# 『ミクロ経済学』補足

2012 年 4 月 21 日　田中靖人

**■参考文献の追加**　『企業の経済学』(浅羽茂，日経文庫)

ミクロ経済学の基礎理論を用いて様々な企業行動を分析している。

『弱点克服 大学生のミクロ経済学』(遠山智久，東京図書)

東大大学院受験予備校のテキストとのこと。演習問題とその解説からなる。

**■支出関数と効用関数**　効用関数を $u = x^2(y+2)$ として支出関数などを考えてみる。記号は説明しないが標準的なものである。予算制約を

$$p_x x + p_y y = m$$

として効用最大化条件を求めると

$$2x(y+2) - \lambda p_x = 0,\ x^2 - \lambda p_y = 0$$

となり $p_x x = 2p_y(y+2)$ から需要関数が

$$x = \frac{2m + 4p_y}{3p_x},\ y = \frac{m - 4p_y}{3p_y} = \frac{m}{3p_y} - \frac{4}{3},$$

と求まる。$y < 0$ となるときには $y = 0$ とする。$y \geq 0$ となる条件は $m \geq 4p_y$ である。これらを効用関数に代入すれば間接効用関数は

$$v = \frac{4(m + 2p_y)^3}{27p_x^2 p_y}$$

となる。

一方 $p_x x = 2p_y(y+2)$ と効用関数から補償需要関数が

$$\tilde{x} = \sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}},\ \tilde{y} = \sqrt[3]{\frac{p_x^2\bar{u}}{4p_y^2}} - 2$$

と求まる。やはり $\tilde{y} < 0$ となるときには $\tilde{y} = 0$ とする。$\tilde{y} \geq 0$ となる条件は $\bar{u} \geq \frac{32p_y^2}{p_x^2}$ である。これを支出関数に入れると $m = 4p_y$ となる。$\bar{u}$ は一定とされる効用の値である。これらを予算制約に代入すると

$$m = \sqrt[3]{2p_x^2 p_y\bar{u}} + \sqrt[3]{\frac{p_x^2 p_y\bar{u}}{4}} - 2p_y = 3\sqrt[3]{\frac{p_x^2 p_y\bar{u}}{4}} - 2p_y$$

を得る。これが支出関数である ($m$ を $e$ と書くこともある)。これを $\bar{u}$ について解き，$\bar{u}$ を $v$ と書くと

$$v = \frac{(m + 2p_y)^3}{27p_x^2 p_y}$$

が得られる。これは上で求めた間接効用関数である。逆に間接効用関数を $m$ について解くと支出関数が得られる。すなわち間接効用関数と支出関数は互いに逆関数になっている。一定の予算のもとで達成できる最大の効用が間接効用関数によって表されているが，支出関数はその効用を実現できる最小の予算を表すものであるからもとの一定の予算に等しい。

スルツキー方程式を確認しよう。$p_x$ の変化が X 財の需要に与える効果を考える。他も同様である。まず

$$\frac{\partial x}{\partial p_x}=-\frac{2m+4p_y}{3p_x^2},\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x}=-\frac{1}{3p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}$$

左が $p_x$ の変化の全体的な効果，右が代替効果である。左の式に支出関数を代入すると

$$\frac{\partial x}{\partial p_x}=-\frac{1}{p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}$$

となる。所得効果は（マッケンジーの補題を使って）

$$-\frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_x}=-\tilde{x}\frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_x}=-\frac{2}{3p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}$$

であるから代替効果と所得効果を加えると

$$-\frac{1}{3p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}-\frac{2}{3p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}=-\frac{1}{p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}$$

となり，スルツキー方程式が確認された。

次に上の支出関数から効用関数を復元することを考えてみる。支出関数から間接効用関数が得られ，ロイの恒等式を用いて各財の需要関数が次のように求まる。

$$x=-\frac{\frac{\partial v}{\partial p_x}}{\frac{\partial v}{\partial m}}=\frac{\frac{2(m+2p_y)^3}{3p_x^3p_y}}{\frac{(m+2p_y)^2}{p_x^2p_y}}=\frac{2m+4p_y}{3p_x}$$

$$y=-\frac{\frac{\partial v}{\partial p_y}}{\frac{\partial v}{\partial m}}=\frac{\frac{4(m+2p_y)^3}{27p_x^2p_y^2}-\frac{8(m+2p_y)^2}{9p_x^2p_y}}{\frac{4(m+2p_y)^2}{9p_x^2p_y}}=\frac{m}{3p_y}-\frac{4}{3}$$

$y$ の需要関数から $\frac{m+2p_y}{3p_y}=y+2$ となるが，これと $2\frac{(m+2p_y)}{3p_x}=x$ を間接効用関数に代入すると元の効用関数

$$u=x^2(y+2)$$

が得られる。別のルートとして補償需要関数を使う方法を考えてみよう。マッケンジーの補題によって支出関数から上で求めた補償需要関数 $\tilde{x}$，$\tilde{y}$ が得られる。それぞれを $x$，$y$ とし，$\bar{u}$ を $u$ と書いて（$u$ を一定とは考えないので）

$$x^2=\left(\sqrt[3]{\frac{2p_yu}{p_x}}\right)^2=\sqrt[3]{\frac{4p_y^2u^2}{p_x^2}}\ と$$

$$y+2=\sqrt[3]{\frac{p_x^2u}{4p_y^2}}$$

を掛け合わせると

$$u=x^2(y+2)$$

が得られる。

■**補償原理**　パレート効率性だけに基づけば，誰も損をせず誰かが得をするような経済状況の変化でなければ認められないが，それではなかなか問題を解決できない。それに代わるものとして考えられたのが補償原理である。

**カルドア基準**　ある変化によって利益を得る人が損をする人の損失を補償することを考える。補償してもなお利益が残っているならばその変化を認める。

**ヒックス基準**　ある変化によって損をする人がその変化を阻止することを考える。その変化によって利益を得るはずの人が失う利益を補償したときにその人が損失を被るならばその変化を認める。これは逆の変化がカルドア基準を満たさないということである。

■**コースの定理**　本文にある外部性の説明の内，減産補助金の説明の所で使った例をもう一度考えてみる。企業 A，B の産出量を $x$，$y$ としてそれぞれの利潤が次のように表されると仮定した（価格は一定であるとする）。

$$\pi_A = 80x - 2x^2$$

$$\pi_B = 80y - y^2 - xy$$

企業 A の利潤を最大化する産出量は 20，それをもとにした企業 B の利潤を最大化する産出量は 30 である。また両方の利潤の和を最大化する産出量はそれぞれ $x = \frac{80}{7} < 20$，$y = \frac{240}{7} > 30$ であった（そのときの利潤は企業 A が $\frac{32000}{49} \approx 653$，企業 B が $\frac{57600}{49} \approx 1176$）。ここで政府が介入するのではなく両企業が交渉してそれぞれの産出量を決める問題を考えてみよう。二つのケースに分ける。

1. 企業 B には企業 A が発生させる外部性を理由にその生産を差し止める権利があるものとする。それに対して企業 A の側が B にお金を払って生産させてもらうことを考える。まず A の産出量が 0 のとき B の利潤は
$$\pi_B = 80y - y^2$$
となり利潤を最大化する産出量は 40，そのときの利潤は 1600 である（企業 A の利潤は 0）。企業 A は B に対してこの利潤を保証しなければならない。すなわち企業 B の産出量が変わってもその利潤は 1600 でなければならない。そのとき企業 A の利潤は
$$\pi_A = 80x - 2x^2 - 1600 + 80y - y^2 - xy$$
と表せる。つまり企業 A は自分の利潤から B に $(1600 - 80y + y^2 + xy)$ のお金を支払わなければならないのである。この式は
$$\pi_A = 80x - 2x^2 + 80y - y^2 - xy - 1600$$
に等しい。つまりこのときの企業 A の利潤は両企業の利潤の合計から定数 1600 を引いたものである。したがってそれを最大化する各企業の産出量は利潤の合計を最大化するときの $x = \frac{80}{7}$，$y = \frac{240}{7}$ に等しい。このとき企業 B の利潤は 1600，企業 A の利潤は約 229 である。
2. 一方，企業 A が B の損失を気にせずに生産を行う権利を持っていて，B の側がお金を渡して A の生産を抑えてもらう場合を考えてみよう。何もしなければ $x = 20$，$y = 30$ で A の利潤は 800 である（B の利潤は 900）。企業 B は A のこの利潤 800 を保証しなければならない。そのとき B の利潤は次のように表される。
$$\pi_B = 80y - y^2 - xy - 800 + 80x - 2x^2$$

つまり企業 B は自分の利潤から A に $(800-80x+2x^2)$ のお金を支払わなければならない。この式は

$$\pi_B = 80x - 2x^2 + 80y - y^2 - xy - 800$$

に等しい。つまりこのときの企業 B の利潤は両企業の利潤の合計から定数 800 を引いたものである。したがってそれを最大化する各企業の産出量もやはり利潤の合計を最大化するときの $x=\frac{80}{7}$, $y=\frac{240}{7}$ に等しい。このとき企業 A の利潤は約 1029，企業 B の利潤は 800 である。

以上のように企業 A，B どちらが権利を持っていても結果として同じように両方の企業の利潤を最大化する最適な状態が実現する。このことをコースの定理（Ronald Coase による）と言う。ただし二つのケースで利潤の分配は異なる。

**■危険回避度一定の効用関数について**

1. 絶対的危険回避度一定の効用関数
   $X$ 万円の資産を持つ人がその一部 $Y$ 万円をリスクのある資産に投資する。投資は確率 $p$ で $2Y$ になって返って来るが確率 $1-p$ で 1 円も返って来ない。したがって資産は確率 $p(>\frac{1}{2})$ で $X+Y$ に，確率 $1-p$ で $X-Y$ になる。資産を $x$ として効用関数を

   $$u = -e^{-\rho x}$$

   とする。$\rho(>0)$ は定数で絶対的危険回避度を表す，すなわち $-\frac{u''}{u'}=\rho$ である。$e$ は自然対数の底であり，この効用関数は指数関数である。期待効用は

   $$E = -pe^{-\rho(X+Y)} - (1-p)e^{-\rho(X-Y)}$$

   と表される。これを $Y$ で微分してゼロとおくと

   $$\frac{dE}{dY} = p\rho e^{-\rho(X+Y)} - (1-p)\rho e^{-\rho(X-Y)} = 0$$

   となる。これを整理して $pe^{-\rho Y}-(1-p)e^{\rho Y}=0$ より $e^{2\rho Y}=\frac{p}{1-p}$ となり，さらに

   $$2\rho Y = \ln\frac{p}{1-p}$$

   から次の式が得られる。

   $$Y = \frac{1}{2\rho}\ln\frac{p}{1-p}$$

   $p>\frac{1}{2}$ であるから $Y>0$ である。$\rho$ が大きいほど $Y$ は小さくなり，$Y$ の値は $X$ の大きさに依存しない。
2. 相対的危険回避度一定の効用関数
   まったく同じ問題を考える。効用関数を

   $$u = \frac{1}{1-\rho}x^{1-\rho}$$

   とする。$\rho(>0)$ は定数で相対的危険回避度を表す。すなわち $-\frac{xu''}{u'}=\rho$ である。期待効用は

   $$E = \frac{p}{1-\rho}(X+Y)^{1-\rho} + \frac{1-p}{1-\rho}(X-Y)^{1-\rho}$$

と表される。これを $Y$ で微分してゼロとおくと

$$\frac{dE}{dY} = p(X+Y)^{-\rho} - (1-p)(X-Y)^{-\rho} = 0$$

となる。これより $(X+Y)^{\rho} = \frac{p}{1-p}(X-Y)^{\rho}$ となり

$$X + Y = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}}(X-Y)$$

を得る。両辺を $X$ で割ると

$$1 + \frac{Y}{X} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}}(1 - \frac{Y}{X})$$

となるから

$$\frac{Y}{X} = \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}} - 1}{1 + \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{\rho}}}$$

が得られる。$\rho > 0$ で $p > \frac{1}{2}(\frac{p}{1-p} > 1)$ であるから $0 < \frac{Y}{X} < 1$ である。$\rho$ が大きいほど $\frac{Y}{X}$ は小さくなり，その値は $X$ の大きさに依存しない。

**■屈折需要曲線**　寡占理論において価格の硬直性を説明する理論である。差別化された寡占を考える。各企業は，自分が現行価格から値上げをしても（あるいは産出量を減らした結果価格が上がっても）相手はそれに追随して価格を引き上げたり，産出量を減らしたりしないが，値下げをしたら（あるいは産出量を増やした結果価格が下がったら）それに対抗して相手も値下げをしたり，産出量を増やしてくるであろうと予測する。単純な寡占モデルではない。このとき現行価格を境に自分の財に対する需要関数（需要曲線）の形が異なる。2 企業 A と B を考えそれぞれの産出量を $q_A$，$q_B$，価格を $p_A$，$p_B$ として現行価格以上（現行産出量以下）では次のような逆需要関数であるとする。

$$p_A = a - q_A - \frac{1}{2}q_B,\ p_B = a - q_B - \frac{1}{2}q_A$$

各企業の費用は $\frac{1}{2}c_A$，$\frac{1}{2}c_B$，したがって限界費用は $c_A$，$c_B$ で，$c_A = c_B$ であるとする。各企業は相手の産出量を与えられたものとして自分の産出量を決める（したがって自分の産出量を減らすと相手の価格も少し上がる。価格を決めるモデルにしてもよいが面倒)。このとき各企業の限界収入（これがポイント）は（A の場合は $p_Aq_A$ を $p_A$ で微分，B も同様）

$$MR_A = a - 2q_A - \frac{1}{2}q_B,\ MR_B = a - 2q_B - \frac{1}{2}q_A$$

となる。

ここで現行の産出量を $\bar{q}_A$，$\bar{q}_B$ で表すことにする。現行価格以下（現行産出量以上）では企業 A は B の産出量が

$$q_B = \bar{q}_B + \frac{1}{2}(q_A - \bar{q}_A)$$

に基づいて決められると予想し，同様に企業 B は A の産出量が

$$q_A = \bar{q}_A + \frac{1}{2}(q_B - \bar{q}_B)$$

に基づいて決められると予想するものと仮定する。すなわち，自分が産出量を増やせば相手も増やしてくると予想する。そのとき逆需要関数は次のようになる。

$$p_A = a - q_A - \frac{1}{2}[\bar{q}_B + \frac{1}{2}(q_A - \bar{q}_A)] = a - \frac{5}{4}q_A - \frac{1}{2}\bar{q}_B + \frac{1}{4}\bar{q}_A$$

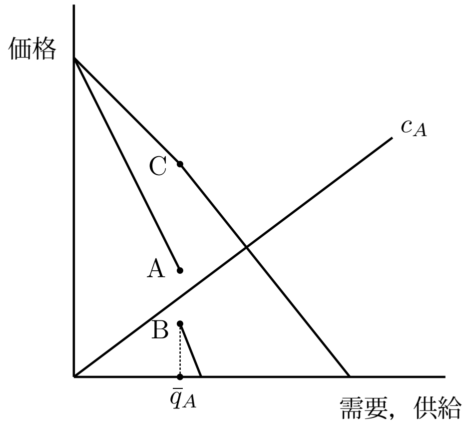
$q_A = \bar{q}_A$，$q_B = \bar{q}_B$ であれば両方の逆需要関数は同じになるので現行産出量において需要曲線はつながっている。しかし傾きが現行産出量以下では $-1$，現行産出量以上では $-\frac{5}{4}$ であるから，現行産出量の点で折れ曲がった（屈折した）形になる。企業 B の逆需要関数も同様に表せる。現行産出量以上での企業 A の限界収入は

$$MR'_A = a - \frac{5}{2}q_A - \frac{1}{2}\bar{q}_B + \frac{1}{4}\bar{q}_A$$

となり，$q_A = \bar{q}_A$ において $MR_A > MR'_A$ となるので限界収入曲線は現行産出量においてつながっておらず不連続になる。もし限界費用が現行産出量の所で $MR_A$ と $MR'_A$ の間の値をとれば（$a - 2\bar{q}_A > c_A > a - \frac{5}{2}\bar{q}_A$）現行産出量が最適な（利潤を最大化する）産出量となるが，限界費用が変化してもその状況が変わらず最適な産出量が変化しない可能性がある。そのとき価格も変化しない。これが価格の硬直性である。通常の寡占モデルでは限界費用が変化すればそれに応じて産出量，価格も変化する。

図でどれが需要曲線でどれが限界収入曲線かはわかると思う。C で需要曲線が屈折している。微妙だが。点 A と B の間を限界費用曲線（$c_A$）が通っている限り産出量，価格（C の水準）は変化しない。

このように屈折需要曲線の理論は経済の状況が少々変わっても財の価格がすぐには変化しないという現象の説明に有用であるが，現行の価格や産出量がどのような根拠で決まっているのかという点は問題にしない。




いささか古い理論だが今でも公務員試験や経済学検定試験などでは出題されているようだ。

**■ラーナーの独占度**　独占において $\frac{p-c'}{p}$ をラーナーの独占度（「マークアップアップ率」と呼んでいる本もある）と言う（$c'$ は限界費用)。

$$p\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = c'$$

より

$$\text{ラーナーの独占度} = \frac{1}{\varepsilon}$$

である（$\varepsilon$ は需要の価格弾力性の逆数。

**■プリンシパル-エージェント理論の簡単な例**　企業と労働者の関係を考える。労働者が努力したとき 80% の確率でよい結果が得られるが 20% の確率で悪い結果になる。努力しなければよい結果は得られない。企業には労働者が努力したかどうかはわからず結果によって判断するしかない。

1. 企業が労働者に固定賃金 $w$ を提示した場合の企業と労働者の利得は以下のようになる。
   (i) 労働者が求人に応じて努力し，よい結果が得られた場合の企業の利得は $5000-w$，労働者の利得は $w-200$（200 は努力のコスト）。
   (ii) 労働者が求人に応じて努力したが悪い結果になった場合の企業の利得は $2000-w$，労働者の利得は $w-200$。
   (iii) 労働者が努力しなかった場合，企業の利得は $2000-w$，労働者の利得は $w$。
   (iv) 労働者が求人に応じなかったとき，企業の利得は 0，労働者の利得は 500（500 は外部の機会で得られる利得）。

   $w - 200 < w$ であるから固定賃金がいくらであれ努力しないのが労働者にとって最適である。その前提で労働者が求人に応じる条件は $w \geq 500$ である。したがって企業にとっては $w = 500$ を提示して $2000 - 500 = 1500$ の利得を得るのが最適である。
2. 企業が固定賃金 $w$ に加えてよい結果が得られた場合にボーナス $b$ を支払うインセンティブ契約を提示したとする。このときの経営者と労働者の利得は以下のようになる。
   (i) 労働者が求人に応じて努力し，よい結果が得られた場合の企業の利得は $5000-w-b$，労働者の利得は $w+b-200$（200 は努力のコスト）。
   (ii) 労働者が求人に応じて努力したが悪い結果になった場合の企業の利得は $2000-w$，労働者の利得は $w-200$。
   (iii) 労働者が努力しなかった場合，企業の利得は $2000-w$，労働者の利得は $w$。
   (iv) 労働者が求人に応じなかったとき，企業の利得は 0，労働者の利得は 500（500 は外部の機会で得られる利得）。

   労働者が求人に応じて努力したときの労働者の期待利得 $E_1$ は

   $$E_1 = 0.8 \times (w + b - 200) + 0.2 \times (w - 200) = w + 0.8b - 200$$

   である。ただし，労働者に努力させるためにはこれが努力しなかったときの利得以上である必要がある（インセンティブ両立条件）。これは

   $$w + 0.8b - 200 \geq w$$

   より

   $$b \geq 250$$

   と表される。さらに努力することを前提とした場合，労働者が求人に応じるには上記の期待利得が外部の機会で得られる利得以上である必要がある（参加条件）。これは

   $$w + 0.8b - 200 \geq 500$$

   より

   $$b \geq -1.25w + 875$$

   と表現される。企業の期待利得 $E_2$ は

   $$E_2 = 0.8 \times (5000 - w - b) + 0.2 \times (2000 - w) = 4400 - w - 0.8b$$

である。$b = -1.25w + 875$ をこれに代入すると

$$E_2 = 3700$$

となるから，企業は $b = -1.25w + 875$ かつ $b \geq 250$ を満たすように $w$ と $b$ を決めれば期待利得 3700 を得ることができるのである。例えば $(w, b) = (0, 875)$ あるいは $(w, b) = (500, 250)$ と決めればよい。

どちらの契約でも労働者の利得は同じ（外部機会の利得に等しい）であるが企業の利得はインセンティブ契約の方が大きい。

以上の議論では企業も労働者も危険中立的であると仮定していた。企業の株主は様々な投資先を持つことによって危険（リスク）を分散させられるので危険中立的であるという仮定は非現実的ではないが，労働者は危険回避的であると考えるのが適当かもしれない。そうすると $b = -1.25w + 875$ を満たす報酬では満足しない。その場合は少し余分に賃金またはボーナスを支払う必要があり，企業は 3700 の利得を得ることはできない。

もし企業が労働者の努力を観察できるとすると結果ではなく努力したかどうかで報酬を決めることができる。そのときインセンティブ両立条件と参加条件はそれぞれ $b \geq 200$, $b \geq -w + 700$ となるから $(w, b) = (500, 200)$ や $(w, b) = (0, 700)$ などが企業の利得を最大にする賃金とボーナス（努力に対するボーナスなので労働者にとってリスクはない）であり，そのとき企業は 3700 の利得を得る。労働者の努力についての情報を企業が持っていればこの状態を実現できるが，努力したかどうかが直接には観察できず，不確実な結果で判断するしかないという情報の不完備性（非対称性）によって，労働者が危険回避的な場合には最適な状態が実現できなくなるのである。

**■動学的なゲームの応用；銀行の取り付けゲーム**　二人の投資家が銀行に $D$ の預金をし，銀行はその資金をある投資プロジェクトに投資している。その預金を満期前（プロジェクトが完成する前）に引き出すか満期まで待つかの選択ができるが，一人が満期前に引き出せばもう一人もそうしなければならない。二人が同時に満期前に引き出した場合にはそれぞれ $r$ を受けとり，一人だけが引き出した場合にはその人が $D$ を，もう一人が $2r - D$ を受け取ってゲームが終わる。どちらも満期前に引き出さなければゲームは満期後に進む。ともに満期後に引き出せば $R$ を，一人だけが満期後に引き出せばその人は $2R - D$ を，もう一人が $D$ を受け取ってゲームが終わる。どちらも引き出さなければ銀行は $R$ ずつを返してゲームが終わる。このゲームは満期前と満期後の 2 段階のゲームになっている。それぞれは標準型ゲームである。$R > D > r > \frac{D}{2}$ と仮定する。

まず満期後を考えると $R > D$ かつ $2R - D > R$ なので二人にとって引き出すことが支配戦略（相手が引き出しても引き出さなくても引き出すことが最適）になっており，ともに引き出すという戦略の組がナッシュ均衡である。利得表は以下の通り。満期後のゲームは全体のゲームの部分ゲームになっている。

| | | 投資家 2 | |
|---|---|---|---|
| 投資家 1 | | 引き出す | 引き出さない |
| | 引き出す | R, R | 2R-D, D |
| | 引き出さない | D, 2R-D | R, R |

満期後のナッシュ均衡を前提にすると満期前のゲームの利得表は次のようになる。

投資家２

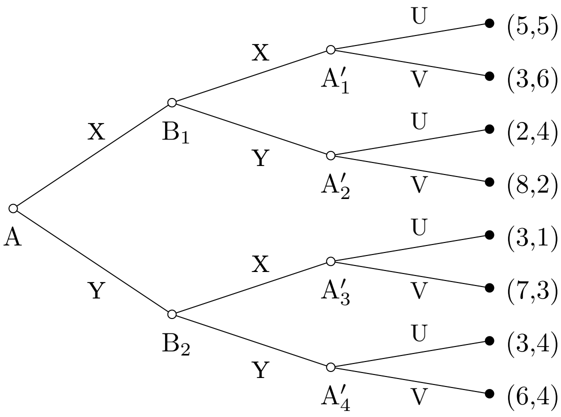
| 投資家１ | | 引き出す | 引き出さない |
|---|---|---|---|
| | 引き出す | r, r | D, 2r-D |
| | 引き出さない | 2r-D, D | R, R |

$r > 2r - D$，$R > D$ であるから，相手が引き出すとき各投資家の最適反応は「引き出す」，相手が引き出さないときの最適反応は「引き出さない」である。したがってこのゲームには「ともに満期前に引き出す」という戦略の組と「ともに満期前には引き出さず，ともに満期後に引き出す」という戦略の組の二つの純粋戦略によるナッシュ均衡がある。そのナッシュ均衡と満期後の「ともに引き出す」というナッシュ均衡の組がゲーム全体の部分ゲーム完全均衡である。

$R > D$ であるからともに満期まで待つ方がお互いにとって得策であるが，相手が満期前に引き出すのではないかという疑心暗鬼に陥ると自分も引き出すことが最適になってしまうのである。そのような均衡は銀行に対する取り付けと解釈できる。待っていた方が得だから合理的根拠を欠いた取り付けだと言えるかもしれないが，人が取り付けに走れば自分もそうした方がよいという意味では合理的である。満期前のゲームは「協調ゲーム」の例になっている。

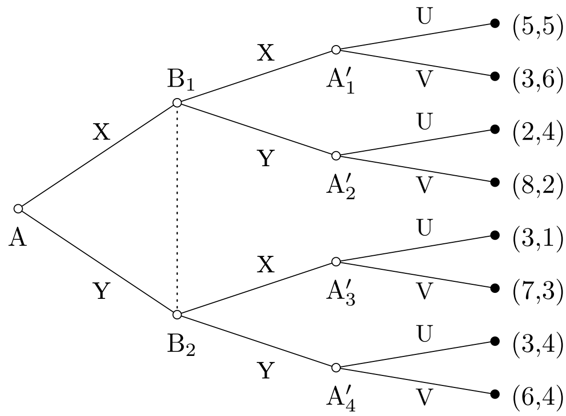
**■部分ゲーム完全均衡の補足**

右の図に表されたゲームを考える。プレイヤー A は A および $A'_1$，$A'_2$，$A'_3$，$A'_4$ のいずれかで行動を選ぶ。つまり A は 2 度選択の機会がある。B の選択の機会は 1 度だけであり $B_1$，$B_2$ のいずれかで行動を選ぶ。ゲームを逆向きに考えて行くと $A'_1$ において A は U を，$A'_2$ においては V を，$A'_3$，$A'_4$ においても V を選ぶ。それを前提にすると B は $B_1$ において X を，$B_2$ においては Y を選ぶ。さらにそれを前提にすると A においてプレイヤー A は Y を選ぶ。そのような選択が部分ゲーム完全均衡である。




結果として A は Y と V を選び，B は Y を選んで利得は $(6, 4)$（左側が A の利得）が実現するが，部分ゲーム完全均衡を表すには各点における選択のすべてを記述しなければならない。このゲームでは各点から始まるゲームがすべて部分ゲームになっている。

次に右の図に表されたゲームを考える。上のゲームとの違いはプレイヤー B にとってプレイヤー A が X を選んだか Y を選んだかがわからないという点である。$B_1$，$B_2$ が点線で結ばれているのは二つの点を B が区別できないという意味であり，$B_1$ と $B_2$ からなる集合は B の情報集合と呼ばれる（二つの点を線で結ぶのではなく楕円で囲む書き方もある)。このゲームは，まず A と B が同時に X か Y を選び，その結果を見てから A が U か V を選ぶという構造になっている。



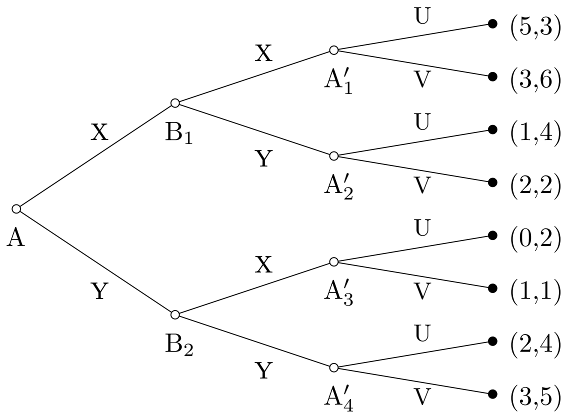

$A'_1$，$A'_2$，$A'_3$，$A'_4$ における A の意思決定は上のゲームと同じであり，それを前提にすると X と Y の選択は次の標準型ゲームで表される。

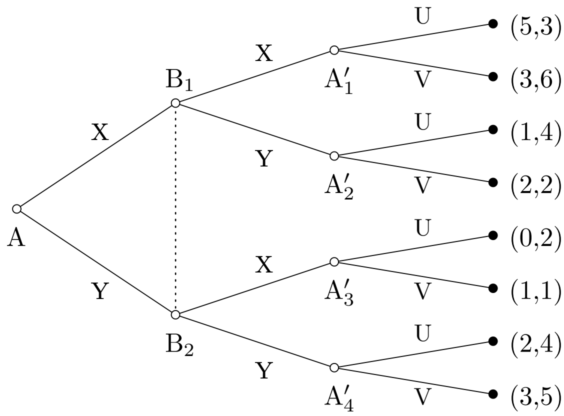
B の戦略

| | | X | Y |
|---|---|---|---|
| A の | X | 5, 5 | 8, 2 |
| 戦略 | Y | 7, 3 | 6, 4 |

この標準型ゲームには純粋戦略によるナッシュ均衡はない。混合戦略によるナッシュ均衡はあり（A が $\frac{1}{4}$ の確率で，B が $\frac{1}{2}$ の確率でそれぞれ X を選ぶ戦略の組み合わせ)，それが（$A'_1$，$A'_2$，$A'_3$，$A'_4$ における A の意思決定を含めて）このゲームの部分ゲーム完全均衡である。もちろん純粋戦略に限定すれば部分ゲーム完全均衡はない。このゲーム（図に表されたゲーム）では全体のゲームと $A'_1$，$A'_2$，$A'_3$，$A'_4$ の各点から始まるゲームが部分ゲームになっているが，$B_1$ または $B_2$ から始まる部分ゲームはない。

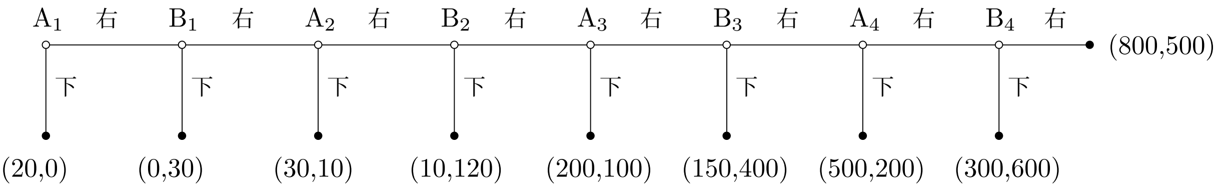
練習問題として次の二つのゲームを考えてみよう。




左のゲームでは A も B も X を選ぶ戦略の組が（A による U または V の選択と合わせて）部分ゲーム完全均衡になる。右側のゲームには二つの純粋戦略による部分ゲーム完全がある。確認してみていただきたい。

**■ムカデゲーム**　図のようなゲームを考えてみよう。




ムカデに似た図なのでムカデゲームと呼ばれる。ムカデの足はもっとたくさんあってもよい。プレイヤー A は $A_1$，$A_2$，$A_3$，$A_4$ で，プレイヤー B は $B_1$，$B_2$，$B_3$，$B_4$ で右か下かを選ぶ意思決定をする。右を選べば（$B_4$ を除いて）ゲームは続き，下を選べばゲームは終わる。左側の数字が A の利得である。逆向きに考えると，まず $B_4$ において B は右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，それを前提にすると $A_4$ において A は右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，それを前提にすると $B_3$ において B は右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，...，とういうように考えて行くと，結局 $A_1$ において A が下を選んでゲームは終わり，$(20, 0)$ という利得が実現する。これがこのゲームの部分ゲーム完全均衡である。本当にそうなるだろうか？ A は $A_1$ で右を選ぶと次に B が下を選ぶのではないかと思って下を選ぶ。一方 B は $B_1$ で右を選ぶと次に A が下を選ぶのではないかと思って下を選ぶ，ということになっている。しかしともに少し我慢すれば 100 を越える利得が得られるのである。実際には何回か右に動き，適当な所で下に降りるという結果になるのではないかと予想されるしそのような実験結果もあるようだが，通常のゲーム理論の論理だけではなく心理学的な要因や，次の最後通牒ゲームと同様に利他的な行動を含めて考える必要があるかもしれない。

**■最後通牒（つうちょう）ゲームとその実験について**　部分ゲーム完全均衡の応用として最後通牒ゲームというのを紹介しよう。二人のプレイヤー A と B が 1 万円のお金を分け合うことを考える。そのルールは以下のようなものである。

1. A が 1 円単位で自分と相手の取り分を提案する。自分が $x$ 円取ると提案したとしよう。
2. それに対して B は受け入れるか拒否するかを回答する。受け入れれば B の取り分は $10000 - x$ 円であり，拒否すると二人とも 1 円ももらえない。そこでゲームは終わる。再提案はない。

動学的なゲームであるが図を描くまでもないだろう。A が提案した後の状況を考えると B は受け入れれば $10000 - x$ 円もらえ，拒否すれば 1 円ももらえないから $x < 10000$ ならば受け入れるのが最適であるが，$x = 10000$ のときには受け入れても拒否しても結果は 1 円ももらえないので受け入れも拒否もどちらも最適な行動である。このとき受け入れを選ぶものと考えよう。すると，それに対応して A は $x = 10000$，すなわち全部自分が取るという提案をするのが最適である。これが一つの部分ゲーム完全均衡である。一方，その提案に対して B が拒否を選ぶとすると A は $x = 9999$，すなわち B に 1 円あげるという提案をすればよい。これが二つ目の部分ゲーム完全均衡である。1 円単位ではなくお金をいくらでも細分化できるならば後者の部分ゲーム完全均衡においても限りなく $x = 10000$ に近づく。

最近はやりの実験経済学でこの最後通牒ゲームの実験が行われている。それによると以下のような事実が報告されている。

1. プレイヤー B は自分の取り分があまりにも小さい（$10000 - x = 2000$ 程度以下の）提案は受け入れず A を道連れにしてともに 0 になることを選ぶ。
2. プレイヤー A はそもそも相手にあまり不利な提案はせず，だいたい $x = 5000$ から $x = 7000$ くらいの

提案をする。

これらの結果はゲーム理論が間違っていることを意味するのであろうか？ そんなことはない。そうではなくプレイヤーの利得（「効用」というべきかもしれない）が必ずしも自分の取り分だけでは決まらず，自分と相手との取り分の差にも依存するということを考えなければならないのである。上の 2 点について検討してみると。

1. A の取り分と自分の取り分との差が大きいとプレイヤー B の利得が小さくなるのであまり $x$ が大きい提案は受け入れない。これは人間が自分と比べて人の豊かさを羨む（あるいは妬む）という性質，つまり嫉妬心を持つということを意味すると考えられる。
2. A にとっても同様に自分の取り分と B の取り分との差が大きいと利得が小さくなるのであまり $x$ が大きい提案はしない。これは人間が必ずしも利己的に行動するばかりではなく「公平性」や「平等」ということも意識しているということ，つまりより公平な提案をすることによって満足を得るということを意味すると考えられる。ただし，A の行動についてはあまり $x$ が大きい提案は B によって拒否されるだろうという推測によるものであるという側面もあるかもしれない。

なお，このような場合に「人間は必ずしも合理的ではない」と言われることがあるが，それは違う。「利己的でない」ということと「合理的でない」ということとはまったく異なる。ゲーム理論で「合理的」とはプレイヤーが自らの利得を最大化するように行動（あるいは戦略）を選択するということであるが，上で述べたようにその利得が自らの取り分の大きさだけではなく相手との差にもよるとするならば，そのような利得を最大化することこそが「合理的」なのである。金儲け第一主義者にとっては金儲けを追求することが，他人のために尽くす人にとってはそうすることが「合理的」な行動なのである。

実験経済学の参考文献は，川越敏司「実験経済学」(東京大学出版会)。

さて，B が嫉妬心を持ち A が利他愛を持つようなケースをゲーム理論的に考えてみよう。それぞれの利得が次の式で表されるとする。

$$u_A = x_A - \frac{1}{12000}(x_A - x_B)^2$$

$$u_B = x_B - \frac{1}{2}(x_A - x_B)$$

$u_A$，$u_B$ は各プレイヤーの利得，$x_A$，$x_B$ はそれぞれの取り分であり $x_A \geq x_B$ を前提とする。各プレイヤーにとって互いの取り分の差が大きいほど利得は小さくなる。B が A の提案を受け入れれば $x_B = 10000 - x_A$ であるが，拒否すれば $x_A = x_B = 0$，したがって $u_A = u_B = 0$ である。A の提案を $x$ として（$x \geq 5000$ とする）B がそれを受け入れたときの利得は $u_B = 10000 - x - \frac{1}{2}(2x - 10000) = 15000 - 2x$，拒否したときの利得は $u_B = 0$ であるから，$x \leq 7500$ のときは受け入れることが最適であり，$x > 7500$ のときには拒否するのが最適である。つまり B は自分の取り分が 2500 円以上でなければ受け入れない。$\frac{1}{2}$ を変えればこの数字も変わる。混合戦略を考えるのは面倒なので $=$ のときは受け入れるものとしよう。それを前提にすると A の利得は

1. B が提案を受け入れるときは $u_A = x - \frac{1}{12000}(2x - 10000)^2$ である。これは $x = 6500$ のとき最大値 5750 をとる。
2. B が拒否するときは $u_A = 0$,

となる。したがって A の最適な戦略は $x=6500$ を選ぶことであり，これは 7500 以下であるからその提案を B が受け入れるという戦略の組が部分ゲーム完全均衡となる。$\frac{1}{12000}$ を変えれば $x$ の値も変わる。

B が $x=7500$ 以下の提案しか受け入れないというのが嫉妬心によるものであり，A が $x=6500$ を提案するというのが利他愛によるものである。A が利他愛を持たない場合（$u_A=x_A$ のとき）は $x=7500$ を提案する（$x=7500$ のとき $u_A\approx 5417>0$ である）。

**■コア，仁，シャープレイ値の問題の追加**　3 人のプレイヤー A，B，C がいて，特性関数の値が次のようであるとき，コア，仁，およびシャープレイ値を求めよ。

$$v(\{A\})=1,\ v(\{B\})=0,\ v(\{C\})=2$$
$$v(\{A,B\})=6,\ v(\{B,C\})=7,\ v(\{A,C\})=11$$
$$v(\{A,B,C\})=25$$

1. **コア**

   3 人で提携を結んだときの A，B，C の取り分を $x$，$y$，$z$ とする。コアの条件は次のように表される。

   $$x+y+z=25,\ x\geqq 1,\ y\geqq 0,\ z\geqq 2$$
   $$x+y\geqq 6,\ y+z\geqq 7,\ x+z\geqq 11$$

   これらの条件を満たす配分の集合がコアである。条件より $1\leqq x\leqq 18$，$0\leqq y\leqq 14$，$2\leqq z\leqq 19$ でなければならない。

2. **仁**

   各提携の不満は以下のようである。

   $$\begin{aligned}&\{A,B\}:\ v(\{A,B\})-(x+y)=6-(x+y)\\&\{B,C\}:\ v(\{B,C\})-(y+z)=7-(y+z)\\&\{A,C\}:\ v(\{A,C\})-(x+z)=11-(x+z)\\&\{A\}:\ v(\{A\})-x=1-x\\&\{B\}:\ v(\{B\})-y=-y\\&\{C\}:\ v(\{C\})-z=2-z\end{aligned}$$

   最大の不満の大きさを $m$ とすると

   $$6-(x+y)\leqq m,\ 7-(y+z)\leqq m,\ 11-(x+z)\leqq m,\ 1-x\leqq m,\ -y\leqq m,\ 2-z\leqq m,$$

   が得られる。$x+y+z=24$ よりこれらの条件は次のように書き直される。

   $$1-m\leqq x\leqq 18+m,\ -m\leqq y\leqq 14+m,\ 2-m\leqq z\leqq 19+m$$

   $x$，$y$，$z$ の式がそれぞれ等式になる場合を考えると，$1-m=18+m$，$-m=14+m$，$2-m=19+m$ より各々 $m=-\frac{17}{2}$，$m=-7$，$m=-\frac{17}{2}$ を得る。この内最大のものは $m=-7$ であるから，これが最小化された最大の不満である。そうすると

   $$8\leqq x\leqq 11,\ 7\leqq y\leqq 7,\ 9\leqq z\leqq 12$$

   となり $y=7$ が決まる。$m=-\frac{17}{2}$ とすると $\frac{17}{2}\leqq y\leqq \frac{11}{2}$ となり矛盾が生じる。

$y=7$ とすると各提携の不満は以下のようになる。

$$\{A,B\}:\ v(\{A,B\})-(x+y)=-1-x$$
$$\{B,C\}:\ v(\{B,C\})-(y+z)=-z$$
$$\{A,C\}:\ v(\{A,C\})-(x+z)=11-(x+z)=-7$$
$$\{A\}:\ v(\{A\})-x=1-x$$
$$\{B\}:\ v(\{B\})-y=-7$$
$$\{C\}:\ v(\{C\})-z=2-z$$

値が決まっていない不満の最大値を最小化することを考えると $1-x$ と $2-z$ を等しくすることになるので $x=\frac{17}{2}$，$z=\frac{19}{2}$ が求まる。したがって仁となる配分は $(x,y,z)=(\frac{17}{2},7,\frac{19}{2})$ である。

3. **シャープレイ値**

各提携における各プレイヤーの貢献度は次の表で表される。

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| {A,B,C} | 25-7=18 | 25-11=14 | 25-6=19 |
| {A,B} | 6 | 5 | – |
| {A,C} | 9 | – | 10 |
| {B,C} | – | 5 | 7 |
| {A} | 1 | – | – |
| {B} | – | 0 | – |
| {C} | – | – | 2 |

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| $A\to AB\to ABC$ | 1 | 5 | 19 |
| $A\to AC\to ABC$ | 1 | 14 | 10 |
| $B\to AB\to ABC$ | 6 | 0 | 19 |
| $B\to BC\to ABC$ | 18 | 0 | 7 |
| $C\to AC\to ABC$ | 9 | 14 | 2 |
| $C\to BC\to ABC$ | 18 | 5 | 2 |

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均を求めると A，B，C それぞれ $\frac{53}{6}$，$\frac{19}{3}$，$\frac{59}{6}$ であるからシャープレイ値にもとづく配分は $(x,y,z)=(\frac{53}{6},\frac{19}{3},\frac{59}{6})$ である。

**■演習問題の追加（『弱点克服 大学生のミクロ経済学』（遠山智久，東京図書）を参照した）**

1. 次の効用関数を持つ消費者の需要関数を求めよ。記号，予算制約式は標準的なものを用いる。

（i）$u=\sqrt{x}+y$

(ii) $u=x^2+y^2$

(iii) $u=3x+y$

(iv) $u=\min(x,y)$（$x$, $y$ の小さい方）

**■解**

(i) ラグランジュ関数を作ると

$$\mathcal{L}=\sqrt{x}+y+\lambda(p_x x+p_y y-m)$$

$x$, $y$ で微分してゼロとおくと

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\lambda p_x=0,\ 1+\lambda p_y=0$$

これらから $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{p_x}{p_y}=0$ が得られ，X の需要関数が次のように求まる。

$$x=\frac{p_y^2}{4p_x^2}$$

予算制約から Y の需要関数は次のようになる。

$$y=\frac{m}{p_y}-\frac{p_y}{4p_x}$$

$m$ が小さいと $y$ が負になる可能性もあるが，そのときは $y=0$ とする。

(ii) この問題をラグランジュ乗数法で解くと効用最小化になってしまう。予算制約式から $y=\frac{m}{p_y}-\frac{p_x x}{p_y}$ として効用関数に代入すると

$$u=x^2+\left(\frac{m}{p_y}-\frac{p_x x}{p_y}\right)^2$$

となる。これは $x$ の二次関数であるがいわゆる下に凸の二次関数（最小値を持つ二次関数）なので微分を用いるとやはり効用最小化になる。このときには可能な $x$ の範囲の両端のいずれかまたは両方において最大値が実現する。$0\leqq x\leqq\frac{m}{p_x}$ であり $x=0$ のとき $u=\left(\frac{m}{p_y}\right)^2$，$u=\left(\frac{m}{p_x}\right)^2$ なので $p_x>p_y$ のときは $x=0$，$y=\frac{m}{p_y}$，$p_x<p_y$ のときは $x=\frac{m}{p_x}$，$y=0$ であり，$p_x=p_y$ のときはこれらのいずれもが需要関数となる。

(iii) 限界代替率（限界効用の比）は $\frac{u_x}{u_y}=2$ で一定であるから，相対価格 $\left(\frac{p_x}{p_y}\right)$ が 2 より大きければ $y=\frac{m}{p_y}$，$x=0$，2 より小さければ $x=\frac{m}{p_y}$，$x=0$ となる。相対価格が 2 に等しければ $2x+y=m$ を満たす非負の $x$，$y$ のすべてが需要となり得る。

(iv) この場合常に $x=y$ でなければいけないので需要関数は

$$x=y=\frac{m}{p_x+p_y}$$

である。

2. X, Y の 2 財, A, B2 人の消費者からなる交換経済を考える。それぞれの効用関数は $u_A=x^2y$, $u_B=xy$ である。また初期保有量は A が $(6,2)$，B が $(2,8)$ である（左が X，右が Y)。このとき各消費者の需要関数と競争均衡における各財の価格を求めよ。

■**解**　X，Y の価格を $p_x$，$p_y$ とすると A のラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = x^2y + \lambda(p_x x + p_y y - 6p_x - 2p_y)$$

と表される。$x$，$y$ で微分してゼロとおくと

$$2xy + \lambda p_x = 0,\ x^2 + \lambda p_y = 0$$

と予算制約式 $p_x x + p_y y = 6p_x + 2p_y$ より

$$x = \frac{2(6p_x + 2p_y)}{3p_x},\ y = \frac{6p_x + 2p_y}{3p_y}$$

が得られる。これらが需要関数である。同様にして B については

$$x = \frac{2p_x + 8p_y}{2p_x},\ y = \frac{2p_x + 8p_y}{2p_y}$$

となる。超過需要は A については

$$x - 6 = \frac{2(2p_y - 3p_x)}{3p_x},\ y - 2 = \frac{2(3p_x - 2p_y)}{3p_y}$$

B については

$$x - 2 = \frac{8p_y - 2p_x}{2p_x},\ y - 8 = \frac{2p_x - 8p_y}{2p_y}$$

となる。均衡においては各財の超過需要の和が 0 であるが，X の需給が均衡すれば Y の需給も均衡する（ワルラスの法則）ので

$$\frac{32p_y - 18p_x}{6p_x} = 0$$

より均衡相対価格は $\frac{p_x}{p_y} = \frac{16}{9}$ となる。A の需要は $(x, y) = (\frac{19}{4}, \frac{38}{9})$，B の需要は $(x, y) = (\frac{13}{4}, \frac{52}{9})$ である。

3. 現在，将来の消費を $c_1, c_2$，所得をそれぞれ $m_1, m_2$，利子率を $r$，消費者の効用関数を $u = c_1c_2$ として借入制約がある（現在において借入ができない）ときの消費を求めよ。

■**解**　借入制約がないときの予算制約式は

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = m_1 + \frac{m_2}{1+r}$$

であり，現在と将来の消費を求めると

$$c_1 = \frac{1}{2}(m_1 + \frac{m_2}{1+r}),\ c_2 = \frac{1}{2}[(1+r)m_1 + m_2]$$

となる。借入制約があると $c_1$ は $m_1$ を超えることができない。$c_1 \leq m_1$ が成り立つ条件は

$$m_1 \geq \frac{m_2}{1+r}$$

であり，$m_1 = \frac{m_2}{1+r}$ のときは $c_1 = m_1$ となる。$m_1 < \frac{m_2}{1+r}$ のときは $c_1 \leq m_1$ の範囲内で効用が最大となる消費量を求めることになる。$c_1$ と $c_2$ の限界代替率は $\frac{\partial u}{\partial c_1} = c_2$，$\frac{\partial u}{\partial c_2} = c_1$ より $\frac{c_2}{c_1}$ なので $\frac{c_2}{c_1} \geq 1 + r$ である限り $c_1$ をできるだけ大きくする方がよい。$c_1 \leq m_1$ ならば予算制約式より $c_2 \geq m_2$ であり，$m_1 < \frac{m_2}{1+r}$ のとき $c_1 < \frac{c_2}{1+r}$ が成り立つ。そのとき $\frac{c_2}{c_1} > 1 + r$ であるから $c_1 = m_1$，$c_2 = m_2$ となる。

以下の 2 問は非現実的なモデルであるが計算問題としてはあり得る。

4. X，Y の 2 財，1 人の消費者，1 つの企業がある。消費者の初期保有量は $(2,2)$，効用関数は $u=xy$ であり，企業はこの消費者によって所有され，消費者から X を買って利潤を最大化するように Y を生産する。生産関数は $y=\sqrt{2x}$ である。X は Y の生産にも用いられるがそれ自身消費もされる。また Y は初期保有量と産出量の合計が消費される。このとき完全競争均衡価格，産出量，消費量を求めよ。

**■解**　企業の利潤は

$$\pi = p_y\sqrt{2x}-p_x x$$

と表される（$x$ は投入量)。これを $x$ で微分してゼロとおくと

$$p_y\frac{1}{\sqrt{2x}}-p_x=0$$

より

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{p_y}{p_x}\right)^2,\ y=\frac{p_y}{p_x}$$

が導かれる。後者が供給関数である。また利潤は $\pi=\frac{p_y^2}{2p_x}$ となる。この利潤は企業の持ち主である消費者の手に渡る。消費者の効用最大化問題のラングランジュ関数は

$$\mathcal{L}=xy+\lambda\left(p_x x+p_y-2p_x-2p_y-\frac{p_y^2}{2p_x}\right)$$

と書ける（所得は初期保有量と企業の利潤からなる)。これを $x$，$y$ で微分すると

$$y+\lambda p_x=0,\ x+\lambda p_x=0$$

および，予算制約より各財の需要関数が

$$x=\frac{2p_x+2p_y+\frac{p_y^2}{2p_x}}{2p_x}=1+\frac{p_y}{p_x}+\frac{p_y^2}{4p_x^2},\ y=\frac{2p_x+2p_y+\frac{p_y^2}{2p_x}}{2p_y}=1+\frac{p_x}{p_y}+\frac{p_y}{4p_x}$$

となる。企業の X に対する需要，初期保有量を含めて X の超過需要がゼロになる条件を考えると

$$\frac{p_y}{p_x}+\frac{3p_y^2}{4p_x^2}-1=0$$

を得る。$\frac{p_y}{p_x}=t$ として $t$ の二次方程式を作ると

$$3t^2+4t-4=(3t-2)(t+2)=0$$

より $\frac{p_y}{p_x}=\frac{2}{3}$ が求まる（$-2$ は相対価格として不適)。そのとき消費者の需要は $(x,y)=(\frac{16}{9},\frac{8}{3})$，企業の X の需要は $\frac{2}{9}$，Y の産出量は $\frac{2}{3}$ である。

5. 効用関数を $u=x+y$，生産関数を $y=4x$ として上の問題を解け。

**■解**　まず生産を考える。企業の利潤は次のようになる（$x$ は投入量)。

$$\pi=4p_y x-p_x x$$

$p_x>4p_y$ のときは生産すればするほど赤字になるので Y の産出量も X の需要も 0，利潤も 0 である。$p_x<4p_y$ のときには生産すればするほど利潤が増えるが X の初期保有量は 2 に限られているので Y の

産出量は 8，X の需要は 2 であり，利潤は $\pi = 8p_y - 2p_x$ である。$p_x = 4p_y$ のときには利潤は 0 であるが X の需要は 0 から 2 までの，Y の産出量はその X の投入量に応じて 0 から 8 までの値をとる。

消費者の効用関数から $p_x > p_y$ のときは $x = 0$，$p_x < p_y$ のときは $y = 0$，$p_x = p_y$ のときは予算制約を満たす任意の需要が可能となる。

以上をもとに以下のように場合分けができる。

(i) $0 < \frac{p_x}{p_y} < 1$ のとき
このとき Y の産出量は 8 であるが需要が 0 なので均衡にはならない。$\frac{p_x}{p_y}$ が上昇して次のケースに近づく。

(ii) $\frac{p_x}{p_y} = 1$ のとき
この場合は企業の X の需要が 2，Y の産出量が 8 で，消費者はどのような需要も可能なので X の需要が 0，Y の需要が 10 として均衡になる。

(iii) $1 < \frac{p_x}{p_y} < 4$ のとき
この場合は企業の X の需要が 2，Y の産出量が 8，消費者の X の需要が 0，Y の需要が 10 として均衡になる。

(iv) $\frac{p_x}{p_y} = 4$ のとき
この場合消費者の X の需要は 0 であるが，企業の X の需要は 2 以下のどのような値も可能なのでその需要は 2，Y の産出量は 8，消費者の Y の需要が 10 として均衡になる。

(v) $\frac{p_x}{p_y} > 4$ のとき
このときは企業の X の需要は 0 であるが消費者の X の需要も 0（初期保有量は 2）なので均衡にはならない。$\frac{p_x}{p_y}$ は低下し前のケースに近づく。

**■訂正**　198 ページの (3.31) 式は

$$\frac{w}{f_L} = \frac{r}{f_K} = -\lambda$$

と訂正する。$f_L$ は労働の限界生産力，$w$ は賃金率であるから $\frac{w}{f_L}$ は労働を 1 単位増やしたときの産出量の増加と費用の増加の比，すなわち限界費用を表している。$\frac{r}{f_K}$ も同様。

**■無差別曲線の凸性と効用関数**　X，Y の 2 財についての無差別曲線の凸性は限界代替率が無差別曲線に沿って $x$ について増加関数（大きさは減少関数）であることとして表現される。効用関数を $u(x,y)$ とすると限界代替率 (marginal rate of substitution) は

$$MRS = \frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}$$

と表される。これを再度 $x$ で微分するが，無差別曲線に沿った変化を考えるので $u_x dx + u_y dy = 0$ が満たされるように $y$ も変化しなければならない。

$$\frac{dMRS}{dx} = \frac{-u_{xx}u_y + u_x u_{xy}}{u_y^2} + \frac{-u_{xy}u_y + u_x u_{yy}}{u_y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{-u_{xx}u_y + u_x u_{xy}}{u_y^2} + \frac{u_{xy}u_x u_y - u_x^2 u_{yy}}{u_y^3} > 0$$

より

$$u_{xx}u_y^2 - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy} < 0$$

が得られる。

**■コブ・ダグラス型生産関数と資本・労働分配率**　生産関数が

$$x = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

であるときの利潤最大化を考える。$A$ は正の定数，$0 < \alpha < 1$ である。財の価格を $p$ とすると利潤は

$$\pi = pAL^{\alpha}K^{1-\alpha} - wL - rK$$

である。これを $L$，$K$ で微分してゼロとおくと

$$\alpha pAL^{\alpha-1}K^{1-\alpha} - w = 0$$

$$(1-\alpha)pAL^{\alpha}K^{-\alpha} - r = 0$$

となる。上の式に $L$ を，下に式に $K$ をかけると

$$wL = \alpha pAL^{\alpha}K^{1-\alpha} = \alpha px$$

$$rK = (1-\alpha)pAL^{\alpha}K^{1-\alpha} = (1-\alpha)px$$

となり，これらを加えると

$$wL + rK = px$$

となる。したがって利潤（超過利潤）はゼロであり，労働分配率 $(\frac{wL}{px})$ は $\alpha$，資本分配率 $(\frac{rK}{px})$ は $1-\alpha$ である。