{\sin \alpha\prime_T} = \dfrac{\sin c}{\sin \Delta\lambda}$
- $\sin \alpha'_T = \dfrac{\cos \varphi_L \sin \Delta\lambda}{\sin c} = \dfrac{\cos 51°31\prime sin139°54\prime}{\sin 86°} = \dfrac{0.62229\times 0.64412}{0.99756} = 0.40181$
- $\alpha'_T = 23°41'$

∴東京-ロンドンの方位角

- $\alpha_{TL} = 360° - \alpha'_T = 336°19'$

天体による真北の算出

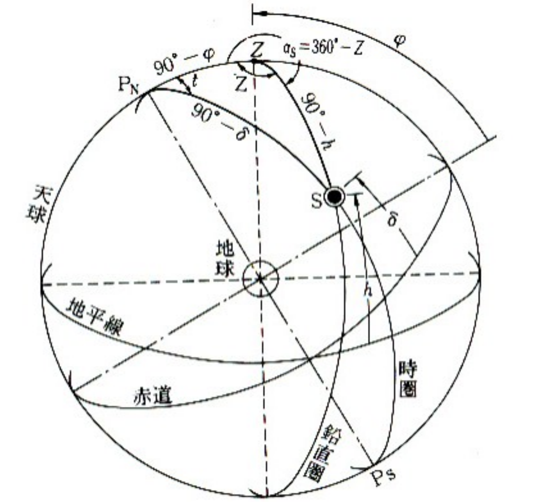
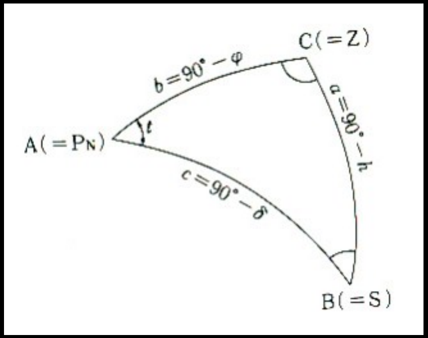


図 5.21　天文三角形

- 天球：天体（太陽、惑星、星）が存在する半径無限大の球
- P_N, P_S:地球の北極、南極を天球まで延長した時の天の北極、天の南極
- Z：天頂（人の頭の真上を天球まで伸ばした点）
- S：太陽
- ZS：鉛直圏
- $P_N S P_S$: 時圏
- δ：太陽（天体）の位置は赤経、赤緯（δ）で表される。地点の位置の経度、緯度と同じ。

天文三角形（球面三角形）



- $\Delta P_N SZ \rightarrow \Delta ABC$とする。
- $\angle A = t$に対する辺$a = 90° - h$
- (t=時角、h=太陽高度)
- $\angle B = S$に対する辺b $= 90° - \varphi$
- (φ：観測地点の緯度)

時角

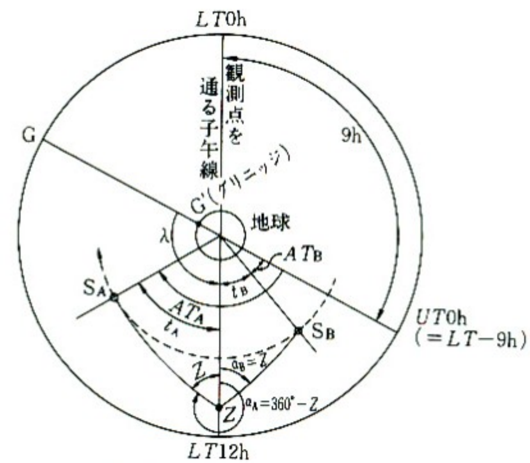
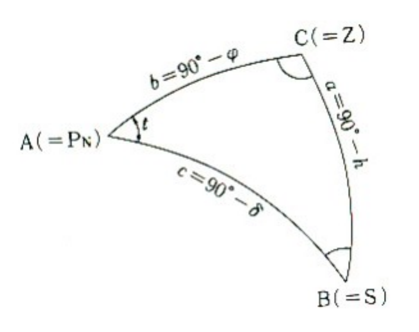


図 5.23 時 角

- 左図の中心は地球の中心、
- 大きな円は天球
- グリニジはG'、G：その天球位置
- Gは経度の原点
- 経度λ：日本は左回りに測り、中央子午線+135°、135/15＝9 h
- 世界時UT＝LT-9(h)
- （LT:日本時間、地方時）
- 観測時（見かけ）＝視太陽時
- AT(h)＝UT(h)+E
- （E：均時差、理科年表で求める）

時角と太陽高度

- 午前の太陽
- $t_B = 180° - (AT \times 15° + \lambda^o)$
- 午後の太陽
- $t_A = (AT \times 15° + \lambda°) - 180°$
- （λ：三角点を用いれば、三角点の経度、GPSならばGPSで観測した経度）

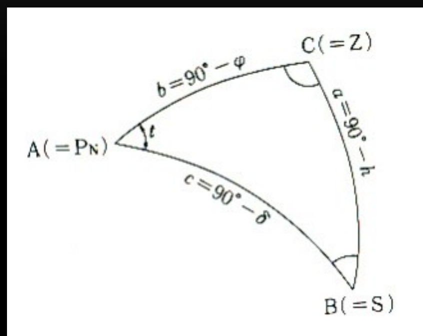


- 左図において辺の余弦則を適用して太陽高度ｈが次式で求められる。

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

太陽の方位角



余弦則より

$$\cos c = \cos a cosb + sinasinbcosC$$

$$sin\delta = sinhsin\varphi + coshcos\varphi cosZ$$

$$cosZ = \frac{sin\delta - sinhsin\varphi}{coshcos\varphi}$$

- 正弦則より

$$\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin a}$$

$$\frac{\sin Z}{\cos \delta} = \frac{\sin t}{\cos h}$$

$$\sin Z = \cos \delta \frac{\sin t}{\cos h}$$

午前の太陽の方位角

$$\alpha = Z$$

午後の太陽の方位角

$$\alpha = 360° - Z$$

太陽の高度

- 地点経度$\lambda = 135°39'E = 135.65°$
- 緯度$\varphi = 34°45'N = 34.75°$
- 太陽観測日2013年6月15日
- 14時30分0秒
- 均時差E=-0.156(分)
- 太陽赤緯$\delta = 23.3139°$
- $UT = LT - 9 = 14h30m - 9h = 5.5h$
- $AT = UT + E = 5.5h - 0.15m = 5.4975h$
- $t_A = (AT \times 15° + \lambda°) - 180°$

$$= (5.498 \times 15° + 135.65°) - 180° = 38.1125°$$

$$sinh = sin\varphi sin\delta + cos\varphi cos\delta cost$$

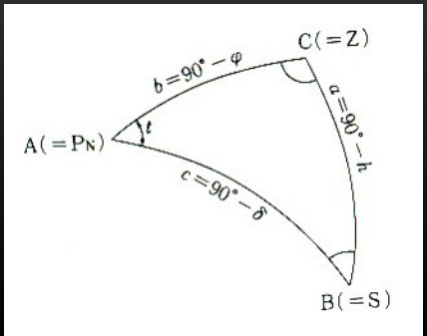
$$sinh = sin34.75° sin23.3139°$$

$$+cos34.75° cos23.3139° cos38.1125°$$

$$sinh = 0.22559 + 0.59369 = 0.81928$$

$$h = 55.0128°$$

太陽の方位



正弦則より$\frac{\sin Z}{\cos\delta}=\frac{\sin t}{\cos h}$

$$\sin Z=\cos\delta\frac{\sin t}{\cos h}$$
$$=cos23.3139°\frac{sin38.1125°}{\cos 55.0128°}$$
$$=0.91835\times\frac{0.61721}{0.57339}$$
$$=0.98852$$
$$Z=81.3099°$$

（上の図より南からの太陽の方位）

午後なので北からの方位角は

$$\alpha=360°-Z=278.6901°$$

余弦則より

$$cosZ=\frac{sin\delta-sinhsin\varphi}{coshcos\varphi}$$
$$=\frac{sin23.3139°-sin55.0128°sin34.75°}{cos55.0128°cos34.75°}$$
$$=\frac{-0.07122}{0.47113}=-0.15117$$
$$Z=98.6946°$$

午前+：Z、-：180°-Z

午後+：180°+Z、-：360°-Z

∴午後で+なので$\alpha=278.6946°$

南から$\alpha_S=180-98.6946=81.3054°$

(1)経緯度・方位角の計算（四等三角）

- 右の図において点Pは既知点、点P'は未知点とする。
- 点P,P'は球面上にある。
- 経度緯度;P（λ,φ）、P'(λ',φ')
- PにおけるP'の方位角：α
- 反方位角：α'
- 右図直角三角形$PP'P_1$においてネイピアの法則を用いて
- $tan\Delta\varphi = cos\alpha \tan S$
- ここでS、Δφは微小量なので$tanS \approx S$,$tan\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$とおけば
- $\Delta\varphi \approx Scos\alpha$ …①

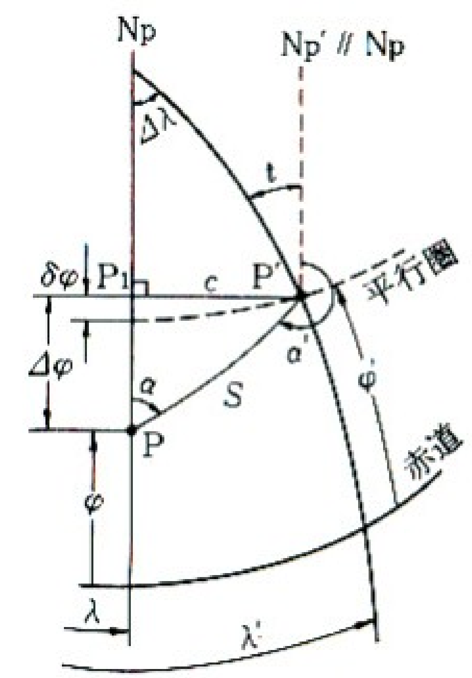


図 2.15 球面三角形PP'Nₚ

Δφは縦方向、つまり緯度方向の距離なので、これを回転楕円体面上ならば、その曲率は、子午線方向なので、式①をM(子午線曲率半径)で割れば正しい距離になる。

$$M=\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2sin^2\varphi)^3}}$$

a:赤道半径、b: 極半径、e：第1離心率

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

$$\Delta\varphi\approx\frac{S}{M}cos\alpha$$

…②

球面直角三角形$PP'P_1$において

$$\sin c=\sin\alpha\sin S$$

cとSは微小量なので
$\sin c\approx c,\ sinS\approx S$と置けるので

$c\approx Ssin\,\alpha$ …③

これは球面（回転楕円体）の横方向なのでN（卯酉線曲率半径）で割ると、横方向の長さ（角度）になる。

$c\approx\frac{S}{N}sin\alpha$ …④

$$N=\frac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}}$$

直角三角形$P_1P'N_P$において

$$\sin[\varphi + \Delta\varphi - \delta\varphi] = \cos[90° - (\varphi + \Delta\varphi)] \times \cos c$$

$$\sin[\varphi + \Delta\varphi - \delta\varphi] = \sin(\varphi + \Delta\varphi) \times \cos c \ \ldots⑤$$

この式からδφが解ける。

球面直角三角形$P_1P'N_P$において

$$\sin c = \tan[90° - (\varphi + \Delta\varphi)] \tan t$$

$$\tan t = \tan(\varphi + \Delta\varphi) \sin c \ldots⑥$$

これはPの子午線収差である。

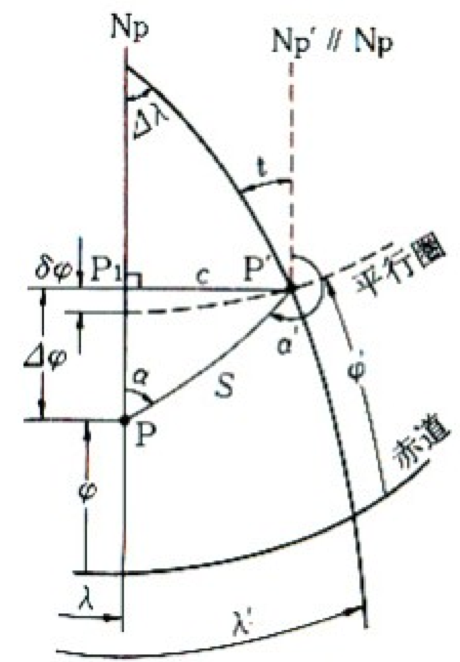


図 2.15　球面三角形ＰＰ'Ｎ$_P$

球面直角三角形$P_1P'N_P$において

$\sin[90° - (\varphi + \Delta\varphi)] = \tan c \times \tan(90° - \Delta\lambda)$

$tan\Delta\lambda = \frac{\tan c}{\cos(\varphi+\Delta\varphi)}$ …⑦

（問題）経緯度及び反方位角を求めよ。

Pの経緯度

緯度$\varphi = 34°18'38.157$“N

経度$\lambda = 135°37'05.132$“E

方位角$\alpha = 68°27'36.2$“

球面距離S=576.130m

(解答)

a=6,378,157m,1/f=298.257222101

b=a(1-f)=6,356,752.314

$$e^2 = 0.006700609$$

$$\mathrm{W} = \sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi} = 0.998934927$$

$$M = \frac{a(1-e^{2)}}{W^3} = \frac{6,335,399.598}{0.996808183}$$
$$= 6,355,685.782$$

$$N = \frac{a}{W} = \frac{6,378,137}{0.998934927} = 6,384,937.424$$

$$\Delta\varphi = \frac{S}{M} cos\alpha$$
$$= \frac{576.130}{6,355,685.782}$$
$$\times cos68°27'36.2" \times \rho°$$
$$= 0.001907°$$

$$c \approx \frac{S}{N} sin\alpha = \frac{576.130}{6,384,937.424}$$
$$\times sin68°27'36.2" \times \rho° =$$

$$0.004809°$$

$$\sin[\varphi + \Delta\varphi - \delta\varphi] = \sin(\varphi + \Delta\varphi) \times \cos c =$$

$$= \sin(34°18'38.157" + 0.001907°) \times cos 0.004809°$$

$$= 0.563706349$$

$$\varphi + \Delta\varphi - \delta\varphi = 34.312506°$$

$$\delta\varphi = \varphi + \Delta\varphi - 34.312506° = 0.00000017°$$

$$\tan t = \tan(\varphi + \Delta\varphi)\sin c = \tan(34°18'38.157" + 0.001907°) \times sin 0.004809°$$

$$= 0.682473641 \times 0.000083932$$

$$= 0.000057281$$

$$t = 0.003282°$$

$$tan\Delta\lambda = \frac{\tan c}{\cos(\varphi + \Delta\varphi)}$$

$$= \frac{tan 0.004809°}{\cos(34°18'38.157" + 0.001907°)}$$

$$= \frac{0.000083932}{0.8259775271} = 0.000101615$$

$$\Delta\lambda = 0.005822°$$

経度

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 135°37'05.132" + 0.005822° = 135.6239° = 135°37'26.0911“$$

緯度

$$\varphi + \Delta\varphi - \delta\varphi = 34.312506°$$
$$=34°18′45.0216"$$

反方位角

$$\alpha' = \alpha + t \pm 180°$$
$$= 68°27′36.2" + 0.003282° + 180°$$
$$= 248°27′48.015"$$

(注)

①地球上の地点の位置（経度緯度、方位）の計算は、厳密には楕円体で計算しないといけません。

②しかし、従来から四等三角測量（距離2Km程度）では、以上に示したとおりのシュライバーの方法が使われました。したがって、現在でも公共測量の1級基準点測量～4級基準点測量に使えます。

(2)回転楕円体による経緯度・方位角の計算

$u = \frac{S}{a}\cos\alpha \, , v = \frac{S}{a}\sin\alpha$

$t = \tan\varphi \ , \psi = 1 - e^2$とおいて緯度、経度及び方位角を表すことができる。

(緯度)

$$\varphi' - \varphi = \frac{W^3}{\psi}u - \frac{3W^4e^2}{2\psi^2}\sin\varphi\cos\varphi\, u^2$$

$$-\frac{W^4t}{2\psi}v^2 - \frac{W^5e^2}{2\psi^3}[1 - 2sin^2\varphi$$

$$-e^2sin^2\varphi(5 - 6sin^2\varphi)]u^3$$

$$-\frac{W^5}{6\psi^2}[1 + 3t^2$$

$$- e^2t^2(13 - 10sin^2\varphi)]uv^2$$

…①

ここで、$W = \sqrt{1 - e^2sin^2\varphi}$

(経度)

$$(\lambda' - \lambda)\cos\varphi = Wv +$$

$$W^2tuv + \frac{W^3}{3}(1 + 3t^2$$

$$+\frac{e^2}{\psi}cos^2\varphi)u^2v - \frac{W^3t^2}{3}v^3$$ …②

(方位角)

$$\alpha' - \alpha = Wtv + \frac{W^2}{2}(1 + 2t^2$$

$$+ \frac{e^2}{\psi} cos^2\varphi)uv + \frac{W^3 t}{6}(5 + 6t^2$$

$$+\frac{e^2}{\psi} cos^2\varphi - \frac{4e^4}{\psi^2} cos^4\varphi)u^2 v$$

$$- \frac{W^3 t}{6}(1 + 2t^2 + \frac{e^2}{\psi} cos^2\varphi)v^3 \ldots ③$$

(注)以下の距離、方位の計算は、ここでの緯度、経度計算式を用いたものである。順次正確なu,vの値を求めていけば、正しい地球上の距離Sが求められる。

- u,vが求まれば、方位角は一義的に計算できる。

(3)楕円体上の2点から距離・方位角の計算

2点をP(λ,φ), $P'(\lambda',\varphi')$とする。前節（2）の式の係数を以下のようにｆ、ｇで書いておく。

- $f_1 = (\varphi' - \varphi)\frac{\psi}{W^3}$
- $f_2 = \frac{3We^2}{2\psi}\sin\varphi cos\varphi$
- $f_3 = \frac{Wt}{2}$
- $f_4 = \frac{W^2e^2}{2\psi^2}[1 - 2sin^2\varphi - e^2sin^2\varphi(5 - 6sin^2\varphi)]$
- $f_5 = \frac{W^2}{6\psi}[1 + 3t^2 - e^2t^2(13 - 10sin^2\varphi)]$

- $g_1 = \frac{(\lambda'-\lambda)cos\varphi}{W}$
- $g_2 = Wt$
- $g_3 = \frac{W^2}{3}(1 + 3t^2 + \frac{e^2}{\psi}cos^2\varphi)$
- $g_4 = \frac{W^2t^2}{3}$

ここで

- $W = \sqrt{1 - e^2sin^2\varphi}$
- $e^2 = 1 - (\frac{b}{a})^2$
- $t = tan\varphi$
- $\psi = 1 - e^2$

- 以下に示すようにu,vの値が解ければ距離、方位角が求まるので、以下のようにu,vを近似的に解く。

（第1近似）

$$u_1 \approx f_1\ , v_1 \approx g_1$$

（第2近似）

$$u_2 \approx f_1 + f_2{u_1}^2 + f_3{v_1}^2$$

$$v_2 \approx g_1 - g_2 u_2 v_1$$

（第3近似）…これで50ｋｍぐらいの正しい距離が求められる。

$u \approx f_1 + f_2{u_2}^2 + f_3{v_2}^2 + f_4{u_2}^3 + f_5 u_2{v_2}^2$

$v \approx g_1 - g_2 u v_2 - g_3 u^2 v_2 + g_4{v_2}^3$

f,gを求める際元々u,vは

$$u = \frac{S}{a}cos\alpha$$

$$v = \frac{S}{a}sin\alpha$$

ここで、a:赤道半径

$u^2 + v^2 = (\frac{S}{a})^2$ なので

$$S = a\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\frac{v}{u} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{v}{u}$$

以上、距離S,方位角αはP,P’の経度緯度から一義的には求められないが、係数を3回程度繰り返して正確なu,vを求めれば、距離と方位角が決定できる。

(例題)P,P'の経緯度から距離、方位角の計算

P(λ=139°$44'40.5020''E$, φ=35°$39'17.5148$"N)

P'(λ'=139°$57'32.3065$E, φ'=35°$15'06.0631N$)

$sin\varphi = 0.582901311,$
$cos\varphi = 0.8125429600$

$sin^2\varphi = 0.339773938$

a=6,377,397.155m

1/f=299.152 813

b=a(1-f)=6,356,078.963

$W = \sqrt{1 - e^2 sin^2\varphi}$=0.998865468

$W^2 = 0.997732222$, $W^3 = 0.996600263$

$$e^2 = 1 - (\frac{b}{a})^2 = 0.006674372$$

$t = tan\varphi$=0.717379067

$\psi = 1 - e^2$=0.993325627

経度緯度をラジアンに直す。

$$\lambda = 2.439003101$$

$$\varphi = 0.622294792$$

$$\lambda' = 2.442744913$$

$$\varphi' = 0.615257962$$

$$\varphi' - \varphi = -0.007036830$$

$$f_1 = (\varphi' - \varphi)\frac{\psi}{W^3} = -0.007013708$$

$$f_2 = \frac{3We^2}{2\psi}\sin\varphi cos\varphi$$

$$= 0.004768243$$

$f_3 = \frac{Wt}{2}$ =0.358282589

$$f_4 = \frac{W^2e^2}{2\psi^2}[1 - 2sin^2\varphi - e^2sin^2\varphi(5 - 6sin^2\varphi)]$$

$=0.003374513\times(0.313364258$

$= 0.0010587077$

$$f_5 = \frac{W^2}{6\psi}[1 + 3t^2 - e^2t^2(13 - 10sin^2\varphi)]$$

$= 0.167406034[2.51091585]$

$= 0.420342464$

$g_1 = \frac{(\lambda' - \lambda)cos\varphi}{W} = 0.003043836$

$g_2 = Wt = 0.716565177$

$g_3 = \frac{W^2}{3}(1 + 3t^2 + \frac{e^2}{\psi}cos^2\varphi)$

$= 0.332577407(2.548334382)$

$= 0.847518442$

$g_4 = \frac{W^2t^2}{3} = 0.171155218$

（第1近似）

$$u_1 \approx f_1 = -0.007013708$$

$$v_1 \approx g_1 = 0.003043836$$

（第2近似）

$$u_2 \approx f_1 + f_2 {u_1}^2 + f_3 {v_1}^2 = -0.007010154$$

$$v_2 \approx g_1 - g_2 u_2 v_1 = 0.003059126$$

（第3近似）

$$u \approx f_1 + f_2 {u_2}^2 + f_3 {v_2}^2 + f_4 {u_2}^3 + f_5 u_2 {v_2}^2 = -0.0070101487$$

$$v \approx g_1 - g_2 u v_2 - g_3 u^2 v_2 + g_4 {v_2}^3 = 0.0030590804$$

$S = a\sqrt{u^2 + v^2}$

a=6,377,397.155m

$S = 6{,}377{,}397.155\sqrt{0.0000585002}$

$= 48{,}777.775m$

$\tan\alpha = \frac{v}{u} = -0.436378914$

$\alpha = -23.57544153°$

$= 156°25'28.426"$

この値は東京原点-千葉県一等三角点鹿野山を旧座標で、Bessel楕円体で計算したものである。

（例）東京原点（P)-筑波原点（P’）での、距離（S)と方位角（α）の計算

P（λ＝139° 44’28”.8869E、φ＝35° 39’1572"N)

P’（λ’＝140° 05’20.7067”E、φ’＝36° 06’11".5043"N）

（上記成果：国土地理院基準点閲覧サービスより引用）

（解答）GRS楕円体を使用して、

S=58,523.021m、α＝32° 20’46.23”

（実際の数値46”.209）

- 方位角の誤差の検討
- $\Delta\alpha = 46.23'' -$46.209”=0.021”
- 位置誤差
- $\Delta p = S \times \Delta\alpha = 58{,}523m \times 0.0212/206265'' = 0.006m$
- 計算精度＝0.006/58,523
- ＝1/9,750,000
- （したがって、上に示した3回近似の計算法は少なくとも四等三角測量以上の計算に利用できる。）