ミクロ経済学演習問題（＋補足の解説，略解）

平成 19 年 4 月 15 日
田中靖人
yatanaka@mail.doshisha.ac.jp
075-251-3648

1. p を価格，x を需要または供給として，ある財の需要曲線が

$$p = 272 - 3x$$

供給曲線が

$$p = 6x + 20$$

のように表されるとき，この財の均衡価格と均衡取引量を求め，均衡を図示せよ。同様に次のような需要・供給曲線について同じ計算をし，均衡を図示せよ。

$$p = 200 - 4x \text{（需要曲線）}$$

$$p = 3x + 32 \text{（供給曲線）}$$

2. ある財の価格が 100 円から 200 円に値上がりしたときの需要の価格弾力性と，逆に 200 円から 100 円に値下がりしたときの需要の価格弾力性とが異なった値をとる可能性があることを例を上げて確認せよ。また変化が小さいときに両者の値が近くなることも示せ。

3. ある財の価格が 150 円から 200 円に値上がりしたときの供給の価格弾力性と，逆に 200 円から 150 円に値下がりしたときの供給の価格弾力性とが異なった値をとる可能性があることを例を上げて確認せよ。また変化が小さいときに両者の値が近くなることも示せ。

4. 需要曲線のシフトが財の価格や取り引き量に与える効果について，供給曲線の傾きが大きいときと小さいときとでどのように異なるかを図を描いて説明せよ。また第 1 問で用いられているものと同様の需要・供給曲線を使って数値例を 1 つ作れ。需要曲線のシフトは平行移動と考えればよい。

5. 供給曲線のシフトが財の価格や取り引き量に与える効果について，需要曲線の傾きが大きいときと小さいときとでどのように異なるかを図を描いて説明せよ。また第 1 問で用いられているものと同様の需要・供給曲線を使って数値例を 1 つ作れ。供給曲線のシフトは平行移動と考えればよい。

6. 消費税の税率が引き上げられたときに財の価格や取り引き量がどのように変化するかを需要曲線，供給曲線のシフトの考え方にもとづいて検討せよ。また，消費税の税率の引き上げと合わせて所得税の減税が行われた場合にはどうなるか。

7. 清酒にかかる税金を引き上げた場合に，清酒とワインの価格や販売量に与える影響を検討せよ。市場メカニズムにもとづいた取引を前提とする。

8. どのような場合に，またなぜワルラスの調整過程が安定，不安定になるかを図を描いて説明せよ。

9. どのような場合に，またなぜマーシャルの調整過程が安定，不安定になるかを図を描いて説明せよ。

10. くもの巣の調整過程はどのような場合に，またなぜ安定，不安定になるかを図を描いて説明せよ。

11. p を価格，x を需要または供給として，ある財の需要曲線が

$$p = 272 - 3x$$

供給曲線が

$$p = 6x + 20$$

のときのくもの巣の調整過程の安定性を等比数列を用いて分析せよ。

12. p を価格，x を需要または供給として，ある財の需要曲線が

$$p = 200 - 4x$$

供給曲線が

$$p = 3x + 32$$

のときのくもの巣の調整過程の安定性を等比数列を用いて分析せよ。

13. X 財と Y 財の消費を考える。同じ人の 2 つの無差別曲線は交わってはならない。なぜか？図を描いて説明せよ。

14. 無差別曲線は「線」であって幅があってはならない。なぜか？

15. X 財と Y 財の消費を考える。異なる 2 人の無差別曲線を同じ図に描いたときにこれらは交わってもよい。傾きの大きさの違いは何を表していると考えられるか？

16. 所得消費曲線（所得の変化と消費の変化の関係を表す曲線）が右上がりであるが直線ではないケースを，いくつかの無差別曲線と予算制約線を用いて図に描いてみよ。

17. X 財の消費量を横軸に，Y 財の消費量を縦軸にとって，X 財が下級財となるケースを図示せよ。

18. 横軸に Y，縦軸に X の消費量をとって，X の価格が下落した場合の代替効果と所得効果を図を描いて説明せよ。

19. 横軸に Y，縦軸に X の消費量をとって，X の価格が上昇した場合の代替効果と所得効果を図を描いて説明せよ。

20. 横軸に Y，縦軸に X の消費量をとって，Y の価格が上昇した場合の代替効果と所得効果を図を描いて説明せよ。

21. 横軸に X，縦軸に Y の消費量をとって，Y がギッフェン財になっているケースを図で表してみよ。

22. 下級財とギッフェン財の関係，意味の違いを代替効果，所得効果に着目して説明せよ。

23. 「序数的効用」,「基数的効用」の意味と違いを説明せよ。

24. 現在の消費，将来の消費によって効用を得る消費者の無差別曲線を図に描き，人によってその傾きが異なる場合，その違いの意味を説明せよ。

25. 現在の消費，将来の消費によって効用を得る消費者について，利子率が上昇したときに貯蓄が減少するケース，増加するケースを，代替効果，所得効果に着目して図を描いて説明せよ。

26. 現在の消費，将来の消費によって効用を得る消費者について，利子率が下落したときに貯蓄が減少するケース，増加するケースを，代替効果，所得効果に着目して図を描いて説明せよ。

27. 余暇と消費（あるいは所得）に関する無差別曲線と予算制約線によって個人の労働供給を分析する図において，予算制約線はどのようにして導かれるか？

28. 賃金率の下落によって労働供給が増加するケース，および減少するケースを図に描くとともに，それぞれの場合の代替効果，所得効果について説明せよ。

29. 2 人の消費者 A，B，2 つの財 X，Y からなる交換経済を考える。初期において消費者はともに両財をいくらか保有しているが A は Y 財を，B は X 財を多く持っているものとする。Y 財の価格が上昇したときに X 財の消費量が増加するケース，同じく Y 財の価格が上昇したときに X 財の消費量が減少するケースを消費者 A，B それぞれについて図を描いて説明せよ。無差別曲線の凸性が満たされているものとする。

30. 2 人の消費者 A，B，2 つの財 X，Y からなる交換経済を考える。初期において消費者はともに両財をいくらか保有しているが A は X 財を，B は Y 財を多く持っているものとする。X 財の価格が上昇したときに Y 財の消費量が増加するケース，同じく X 財の価格が上昇したときに Y 財の消費量が減少するケースを消費者 A，B それぞれについて図を描いて説明せよ。無差別曲線の凸性が満たされているものとする。

31. 交換経済の均衡について
(1) 交換経済の均衡はパレート効率的（最適）である。
(2) あるパレート効率的な点は初期保有量を適当にとることによって交換経済の均衡となるようにすることができる。
が成り立つが，第 29 問のような 2 人の消費者からなるケースについて，各個人の消費を表す（無差別曲線，予算制約線によって描かれた）図からこの (1)，(2) を証明する図を導き出す手順を説明し，これらが成り立つことを示せ。無差別曲線の凸性が満たされているものとする。

32. 2 人の消費者 A，B，2 つの財 X，Y からなる交換経済を考える。A，B の X 財，Y 財の消費量をそれぞれ x_A，x_B，y_A，y_B，初期保有量を $\bar{x}_A$，$\bar{x}_B$，$\bar{y}_A$，$\bar{y}_B$ と表すが，具体的に

$$\bar{x}_A = 12,\ \bar{x}_B = 24,\ \bar{y}_A = 12,\ \bar{y}_B = 8$$

であるとする。また A，B の効用関数がそれぞれ $x_A^2 y_A$，$x_B y_B$ であると仮定する。このとき交換経済の均衡相対価格を求めよ。

33. x，y を X 財，Y 財の消費量，p_x，p_y をそれぞれの価格，消費者の効用関数を $u = x^3 y^2$，予算制約式を $p_x x + p_y y = 15000$ としてラグランジュ乗数法を用いて効用最大化問題を解き，それが最大化（極大化）であることを確認せよ。
最大化の確認は，予算制約式を満たすような x，y の変化をとり，均衡の周辺で x が増加，減少したときに効用がどのようようように変化するかを考えればよい（以下の問題においても同様）。

34. 前問と同じ設定において消費者の効用関数が $u = xy^4$，予算制約式が $p_x x + p_y y = 25000$ のときにラグランジュ乗数法を用いて効用最大化問題を解き，それが最大化（極大化）であることを確認せよ。

35. 第 33 問をもとに，$p_x = 200$，$p_y = 300$ と仮定し，消費者の効用 $u = x^3 y^2$ を一定の値 1536 にして必要な予算を最小化する問題を解き，それが最小であることを確認せよ。

36. 三つの効用関数，$U = xy^2$，$U = 4xy^2 + 30$，$U = x^3 y^6$ から導かれる無差別曲線が同一であることを確認せよ。x，y は X 財，Y 財の消費量（需要）である。

37. 上の問題において，X 財，Y 財の価格がそれぞれ $p_x = 200$，$p_y = 100$ で消費者の所得が 24000 のとき，上記の 3 つの効用関数から導かれる消費量が同じであることをラグランジュ乗数法を用いて確認せよ。またそれらの解が確かに効用最大化になっていることを確認せよ（1 つのケースだけでよい)。

38. ある人は働いて得た賃金をすべて Y 財の購入に使うものとする。1 年間に働く日数を $L(0 \leqq L \leqq 366)$ とすると働かない日は余暇であり，余暇の日数 x を $x = 366 - L$ で定義する。Y 財の消費量を y とするとこの人の効用は

$$u = xy^2$$

と表されるものとする。Y 財の価格は 5,000 円，労働 1 日当りの賃金は 10,000 円であるとする。この人の効用を最大化する労働日数を求めよ。計算の便宜上 1 年を 366 日とする。

39. 働いて得た賃金をすべて Y 財の購入に使う人がいる。1 年間に働く日数を $L(0 \leqq L \leqq \bar{L})$ として余暇の日数 x を $x = \bar{L} - L$ で定義する。Y 財の消費量を y とするとこの人の効用は

$$u = xy^3$$

と表されるものとする。Y 財の価格は 8,000 円，労働 1 日当りの賃金も 8,000 円であるとする。この人の効用を最大化する労働日数を求めよ。$\bar{L}$ は 1 年間の日数を表す。

40. 所得のすべてを X 財と Y 財の消費に使う個人について効用関数が

$$u = (x-5)(y-10)^2 \,(x \text{ は } X \text{ 財の消費量}, y \text{ は } Y \text{ 財の消費量})$$

であるとする。この人の所得が 110，X 財の価格が 2，Y 財の価格が 1 であるとき，効用を最大化する各財の消費量を求めよ。

41. 所得のすべてを X 財と Y 財の消費に使う個人について効用関数が

$$u = (2x-5)^3(y-10) \,(x \text{ は } X \text{ 財の消費量}, y \text{ は } Y \text{ 財の消費量})$$

であるとする。この人の所得が 180，X 財の価格が 1，Y 財の価格が 2 であるとき，効用を最大化する各財の消費量を求めよ。

42. 所得のすべてを今期，来期の消費に使う個人を考え，その効用関数が

$$u = C_1C_2^2 \,(C_1 \text{ は今期の消費額}, C_2 \text{ は来期の消費額})$$

であるとする。今期，来期の所得がそれぞれ 100，120，（借り入れおよび貯金の）利子率が 0.2（20%）であるとき，効用を最大化する C_1，C_2 を求めよ。

また，改めて今期，来期の所得をそれぞれ 0，m，利子率を r であるとして間接効用関数を導き，ロイの恒等式を確認せよ。

43. 所得のすべてを今期，来期の消費に使う個人を考え，その効用関数が

$$u = C_1^2 C_2\,(C_1 \text{は今期の消費額}, C_2 \text{は来期の消費額})$$

であるとする。今期，来期の所得がそれぞれ 240，270,（借り入れおよび貯金の）利子率が 0.25（25%）であるとき，効用を最大化する C_1，C_2 を求めよ。

また，改めて今期，来期の所得をそれぞれ 0，m，利子率を r であるとして間接効用関数を導き，ロイの恒等式を確認せよ。

44. 消費者の支出最小化問題を図を描いて説明せよ。2 財の場合を考えればよい。

45. X，Y，Z，W の 4 財がある。各財の消費量，価格を x，y，z，w，p_x，p_y，p_z，p_w，所得を m とする。効用関数が

$$u = x^4 y^3 z^2 w$$

であるとき効用最大化問題と支出最小化問題を解き，通常の需要関数，補償需要関数を求めよ。

46. ある事故を保障する保険を考える。事故が起きたときの損害額は 20 であり，次の 2 つのタイプの人々がいるものとする。

(i) タイプ 1：事故を起こす確率は $\frac{1}{10}$，効用関数は $u_1 = 400 + 80x - 2x^2$

(ii) タイプ 2：事故を起こす確率は $\frac{1}{2}$，効用関数は同じ $u_2 = 400 + 80x - 2x^2$

事故が起きないときの経済的利益は $x = 20$，起きたときは $x = 0$ である。保険会社は上記の 2 つのタイプの人々がいること，それぞれが事故を起こす確率，および効用関数は知っているが誰がどのタイプかはわからない（もちろん本人はわかっている）ものとする。またタイプ 1 の人々よりタイプ 2 の人々の方が人数が多く，その比は 1 : 2 であることがわかっている。

以下の問に答えよ。

(i) 全額保障される保険があるとしてタイプ 1，タイプ 2 の人々はそれぞれいくらまで保険料を払うか？またタイプ 1 とタイプ 2 の人々が同数いるとしてこの保険は採算がとれるか？両方のタイプの人々が加入するように保険料を決めるものとする。

(ii) 2 種類の保険を作り各タイプの人々が異なる保険を購入するように仕向ける方法を具体的に考えよ。

解説 1　利益や損失など金額で表される結果についてのある人の効用関数が次のようであるとする。

$$u(x) = 300 + 140x - x^2$$

x は金額を表す。地震保険に入るかどうかを考える。地震が起きないときの経済的利益を 30，起きたときの利益を 0（地震の損害は −30）（たとえば 100 万円を 1 単位とすると 3000 万円）とする。この地震が起きたときにその損害を完全に埋め合わせてくれる保険があるとしていくらまでなら保険料を支払ってもよいだろうか。ある期間に地震が起きる確率は $\frac{1}{10}$ であるとする（保険料もその期間の保険料である）。期待効用は次のように計算される。

$$E(u) = 3600 \times \frac{9}{10} + 300 \times \frac{1}{10} = 3270$$

保険料を払えば地震が起きても損害を被らないので不確実性はなくこの人の効用は保険料を y とすれば

$$u(30 - y) = 300 + 140(30 - y) - (30 - y)^2 = 3600 - 80y - y^2$$

となる。$3600 - 80y - y^2 = 3270$ より $y^2 + 80y - 330 = 0$ が得られ

$$y = -40 + \sqrt{1930} \approx 3.9$$

が求まる。損害そのものの期待値は 3 であるが危険回避的な行動により 3.9 までの保険料を支払う可能性がある。

タイプ 1，タイプ 2 の人々がいて，ある事故を起こす可能性がある。事故が起きたときの損害を 30 とし，各タイプが事故を起こす確率と効用関数が次のようであるとする。

(i) タイプ 1：事故を起こす確率は $\frac{1}{10}$，効用関数は $u_1(x) = 300 + 140x - x^2$

(ii) タイプ 2：事故を起こす確率は $\frac{1}{5}$，効用関数は $u_2(x) = 600 + 160x - 2x^2$

（保険なしに）事故が起きたときの利益は $x = 0$，起きないときは $x = 30$ である。この事故に関する保険を販売する保険会社は上記の 2 つのタイプの人々がいることとそれぞれが事故を起こす確率，さらに効用関数は知っているが誰がどのタイプかはわからないので区別して保険加入を認めたり断ったりはできない。タイプ 1 の人々が保険に入らないときの期待効用は上の例で計算したように 3270 であり，一方タイプ 2 の人々の期待効用は

$$3600 \times \frac{4}{5} + 600 \times \frac{1}{5} = 3000$$

である。損害がすべて保障されるような保険があるとして効用が 3000 になる保険料を y とすると

$$600 + 160(30 - y) - 2(30 - y)^2 = 3600 - 40y - 2y^2 = 3000$$

より $y = 10$ となるからタイプ 2 の人々は 10 までの保険料を支払うことが可能である。保険会社が 1 種類の商品だけを用意し，損害を全額保障するとするとタイプ 1 の人々は上で見たように 3.9 までの保険料しか払わない。その保険料で保険を販売するとタイプ 2 の人々も購入する。タイプ 1 とタイプ 2 の人々が同数いるとすると $\frac{3}{20}$ の確率で事故が起こるから損害額の期待値は 4.5 となり 3.9 の保険料では採算がとれない。採算がとれるような保険料にすると（保険会社にとってより好ましい）タイプ 1 の人が買ってくれない。このような現象を逆選択 (adverse selection) と呼ぶ。全額保障しないとしても 1 種類の保険しか販売しないならば同じことが言える。そこで保険会社が次に示す 2 つの商品を用意すると考えてみよう。

(i) 保険 1：損害保障額は 20 で保険料は 5。したがって事故が起きたときの損害は（保険料を含めて）-15，起きなかったときは -5。

(ii) 保険 2：損害保障額は 8 で保険料は 1。事故が起きたときの損害は（保険料を含めて）-23，起きなかったときは -1。

それぞれの保険を購入したときの各タイプの人々の期待効用を求める。

(i) タイプ 1：保険 1 から得られる期待効用は

$$3175 \times \frac{9}{10} + 2175 \times \frac{1}{10} = 3075$$

保険 2 から得られる期待効用は

$$3519 \times \frac{9}{10} + 1231 \times \frac{1}{10} \approx 3290 > 3270$$

であるからこれらの人々は保険 2 を購入する。

(ii) タイプ 2：保険 1 から得られる期待効用は

$$3350 \times \frac{4}{5} + 2550 \times \frac{1}{5} = 3190 > 3000$$

保険 2 から得られる期待効用は

$$3558 \times \frac{4}{5} + 1622 \times \frac{1}{5} \approx 3171$$

であるからこれらの人々は保険 1 を購入する。

以上のような保険を販売すれば保険会社が個々人のタイプを見抜けなくても本人の行動によってそのタイプが明らかになるように仕向けることができる。このように情報が非対称な状況において情報を持っていない側（この例では保険会社）が保険商品などの仕組みを工夫してその情報が間接的に表されるように

する行動をスクリーニング (screening) と呼ぶ[1]。この保険ではそれぞれのタイプの人々が事故を起こす確率を考えると保険会社の採算に問題はない。この例ではタイプ 1 とタイプ 2 の人々が異なる効用関数を持っていると仮定した。つまりタイプ 2 の方がリスクが大きく，かつより危険回避的であると仮定していた。しかし両タイプが同じ効用関数を持っていてもリスクが異なればスクリーニングが可能となる場合もある。上の問題はそうである。**（解説ここまで）**

47. 生産関数 $x = \sqrt{LK}$（x は産出量，L，K は労働，資本投入量）から等産出量曲線（等量曲線）を導け。

48. 等産出量曲線とは何を表すものか？またそれは右上がりか，右下がりか？なぜそうなるか？

49. 同じ財の 2 つの等産出量曲線（等量曲線）は交わってはならない。なぜか？

50. 異なる 2 つの財の等産出量曲線を同じ図に描いたとき，それらは交わってもよい。そのとき 2 つの等産出量曲線の傾きの大きさの違いが意味することを説明せよ？

51. 企業の費用最小化問題において賃金率が高くなったときの生産方法の変化を図示して説明せよ。

52. 企業の費用最小化問題において資本レンタル（資本の報酬）が高くなったときの生産方法の変化を図示して説明せよ。

53. 「労働」と「資本」が企業の生産要素であると見なしたとき，資本の価格とは何を指すと考えられるかを述べよ。

54. 限界費用が平均費用より大きいときに産出量の減少（増加ではなく）によって平均費用はどうなるか？理由を含めて説明せよ。小さいときはどうか？

55.
$$C(x) = 2x^2 + 4x + 100$$
で表される費用関数を持つ企業について財の価格が 36 のときの利潤を最大にする産出量とそのときの利潤を微分を用いずに求めよ（わからなければ微分を用いてもよい）。x は産出量であり，完全競争を前提とする。

56. 完全競争市場において財を生産・販売しているある企業の費用関数が
$$c = x^3 - 4x^2 + 3x + 3 \ (x \text{ は産出量})$$
であるとする。またこの企業の財の価格は 19 である。

[1]スクリーニング (screening) とはふるい分けをすることを意味する。

(i) 利潤を最大化する産出量を求めよ。

(ii) 1 単位当りある額の従量税が課されたとき産出量が 1 減る場合，その従量税がいくらであるか求めよ。

57. 完全競争における企業の利潤を次のように表す。

$$\pi = px - wL - rK$$

$$\text{ただし } x = 4L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{2}{3}} \text{ (生産関数)}$$

x： 財の産出量，p： 財の価格，L： 労働投入量，K： 資本投入量： w： 賃金率，r： 資本レンタル（資本の価格）

(i) 利潤を最大にする L，K の値，およびそのときの利潤を求めよ。

(ii) 利潤を最大にするような労働，資本の投入量と財の産出量を $\tilde{L}(p,w,r)$，$\tilde{K}(p,w,r)$，$\tilde{x}(p,w,r)$ と表す。またそのときの利潤を $\tilde{\pi}(p,w,r)$ と表す。このとき

$$\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial p} = \tilde{x}(p,w,r),\ \ \frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial w} = -\tilde{L}(p,w,r),\ \ \frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial r} = -\tilde{K}(p,w,r)$$

が成り立つことを示せ（ホテリングの補題)。

58. ある企業の短期費用関数が

$$c = (4x - K)^3 + K^3 + 4 \text{（} K \text{ は生産設備）}$$

であるとする。K は短期には調整できないが長期には調整可能である（調整費用はかからない)。この企業の長期費用関数を求めよ。

59. ある企業の短期の費用が

$$C(x) = 4K + \frac{x^2}{K}$$

で表されるとき，長期の費用関数を求め，短期の費用，長期の費用の関係を図を描いて説明せよ。K は生産設備の大きさ，x は産出量である。

60. 完全競争市場における長期均衡とはどのような状態を指すか，図を描いて説明せよ。また，その長期均衡において企業の株主はどのような状態に置かれているかを述べよ。

61. 独占企業にとっての価格と限界収入の違いを言葉および図で説明せよ。

62. 独占企業と完全競争における企業の行動の違いについて言葉で説明せよ。

63.

$$C(x) = 3x^2 + 200$$

で表される費用関数を持つ独占企業について，財の需要曲線が次のように与えられるとき利潤を最大にする産出量とそのときの利潤の大きさを微分を用いずに求めよ。

$$p = 300 - 2x$$

64. 「独占的競争」の意味を述べるとともにその均衡を図示し，均衡において限界費用曲線がどのような形になっていなければならないかを理由を含めて説明せよ。

65. 独占的競争と完全競争の共通点および相違点について説明せよ。

66. X 財を生産する競争的な企業 A があり財の価格は 120，費用関数は産出量を x として

$$c_A = 2x^2$$

で表される。一方 Y 財を生産する競争的な企業 B があって財の価格は 150，費用関数は産出量を y として

$$c_B = 2y^2 + xy$$

であるとする。

(i) 各企業が利潤を最大化するときの産出量を求めよ。

(ii) 両企業の利潤の合計を最大化するような各企業の産出量を求めよ。

(iii) (ii) の状態を実現するのに必要な企業 A に対する産出量 1 単位当りの税を求めよ。

67.

$$p = 32 - X$$

で表される需要関数のもとでのクールノーの複占モデルにおいて，企業 A の費用が $c(x) = 3x$，企業 B の費用が $c(y) = y$ で表される場合の各企業の産出量を求め，反応曲線を図示せよ。x，y は企業 A，B の産出量であり，X はその和である。

68. n 社の企業が同質財を生産するクールノーの寡占モデルを考える。n は正の整数である。各企業を企業 i と表す。需要関数は

$$p = 26 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i$$

で表されるものとする。x_i は企業 i の産出量，p は財の価格である。また企業 i の費用関数は

$$c = 2x_i + f,\ f > 0$$

であり，すべての企業に共通であるとする。f は生産しなくても必要となる固定費用である。

(i) 企業 i の利潤を最大化する産出量を求めよ。

(ii) 企業の利潤がゼロとなるような n の値を求め（この n は長期均衡における企業数である），f とその n の値の関係を調べよ。

(iii) 企業数が (ii) の n のときの財の価格を求めよ。f が 0 に近づくとどうなるか？

均衡においてすべての企業の産出量が等しくなることを用いてもよい。

69. 独占とクールノーの寡占における企業行動の違いについて説明せよ。

70. 差別化された財を生産する 2 つの企業 A，B がある。それぞれの産出量，価格を x_A，x_B，p_A，p_B とする。逆需要関数が

$$p_A = 36 - 2x_A + 2kx_B$$

$$p_B = 36 - 2x_B + 2kx_A$$

であり，企業 A，B の費用が

$$c_A = x_A$$

$$c_B = 2x_B$$

で表される。$k = \frac{1}{2}$ の場合と $k = -\frac{1}{2}$ の場合について，クールノー均衡とベルトラン均衡における各企業の産出量，価格を求めよ。

71. 差別化された財を生産する 2 つの企業 A，B がある。それぞれの産出量，価格を x_A，x_B，p_A，p_B とする。逆需要関数が

$$p_A = 36 - 2x_A + x_B$$

$$p_B = 36 - 2x_B + x_A$$

であり，企業 A，B の費用はともにゼロであるとする。このときクールノー均衡とシュタッケルベルク均衡（企業 A がリーダー，B がフォローワーとする）における各企業の産出量と利潤を求めよ。

72. ある財の 2 つの地域 1，2 での需要がそれぞれ次のように表される。

$$d_1 = 400 - p_1,\ d_1 \text{は地域 1 での需要},\ p_1 \text{は価格}$$

$$d_2 = 600 - 2p_2,\ d_2 \text{は地域 2 での需要},\ p_2 \text{は価格}$$

1 つの企業が独占的に両地域に財を供給しているとき，利潤を最大化する各地域での価格，供給量を求めよ。ただしこの企業の費用関数は

$$c = \frac{2x_1^2 + x_2^2}{2},\ x_1,\ x_2 \text{は各地域での供給量}$$

である。

73.

$$X \text{ 財の限界代替率} > \frac{X \text{ 財の限界費用}}{Y \text{ 財の限界費用}}$$

が成り立つ状態において Y 財の生産・消費の減少による X 財の生産・消費の増加が消費者の効用を増加させることを確認せよ。

74. 2 財 X，Y，2 人の消費者 A，B，1 つの企業からなる経済を考える。個人 A は以下のような特徴を持つ。

効用関数は $u_A = xy^2$, X 財の初期保有量は 200, Y 財の初期保有量は 0

個人 B は以下のような特徴を持つ。

効用関数は $u_B = x^2 y$, X 財の初期保有量は 100, Y 財の初期保有量は 0

x，y は各財の消費量を表す。企業は X 財を入力して Y 財を生産し，その生産関数は

$$y = 20\sqrt{2}\sqrt{x},\ x \text{ は } X \text{ 財の投入量},\ y \text{ は } Y \text{ 財の産出量}$$

である。また企業の利潤は 2 人の個人に均等に配分されるものとする。

(i) X 財，Y 財の価格を p_x，p_y としてこの企業の利潤を表し，利潤を最大化する X 財の投入量，Y 財の産出量，およびそのときの利潤を p_x，p_y で表せ。

(ii) 個人 A，B それぞれについて予算制約式（配分される企業の利潤，初期保有量の売却収入を含めて）を書き，p_x，p_y の価格のもとでの（初期保有量を含む）X 財，Y 財の需要を p_x，p_y で表せ。

(iii) 需要と供給を均衡させる価格を求めよ。企業の X 財投入量は需要であり，X 財の供給は 2 人の人々の初期保有量のみである。Y 財の供給はもちろん企業の産出量に等しい。

75. ある企業の生産関数を $x = L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}}$（$x$ は財の産出量，L，K は労働，資本の投入量），賃金率，資本レンタルをそれぞれ w，r とする。産出量 x が 4 のときの費用最小化問題を解き，それが費用最小化であることを確認せよ。

また，上の計算で求めた労働，資本投入量から費用関数を導き，シェパードの補題が成り立つことを確認せよ。

76. ある企業の生産関数を $x = L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}}$（$x$ は財の産出量，L，K は労働，資本の投入量），賃金率，資本レンタルをそれぞれ w，r とする。産出量 x が $\bar{x}$ のときの費用最小化問題を解き，それが費用最小化であることを確認せよ。

また，上の計算で求めた労働，資本投入量から費用関数を導き，シェパードの補題が成り立つことを確認せよ。

77. n 社からなるクールノー的な寡占を考える。p を財の価格，X を全企業の産出量の合計，需要関数を $p = 240 - 3X$，各企業の共通の費用関数を $c_i = x_i^2 + 100$（x_i は各企業の産出量）として各企業の利潤を最大にする産出量を求めよ。また n の値が非常に大きい値になって行くとき n 社の産出量の合計はどのような値に近づいて行くか？さらに財の価格がどのような値に近づいて行くかについても答えるとともに，費用関数が $c_i = 3x_i$ のときにも同じ問題を解け。

78. 表のゲームにおける各プレイヤーの純粋戦略に限定した最適反応を求めよ。さらに（存在すれば）純粋戦略に限定したナッシュ均衡を求めよ。

		プレイヤーB	
プレイヤーA		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	1, 1	3, 4
	戦略 Y	4, 2	0, 2

79. ある公共財の供給を巡るゲームを考える。2 人のプレイヤー A と B がいて，公共財の需要を大きくする（大）か小さくする（小）かを政府に申告する。申告した需要に基づいて費用負担が決められる。ともに「大」を選べば十分な公共財が供給されるが，一方が「大」他方が「小」が選んだ場合は「小」を選んだプレイヤーは少ない負担である程度の公共財を得ることができる。利得表は次のように表される。

		プレイヤーB	
プレイヤーA		大	小
	大	a, a	$2, b$
	小	$b, 2$	5, 5

このゲームが「囚人のジレンマ」となるように a，b の値を決め，最適反応，ナッシュ均衡を分析せよ。

80. 前問と同様の公共財の供給を巡るゲームを考える。ともに「大」を選べば十分な公共財が供給され，一方が「大」を選んだ場合も公共財が供給されるがその量は少ない。利得表は次のように表される。

プレイヤーB

プレイヤーA	大	小
大	a, a	c, b
小	b, c	2, 2

このゲームにおいてともに「大」を選ぶ戦略の組がナッシュ均衡となるように a，b，c の値を決めよ。

81. 表のゲームの純粋戦略に限定したナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤーB

プレイヤーA	戦略 X	戦略 Y
戦略 X	3, 3	6, 2
戦略 Y	2, 3	4, 5

82. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤーB

プレイヤーA	戦略 X	戦略 Y
戦略 X	3, 2	3, 4
戦略 Y	3, 4	2, 3

83. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤーB

プレイヤーA	戦略 X	戦略 Y
戦略 X	2, 4	3, 2
戦略 Y	4, 2	2, 3

84. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤーB

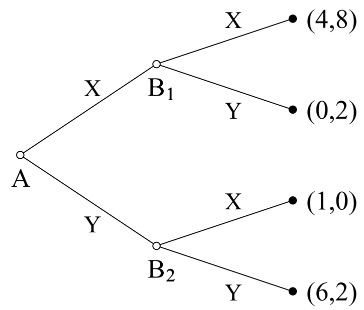
プレイヤーA	戦略 X	戦略 Y
戦略 X	3, 4	2, 2
戦略 Y	2, 2	4, 3

85. 表のゲームにおいて，Bの方が先に戦略を選ぶことができる場合のナッシュ均衡，部分ゲーム完全均衡を求めよ。ゲームの樹ではなく標準型ゲーム（行列表記）を用いて求めること。

		プレイヤーB	
プレ		戦略 X	戦略 Y
イヤ	戦略 X	1, 1	2, 4
ーA	戦略 Y	4, 2	1, 1

86. 上のゲームにおいて，Aの方が先に戦略を選ぶことができる場合の部分ゲーム完全均衡をゲームの樹を描いて求めよ。

87. 次の図のゲームの部分ゲーム完全均衡における各プレイヤーの戦略を求め，その理由を説明せよ。



A はプレイヤーAが，B_1，B_2 はプレイヤーBが意思決定する時点を表している。

88. アメリカとロシアの核戦略を巡る次のゲームの混合戦略を含めたすべての均衡を求めよ。

		アメリカの戦略	
ロの		持つ	持たない
シ戦	持つ	-8, -8	3, -12
ア略	持たない	-12, 3	6, 6

このゲームはいわゆる「協調ゲーム」の例である。

89. アメリカとロシアの核戦略を巡る次のゲームの混合戦略を含めたすべての均衡を求めよ。

		アメリカの戦略	
ロの		持つ	持たない
シ戦	持つ	-18, -18	8, -12
ア略	持たない	-12, 8	6, 6

このゲームはいわゆる「チキンゲーム」の例である。

90. 2 つの企業 1，2 からなる寡占を考える。それらの産出量を x_1，x_2 として逆需要関数が

$$p_1 = 24 - 2(x_1 + kx_2),\ 0 < k < 1$$

$$p_1 = 24 - 2(x_2 + kx_1),\ 0 < k < 1$$

で表される。企業 1 の方が先に産出量を決められる場合の部分ゲーム完全均衡を求めよ。またそのときの各企業の利潤を比較せよ。x_1，p_1，x_2，p_2 はそれぞれ企業 1 が生産する財の産出量，価格，企業 2 が生産する財の産出量，価格である。企業の費用は 0 とする。

91. 2 つの企業 1，2 が差別化された財を生産する寡占を考える。それらの産出量と価格を x_1，x_2，p_1，p_2 として需要関数が

$$x_1 = 36 - 2p_1 + p_2$$

$$x_2 = 36 - 2p_2 + p_1$$

であるとする。また費用は 0 とする。

(i) 2 つの企業が同時に価格を決めるベルトラン的な均衡を求めよ。

(ii) 企業 1 の方が先に価格を決められる場合の部分ゲーム完全均衡を求めよ。また，そのときの各企業の利潤を求めよ。

92. 2 人のプレイヤーによるある美術品をめぐるシールドビッド・ファーストプライス・オークションを考える。それぞれの評価 v_1，v_2 が 1 から 2 までの一様分布となっているとき次の戦略（入札額）の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることを証明せよ。

$$p_1 = \frac{v_1 + 1}{2},\ p_2 = \frac{v_2 + 1}{2}$$

p_1，p_2 は各プレイヤーの入札額である。各プレイヤーは相手の評価を正確には知らないが上で示したような一様分布であることは知っている。

93. 上のゲームで v_1，v_2 が 2 から 5 までの一様分布となっているとき次の戦略（入札額）の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることを証明せよ。

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1,\ p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$$

94. 以下の解説 2-2 に沿って第 92 問のベイジアン・ナッシュ均衡が $p_1 = \frac{v_1+1}{2}$，$p_2 = \frac{v_2+1}{2}$ であることを示せ。

95. 以下の解説 2-2 に沿って第 93 問のベイジアン・ナッシュ均衡が $p_1 = \frac{v_1}{2}+1$，$p_2 = \frac{v_2}{2}+1$ であることを示せ。

解説 2-1：シールドビッド・ファーストプライス・オークション　ある美術品を巡るオークションを取り上げる。オークションと言っても公開の場で行われるものではなく，密封した封筒に自分がつける価格を書いて提出するシールドビッド・オークション (sealed-bid auction)（入札）を考える。2 人の人，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 がこのオークションに参加し，入札額の高い方の人がその価格で購入する。各プレイヤーがこの美術品から得る価値は v_1（億円）と v_2（億円）であるが，それぞれ相手がどのような評価をしているかはわからない。各々の評価はこの美術品をいくらで買う気持ちがあるかということを表す[2]。v_1，v_2 は 0 から 1 までのあらゆる値（実数値）をとる可能性があり，またどのような値も同じ確率で起きるものとする。このような確率分布は一様分布 (uniform distribution) と呼ばれる。一様分布においては，例えば v_1 が 0.2 から 0.5 までの値をとる確率は $\frac{0.5-0.2}{1-0} = 0.3$ となる。他も同様である。厳密に 0.2 となる確率は 0 であり，常にある範囲の値をとる確率を考える。各プレイヤーにとって相手の評価は正確にはわからないが上記のような確率分布であることは知っているものとする。このゲームでは両方のプレイヤーが情報の非対称性に直面している。入札に勝ったときの利得は自分の美術品に対する評価額と入札額（支払額）の差に等しく，負けたときの利得は 0 である。一様分布の仮定によって 2 人の入札額が等しくなる確率は 0 である。各プレイヤーは不確実（確率的）な状況で戦略を選択するので期待利得を最大化するように戦略を選ぶ。各プレイヤーの入札額を p_1，p_2 で表し，以下のような戦略の組がナッシュ均衡であることを証明しよう。

$$p_1 = \frac{v_1}{2},\ p_2 = \frac{v_2}{2}$$

v_1，v_2 は各プレイヤーのタイプを表すものと考えることができる。それぞれのタイプのプレイヤーがどのような戦略を選ぶかを決めなければならない。この戦略の組がナッシュ均衡であることを示すには，各プレイヤーにとって相手がこの戦略を選んでいるときに自分もそれを選ぶことが最適であることを示せばよい。

プレイヤー 1 が上記の戦略を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が戦略（入札額）p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > \frac{v_1}{2}$ となる場合であるが，一様分布の仮定により $\frac{v_1}{2}$ は 0 から 0.5 までの値を等しい確率でとる（$0 \leqq v_1 \leqq 1$ であるから）。したがって $0 \leqq p_2 \leqq 0.5$ として入札に勝つ確率は $\frac{p_2}{0.5} = 2p_2$ である[3]。$p_2 > 0.5$ の入札をしても勝つ確率は上がらず（$p_2 = 0.5$ で勝つ確率は 1 になる）支払額が増えるだけなのでそのような入札は行わない。勝ったときの利得は $v_2 - p_2$ で

[2]買ってから転売するつもりであれば，同じような情報を持っている限り両者の評価が異なることはないであろう。評価が異なるとすれば各プレイヤーにとっての価値は自分で鑑賞して得られる効用を金額で表したものと見なされる。

[3]負ける確率は $\frac{0.5-p_2}{0.5} = 1 - 2p_2$ である。

あるから期待利得は

$$2p_2(v_2 - p_2) = -2(p_2^2 - p_2 v_2)$$

となる。これは p_2 の二次関数なので最大値を求める手法により（微分してもよいが)

$$-2\left[\left(p_2 - \frac{v_2}{2}\right)^2 - \frac{v_2^2}{4}\right]$$

と変形され期待利得を最大化する入札額は

$$p_2 = \frac{v_2}{2}$$

と求まる。プレイヤー 1 と 2 を入れ替えると同様の議論によって

$$p_1 = \frac{v_1}{2}$$

が得られる。以上によって上記の戦略の組がナッシュ均衡であることが示された。このゲームのように情報が非対称な静学的ゲームで相手のタイプについての確率的な推測にもとづいて各プレイヤーが期待利得を最大化する戦略を選ぶナッシュ均衡は，**ベイジアン均衡**あるいは**ベイジアン・ナッシュ均衡**と呼ばれる。

解説 2-2：ファーストプライス・オークションの均衡について　プレイヤー 2 の入札額を

$$p_2 = p_2(v_2)$$

とする。この逆関数を

$$v_2 = g_2(p_2)$$

と表す。例えば $p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$ ならば $g_2(p_2) = 2p_2 - 2$ である。プレイヤー 1 の入札額を p_1 とすると落札する確率（$p_1 > p_2$ となる確率）は $g_2(p_1)$ に等しい(一様分布の仮定によって)。そのとき期待利得は

$$(v_1 - p_1)g_2(p_1)$$

となる。これを p_1 で微分してゼロとおくと

$$(v_1 - p_1)g_2'(p_1) - g_2(p_1) = 0$$

が得られる。プレイヤー 1 の入札額 $p_1 = p_1(v_1)$ がこの式を満たすことが均衡の条件となる。プレイヤー 1 と 2 が同一の行動をとるとすると $p_2(v_2)$ と $p_1(v_1)$ が同じ関数になるのでそれらの逆関数 $g_2(p_2)$ と $v_1 = g_1(p_1)$ も同じ関数とな

り，微分も同じ関数になる。したがって $g'_2(p_1) = g'_1(p_1)$ が得られるから上の式は

$$(v_1 - p_1(v_1))g'_1(p_1) - g_1(p_1) = 0$$

と書き直される。さらに逆関数の微分の関係より[4],

$$g'_1(p_1) = \frac{1}{p'_1(v_1)}$$

であるから，$g_1(p_1) = v_1$ と合わせて

$$(v_1 - p_1(v_1))\frac{1}{p'_1(v_1)} - v_1 = 0$$

が導かれ，これを整理して

$$(v_1 - p_1(v_1)) - v_1 p'_1(v_1) = 0 \tag{1}$$

を得る。この式を満たす関数 $p_1(v_1)$ は

$$p_1 = \frac{v_1}{2}$$

である。実際 $p'_1 = \frac{1}{2}$ であるから上の式に代入すると

$$(v_1 - \frac{v_1}{2}) - \frac{1}{2}v_1 = 0$$

が成り立つ（この計算は微分方程式を解くことに相当する)。

微分方程式のいくらか正式な解法　関数の微分を含む方程式が微分方程式である。

$$x(v_1) = v_1 p_1(v_1)$$

とおくと

$$x'(v_1) = p_1(v_1) + v_1 p'_1(v_1)$$

であるから (1) は次のように書き直される。

$$v_1 - x'(v_1) = 0 \text{ すなわち } x'(v_1) = v_1$$

したがって微分の公式を逆に用いて（つまり積分の公式）

$$x_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1^2 + C$$

[4] $g'_1(p_1)$ は $\frac{\Delta v_1}{\Delta p_1}$ から得られ，$p'_1(v_1)$ は $\frac{\Delta p_1}{\Delta v_1}$ から得られ，

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta p_1} = \frac{1}{\frac{\Delta p_1}{\Delta v_1}}$$

が成り立つから。

が得られる（C は定数）。これにより

$$p_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{C}{v_1}$$

となる。定数 C は（x を）微分すると消えるので微分方程式の条件だけでは正確に再現できないが，オークションの意味を考えることによって決めることができる。v_1 がごく小さいときにはこの美術品に価値を感じないので p_1 もほとんど 0 になる。よって $C = 0$ でなければならない。以上から

$$p_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1$$

が求まる。**（解説ここまで）**

96. 表のゲームを永遠に繰り返すとき以下で述べるトリガー戦略が部分ゲーム完全均衡となるために割り引き因子または割り引き率が満たすべき条件を求めよ。

プレイヤーB

プレイヤーA		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	3, 3	0, 6
	戦略 Y	6, 0	1, 1

解説 3　次のゲームを繰り返すような動学的ゲームを考える。

プレイヤーB

プレイヤーA		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	5, 5	1, 7
	戦略 Y	7, 1	2, 2

このゲームを静学的なゲームと見た場合のナッシュ均衡は，ともに「戦略 Y」を選ぶ戦略の組である。このゲームを無限に繰り返すとすると毎回両者が「戦略 X」を選ぶような戦略の組が部分ゲーム完全均衡となる可能性がある。プレイヤー A，プレイヤー B が次の戦略を選ぶとする。このような戦略はトリガー（引き金）戦略と呼ばれる。

> **まず最初に「戦略 X」を選ぶ。2 回目以降は前回相手が「戦略 X」を選んでいれば「戦略 X」を，「戦略 Y」を選んでいればそれ以降は永遠に「戦略 Y」を選ぶ。**

両者が「戦略 X」を選んでいれば永遠に「戦略 X」が続き両プレイヤーは毎回 5 の利得を得る。一方のプレイヤーから見て相手が「戦略 X」を選んでいる状況において 1 度「戦略 Y」を選ぶと利得 7 を実現できるが，それ以降は相手が

「戦略 Y」に転じるので自分も「戦略 Y」を選ぶのが最適となり永遠にその状態が続くから利得は毎回 2 となる。そこで問題になるのは相手を出し抜いて「戦略 Y」を選んで実現される利益と，それ以降利得 2 になってしまうことによる損失との比較である。もしプレイヤーが将来の利得を割り引いて考えないのであれば「戦略 Y」を選ぶことは絶対に利益にはならない。すなわちともに「戦略 X」を選ぶカルテル状態が実現できるが，プレイヤーが将来の利得を割り引く場合は「戦略 Y」を選ぶことが利益になる可能性がある。割引因子 (discount factor) を δ とすると「戦略 Y」を選ぶことが絶対に利益にならない条件は次の通りである[5]。

$$5[1+\delta+\delta^2+\cdots] > 7+2[\delta+\delta^2+\cdots]$$

これより

$$\frac{5}{1-\delta} > 7+\frac{2\delta}{1-\delta}$$

が得られ

$$\delta > 0.4$$

が求まる。したがって割引因子が 0.4 より大きければ（それ以上に割り引かなければ），ともに上記のトリガー戦略を選ぶことが部分ゲーム完全均衡となり「戦略 X」を選ぶ状態が永遠に続く。割引率 (discount rate) r を $\frac{1}{1+r}=\delta$ と定義するとこの条件は $r<\frac{3}{2}$ となる。つまり割引率が 150%より小さければともにトリガー戦略を選ぶことが部分ゲーム完全均衡となる。

より罰則の弱い部分ゲーム完全均衡　トリガー戦略よりも罰則の弱い部分ゲーム完全均衡をもたらす戦略もある。互いに次のような戦略を選ぶものとする。

> まず最初に「戦略 X」を選ぶ。相手が「戦略 X」を選べば次の回では自分も「戦略 X」を選ぶ。ゲームのどこかで相手が「戦略 Y」を選んだらその後 2 回は自分も「戦略 Y」を選び，3 回目以降は（その 2 回のゲームでの相手の戦略に関わらず）再び「戦略 X」を選ぶ。以下同様。

両者が「戦略 X」を選んでいれば永遠に「戦略 X」が続き両プレイヤーは毎回 5 の利得を得る。相手が「戦略 X」を選んでいる状況において 1 度「戦略 Y」を選ぶと利得 7 を実現できるが，それ以降は 2 回だけ相手が「戦略 Y」に転じる

[5] 等比数列の和の公式によれば

$$5[1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{n-1}] > 7+2[\delta+\delta^2+\cdots\delta^{n-1}]$$

を満たす条件は

$$\frac{5(1-\delta^n)}{1-\delta} > 7+\frac{2\delta(1-\delta^{n-1})}{1-\delta}$$

である。$n\to\infty$（n が限りなく大きくなる）とすると $\delta^n\to 0$，$\delta^{n-1}\to 0$ なので本文の式が得られる。

のでその間は自分も「戦略Y」を選ぶのが最適となる。3回目には相手が「戦略X」に転じるがそのとき自分がどうすべきかはそこまでの「戦略Y」を選ぶ3回のゲームでの利得による。それが3回とも「戦略X」を選んで協力するときの利得よりも大きければ「戦略Y」を続けるのが最適であり，その場合は相手が「X」「Y」「Y」を繰り返し，自分は「Y」を選び続ける。一方，逆に「戦略X」を選んで協力するときの利得の方が大きければそもそもこのような裏切りをしないことが最適となり，ともに「戦略X」を選ぶ協力関係が実現する。そのようになる条件を求める。3回のゲームで相手が「X」「Y」「Y」を選ぶときの（割引を含めた）自分の利得は

$$7 + 2\delta + 2\delta^2 \tag{2}$$

であり，互いに「X」を選び続けるときの（割引を含めた）自分の利得は

$$5(1 + \delta + \delta^2) \tag{3}$$

である。(3) が (2) より大きくなる条件は $3\delta + 3\delta^2 > 2$ であり，この式から

$$\delta > 0.46$$

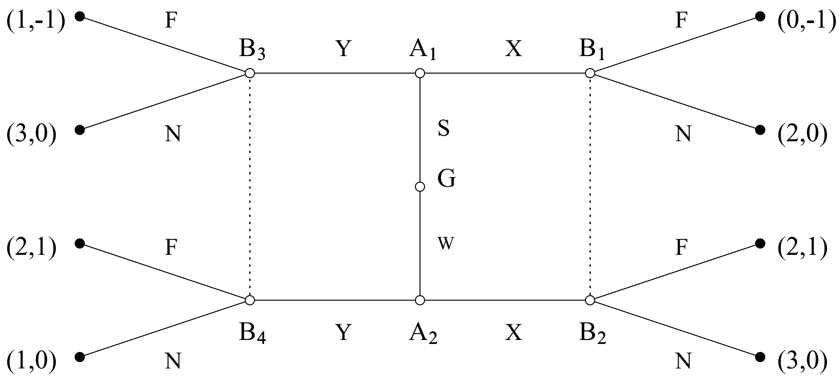
が得られる。これはトリガー戦略の場合の $\delta > 0.4$ よりも厳しい条件となっている。ここの戦略では裏切りに対する罰則が弱くなっているので協力が実現しにくくなるのである。

なお繰り返しの回数が無限ではない（有限回）とすると，常に戦略Yを選ぶ戦略のみが部分ゲーム完全均衡となる。なぜならば，最後のゲームではともに戦略Yを選ぶことがわかるのでその前のゲームで戦略Xを選んでも得られるものがなく戦略Yを選ぶ。その前のゲームでも戦略Xを選んでも得られるものがないので戦略Yを選ぶ。というように考えていくと，結局すべての段階でともに戦略Yを選ぶことになるからである。**（解説ここまで）**

97. 前問のゲームにおいて次の戦略が部分ゲーム完全均衡となるために割り引き因子が満たすべき条件を求めよ。

    まず最初に「戦略X」を選ぶ。相手が「戦略X」を選べば次の回では自分も「戦略X」を選ぶ。ゲームのどこかで相手が「戦略Y」を選んだらその後2回は自分も「戦略Y」を選び，3回目以降は再び「戦略X」を選ぶ。以下同様。

98. 図に表されているような不完備情報ゲームを考える。プレイヤーはA，B，プレイヤーAのタイプはS，W，行動の選択肢はX，Y，プレイヤーBの行動の選択肢はF，Nとし，ゲーム開始前に「プレイヤーBは，プレイヤーAが確率2/3でタイプSであり，確率1/3でタイプWであるという推測を抱いてる」とする。プレイヤーの戦略やタイプの意味は問わない。



このゲームには次の 2 つの完全ベイジアン均衡がある。

完全ベイジアン均衡 1(separating 均衡)

(i) タイプ S のプレイヤー A は Y を，タイプ W のプレイヤー A は X を選ぶ。

(ii) プレイヤー A が Y を選んだときはプレイヤー B は戦略 N を選び，X を選んだときには戦略 F を選ぶ。

(iii) 『プレイヤー A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率は 1 であり，プレイヤー A が X を選んだときそれがタイプ S である確率はゼロである』という推測をプレイヤー B が持つ。

完全ベイジアン均衡 2(pooling 均衡)

(i) タイプ S のプレイヤー A もタイプ W のプレイヤー A も X を選ぶ。

(ii) プレイヤー A が Y を選んだときはプレイヤー B は戦略 F を選び，X を選んだときには戦略 N を選ぶ。

(iii) 『プレイヤー A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率は 1/2 より小さく（タイプ W である確率は 1/2 より大きい），プレイヤー A が X を選んだときそれがタイプ S である確率は 2/3 である』との推測をプレイヤー B が持つ。

以下の問に答えよ。

(i) それぞれの均衡が完全ベイジアン均衡であることを示せ。

(ii) それぞれが合理的な均衡であるかどうかを調べよ。

(iii) タイプ S のプレイヤー A もタイプ W のプレイヤー A も Y を選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。

(iv) タイプSのプレイヤーAがXを，タイプWのプレイヤーAがYを選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。

解説 4

完全ベイジアン均衡

(i) プレイヤーAの戦略はプレイヤーBの戦略に対して最適反応になっている。

(ii) プレイヤーBの戦略は，プレイヤーAが選ぶ戦略に対してプレイヤーBが抱く（プレイヤーAがどの程度の確率でどのタイプであるかという）推測のもとで最適反応になっている。

(iii) プレイヤーAが選ぶ戦略に対してプレイヤーBが抱く推測は，ゲームが始まる前のプレイヤーBの推測とプレイヤーAの均衡戦略に対して整合的な (consistent)（矛盾しない）ものである。

完全ベイジアン均衡の合理性の条件 以下の条件が満たされているときには，プレイヤーBは，均衡戦略とは異なるある戦略を選ぶプレイヤーAがタイプWである確率はゼロである（タイプSである確率は1である）という推測を持つべきである。また，そうではない推測にもとづいて成立している完全ベイジアン均衡は合理的な均衡ではない。

(i) タイプWのプレイヤーAが均衡戦略とは異なるある戦略を選んで得られる**利得の最大値が均衡戦略によって得られる利得より小さい**。

(ii) 一方，タイプSのプレイヤーAがその戦略を選んで得られる利得の最大値は均衡戦略によって得られる利得より大きい。

この条件の中でタイプSとタイプWの関係が逆の場合には，タイプSである確率はゼロであるという推測を持つべきであるということになる。**（解説ここまで）**

99. 大学の入学試験や企業の就職試験における「指定校」の取り扱いについてシグナリングゲームの理論にもとづいて考えてみよ。

100. 表のゲームの進化的に安定な戦略を求めよ。

		個体2の戦略	
		戦略X	戦略Y
個体1の戦略	戦略X	4, 4	10, 1
	戦略Y	1, 10	6,6

解説 5

進化的に安定な戦略 ある戦略（戦略 A とする）をすべての個体が選んでいるとして，突然変異によって別の戦略（戦略 B とする）を選ぶ個体がわずかに現れたとする。そのとき，戦略 A から得られる適応度（利得の期待値）が戦略 B から得られる適応度よりも大きいときに，戦略 A は**進化的に安定な戦略 (evolutionarily stable strategy)** であると言う。ゲームは対称的で個体数は無限大であると仮定する[6]。

もしそうでなければ突然変異の個体の方が多くの子孫を残し，戦略 A はやがて消えていってしまう。上の定義を式で表してみよう。ある戦略 I を選ぶ個体が戦略 J を選ぶ個体と対戦したときに得られる期待利得を $E(I, J)$ という記号で表す。戦略 A を選ぶ個体の割合が $1 - p$，戦略 B を選ぶ個体の割合が p のとき，戦略 A を選ぶ個体は $1 - p$ の割合で同じ戦略 A を選ぶ個体と対戦し，p の割合で戦略 B を選ぶ個体と対戦するから，戦略 A を選ぶ個体が得る期待利得は

$$(1-p)E(A, A) + pE(A, B) \tag{4}$$

で表される。同様にして戦略 B を選ぶ個体の期待利得は

$$(1-p)E(B, A) + pE(B, B) \tag{5}$$

となる。戦略 A が進化的に安定な戦略であるというのは，A 以外のあらゆる戦略 B について (4) が (5) より大きいということである。したがって

$$(1-p)E(A, A) + pE(A, B) > (1-p)E(B, A) + pE(B, B)$$

より

$$(1-p)[(E(A, A) - E(B, A)] + p[E(A, B) - E(B, B)] > 0 \tag{6}$$

が得られる。多数の集団の中でのわずかな突然変異を考えるので p は非常に小さい値であるから (6) は次のように書き直すことができる。

$$E(A, A) \geqq E(B, A) \text{ であり} \tag{7}$$

$$\text{もし } E(A, A) = E(B, A) \text{ ならば } E(A, B) > E(B, B) \tag{8}$$

(7) は戦略 A がそれ自身（相手の戦略 A）に対して最適反応であるという条件であるから，対称なゲームにおけるナッシュ均衡の条件になっている。つまり進化的に安定な戦略はナッシュ均衡をなす戦略であるということがわかる。しかし進化的に安定な戦略であるためにはさらに (8) の条件をも満たさなければならないので，ナッシュ均衡をなす戦略が必ずしも進化的に安定な戦略である

[6]戦略の意味などについては以下の例を参照していただきたい

とは限らない。(8) は戦略 A が戦略 B との対戦において戦略 B 自身よりもよい結果をもたらすことを意味する。すなわち戦略 B はそれ自身に対する最適反応にはならないということである。なお (7) が厳密な不等式で満たされている場合は (8) の不等式は満たされていなくてもよい[7]。

次の表で表されるゲーム（これはタカ・ハトゲームと呼ばれる）の進化的に安定な戦略を考えてみる。

		個体 2 の戦略	
		戦略 H	戦略 D
個体 1 の戦略	戦略 H	$\frac{1}{2}(V-C), \frac{1}{2}(V-C)$	$V, 0$
	戦略 D	$0, V$	$\frac{1}{2}V, \frac{1}{2}V$

このゲームでは戦略は各個体の遺伝子に組み込まれている何らかの性質であり，ゲームに臨んで選ばれるのではない。また利得は環境への適応度を表すものと見ることができる。したがってこのゲームにおいては，プレイヤーの合理的な意思決定として戦略が選択されるのではなく，ある性質を持った個体が環境に適応していれば多くの子孫を残しその性質を持ったものが増えていく，というようなプロセスを考える。

まず，純粋戦略としての戦略 D は進化的に安定な戦略にはなりえない。なぜならば

$$E(D,D) = \frac{1}{2}V < E(H,D) = V$$

であるから，戦略 D からなる集団は戦略 H の進入を許す，つまり突然変異で出現した戦略 H の方が大きい利得を得ることになり戦略 D は安定ではない。

V と C の値の関係によって 2 つのケースに分けられる。

(i) **$V \geqq C$ の場合** このケースでは戦略 H が進化的に安定な戦略である。なぜならば $E(H,H) = \frac{1}{2}(V-C) \geqq 0$，$E(D,H) = 0$ であるから (7) で戦略 A として戦略 H，戦略 B として確率 q ($0 \leqq q < 1$) で戦略 H を選ぶ混合戦略（純粋な戦略 D も含む）を考えると

$$\begin{aligned} E(B,H) &= qE(H,H) + (1-q)E(D,H) \\ &= \frac{q}{2}(V-C) \leqq \frac{1}{2}(V-C) \end{aligned}$$

より $E(H,H) \geqq E(B,H)$ となり，(7) が満たされている。$V > C$ ならば (7) は厳密な不等式で満たされる。もし $V = C$ ならば，$E(H,H)$ も

[7]『p が非常に小さいので (7) が厳密な不等式で成り立てば，$E(B,B) > E(A,B)$ であったとしても (6) は満たされる』と考えられる。

$E(B,H)$ もともに 0 となるが，

$$\begin{aligned} E(H,B) &= qE(H,H) + (1-q)E(H,D) \\ &= \frac{1}{2}q(V-C) + (1-q)V = (1-q)V \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} E(B,B) =& qE(B,H) + (1-q)E(B,D) \\ =& q^2 E(H,H) + q(1-q)E(D,H) + q(1-q)E(H,D) \\ & + (1-q)^2 E(D,D) \\ =& (1-q)[qV + \frac{1}{2}(1-q)V] < (1-q)V \end{aligned}$$

より，$E(H,B) > E(B,B)$ となり，(8) が満たされている。

このケースでは戦略 D からなる集団に戦略 H を持った個体が一つ（一匹）突然変異によって進入すれば，戦略 H を持った個体が多くの子孫を残し，いずれすべてが戦略 H になってしまう。

(ii) **$V < C$ の場合** この場合は純粋な戦略 H は安定な戦略ではない。なぜならば，$E(H,H) = \frac{1}{2}(V-C) < 0$ であり，$E(D,H) = 0$ であるから，$E(H,H) < E(D,H)$ となり，戦略 H からなる集団は戦略 D の進入を許してしまう。したがって混合戦略を安定な戦略の候補として考える。それを戦略 A とし，戦略 A は確率 r で戦略 H を，確率 $1-r$ で戦略 D をとるとする。その場合

$$\begin{aligned} E(A,A) &= rE(H,A) + (1-r)E(D,A) \\ &= E(H,A) = E(D,A) \end{aligned} \tag{9}$$

となっていなければならない。これは H と D に対して A が (7) を等式として満たすということを意味しているが，一方この式は A が混合戦略のナッシュ均衡になる条件でもある。したがって混合戦略の場合にも進化的に安定な戦略はナッシュ均衡をなす戦略でなければならない[8]。もし $E(H,A) < E(A,A)$ であれば (9) の最初の等式より $E(D,A) > E(A,A)$ となり，戦略 A の集団は戦略 D に侵入されてしまうので安定ではなくなる。逆に $E(D,A) < E(A,A)$ であれば，やはり (9) より $E(H,A) > E(A,A)$ となり，戦略 A の集団は戦略 H に侵入されてしまう。

(9) より

$$\begin{aligned} E(H,A) &= rE(H,H) + (1-r)E(H,D) \\ &= rE(D,H) + (1-r)E(D,D) = E(D,A) \end{aligned}$$

[8] この場合は (9) に加えて (8) も成り立たなければ進化的に安定な戦略ではない。

が得られ，上の表の値を代入して，

$$\frac{1}{2}r(V-C)+(1-r)V=\frac{1}{2}(1-r)V$$

となり，

$$r=\frac{V}{C}$$

が求まる。これが (8) を満たすことを確認しよう。確率 $q(\neq r)$ で戦略 H を選ぶ混合戦略を B とすると

$$E(A,B)=rqE(H,H)+r(1-q)E(H,D)+(1-r)qE(D,H)+(1-r)(1-q)E(D,D)$$

$$E(B,B)=q^2E(H,H)+q(1-q)E(H,D)+(1-q)qE(D,H)+(1-q)^2E(D,D)$$

が得られる。以下の計算は問題とする。**（解説ここまで）**

101. 上の計算を続けて $E(A,B)>E(B,B)$ を示せ。

102. 表のゲームの進化的に安定な戦略を求めよ。

個体 2 の戦略

		戦略 X	戦略 Y
個体 1 の戦略	戦略 X	3, 3	0, 1
	戦略 Y	1, 0	1, 1

103. 表のゲームの進化的に安定な戦略を求めよ。

個体 2 の戦略

		戦略 X	戦略 Y
個体 1 の戦略	戦略 X	1, 1	3, 4
	戦略 Y	4, 3	1, 1

104. 3 人のプレイヤー A，B，C がいて，特性関数の値が次のようであるとき，コア，仁，およびシャープレイ値を求めよ。

$$v(\{A\})=0,\ v(\{B\})=0,\ v(\{C\})=2$$

$$v(\{A,B\})=8,\ v(\{B,C\})=10,\ v(\{A,C\})=4$$

$$v(\{A,B,C\})=24$$

105. 特性関数が次のようであるとする。

$$v(\{A,B\})=9,\ v(\{B,C\})=8$$

$$v(\{A,C\})=10,\ v(\{A,B,C\})=12$$

$$v(\{A\})=v(\{B\})=v(\{C\})=0$$

このときコアと仁を求めよ。コアが存在しない場合もある。

106. 以下の解説 6 にある「2 人の共同事業」の例をナッシュ交渉解を用いて解け。

107. ナッシュ交渉解を企業と労働組合の賃金・雇用交渉の問題に応用する。賃金を w，雇用者数を l で表す。企業は一定の資本のもとで生産を行うものとし生産関数を $40\sqrt{l}$ とする。労働組合は 2400 人の人を預かり企業に雇用されない場合は外部の仕事で 8000 の賃金を受け取れる。企業が生産する財の価格は 18000 であるとする。企業の利得は財の販売から得られる収入と賃金費用の差であり，組合の利得は企業に雇用される者と雇用されない者を含めた全員の賃金収入の合計である。交渉が決裂した場合は企業は生産ができなくなるが，組合員は外部からの賃金を得ることができる。以上の設定のもとで以下の問に答えよ。また，外部の仕事で得られる賃金率が 10000 のときにも同じ問題を解け。

(i) 交渉が決裂したときのそれぞれの利得を求めよ。

(ii) 企業と組合の利得を式で表せ。

(iii) ナッシュ交渉解における賃金率と雇用者数を求めよ。

（問題ここまで）

解説 6

1. コア

次のような例を考える。

隣り合わせに建っている 3 軒の家 A，B，C が近くまでパイプラインで来ている温泉を家に引き込みたいと考えているとする。各自が引けばパイプラインからの距離や家の構造などによって A は 70 万円，B は 55 万円，C は 65 万円かかる。しかし 2 軒あるいは 3 軒共同で引けば経費を安くすることができる。具体的に A と B が共同で引けば 119 万円，B と C なら 112 万円で引くことができ，単独で引くよりも合計では安くなる。一方 A と C は離れているために共同で引いても経費を下げられずメリットはない。さらに 3 軒共同で引けば 170 万で引くことができるものとする。A と B が協力すればそれぞれ単独で引くよりも合わせて 6 万円安くすることができるので，その協力による価値を

$$v(\{A, B\}) = 6$$

と表す。このように複数のプレイヤーが協力することを**提携**と呼ぶ。またその提携によって得られる価値を表す関数を**特性関数**と呼ぶ。上の式は提携 {A, B} の特性関数の値が 6 であることを意味する。同様に考えると

$$v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A, C\}) = 0$$

となる。A と C の 2 人の提携では節約はできない。また 3 人全員の提携 {A, B, C} の特性関数の値は

$$v(\{A, B, C\}) = 20$$

である。単独ではもちろん節約できないので，そのことを $v(\{A\}) = 0$，$v(\{B\}) = 0$，$v(\{C\}) = 0$ と表す。3 人で一緒に引けばそれぞれが単独で引くよりも 20 万円節約できる。特性関数の値から

$$v(\{A, B\}) > v(\{A\}) + v(\{B\})$$

$$v(\{B, C\}) > v(\{B\}) + v(\{C\})$$

が得られ，さらに

$$v(\{A, B, C\}) > v(\{A, B\}) + v(\{C\})$$

$$v(\{A, B, C\}) > v(\{B, C\}) + v(\{A\})$$

$$v(\{A, B, C\}) > v(\{A, C\}) + v(\{B\})$$

が成り立つ。これらの式は A，B がそれぞれ単独で引くよりは協力した方がよいことを（B，C も同様），また A，B2 人，あるいは B，C2 人または A，C2 人が協力するよりも 3 人で協力した方がよいことを意味する。そこで 3 人が協力して温泉を引いたとき，その経費をどのように分担するか，逆に言えば協力することによって節約できる分をどのように分けるのが適当であるかを，ある規準にもとづいて検討してみよう。全体で節約される 20 万円の A，B，C3 人の取り分を x，y，z とする。まず節約される 20 万円すべてを 3 人に配分し，かつ各自の取り分がマイナスでは誰も参加しないので次の 2 つの条件が満たされなければならない。

$$x + y + z = 20 \text{（全体合理性）}$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \text{（個人合理性）}$$

3 人の提携を実現するには単独で引く場合と比べた場合はもちろん，2 人で協力して引く場合よりもよりよい結果が実現されなければならない。そうでなければその 2 人は提携から抜けて 2 人だけで温泉を引くことを選ぶであろう。したがって上記の条件に加えて

$$x + y \geqq 6,\ y + z \geqq 8$$

が成り立たなければならない。これらの条件を満たす配分 (x, y, z) の集合を「**コア (core)**」と呼ぶ。コアがなるべく狭い方が限られた配分だけが望ましい配分の候補になるが，この例ではそうはならない。$x + y \geqq 6$，$y + z \geqq 8$ なので

$z \leqq 14$，$x \leqq 12$ でなければならないが，$v(\{A, C\}) = 0$ によって $x + z \geqq 0$ であればよいので y に制約はない。したがって $(x, y, z) = (0, 20, 0)$ というような配分も $(x, y, z) = (6, 0, 14)$ というような配分もコアに含まれてしまう。次の「仁」ではさらに満たすべき条件をつけ加えてコアの中から最も望ましい配分を見つけ出す方法を考えてみよう。

後で見るようにコアが存在しないゲームもある。次で述べる仁はコアが存在すればそのコアに含まれているが，コアが存在しなくても仁は存在する。

2. 仁

単独または 2 人の提携で実現できる価値と全員が提携したときに得られる各自の配分（または 2 人の配分の和）との差を「不満」と呼ぶことにする。今の例では次のように表される。

$$\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 6 - (x + y)$$
$$\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 8 - (y + z)$$
$$\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = -(x + z)$$
$$\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -x$$
$$\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y$$
$$\{C\}:\ v(\{C\}) - z = -z$$

例えば配分 $(x, y, z) = (6, 0, 14)$ に対する不満は上から $0, -6, -20, -6, 0, -14$ となる。マイナスの不満とは満足度を表すと考えればよい。上の式をすべて足し合わせると

$$14 - 3(x + y + z) = -46$$

となるから不満の合計は一定である。しかしそれに偏りがあることは望ましくない。より公平な配分を考えるにはできるだけ不満を均等化することが求められるであろう。そこでまず不満の内最も大きいものをなるべく小さくすることを考える。最大の不満の大きさを m とするとそれぞれの不満は m 以下であるから次の式が得られる。

$$6 - (x + y) \leqq m,\ 8 - (y + z) \leqq m,\ -(x + z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

$x + y + z = 20$ より $-(x + y) = z - 20$，$-(y + z) = x - 20$，$-(x + z) = y - 20$ となるから上記の条件は

$$-m \leqq x \leqq 12 + m,\ -m \leqq y \leqq 20 + m,\ -m \leqq z \leqq 14 + m$$

と書き直される。ここで $m = -6$ とすると

$$6 \leqq x \leqq 6,\ 6 \leqq y \leqq 14,\ 6 \leqq z \leqq 8$$

となる。これらを満たす (x, y, z) は存在する。しかし $m = -7$ とすると最初の条件が $7 \leqq x \leqq 5$ となり，それを満たす x はないから -6 が最大の不満を最小化した値である。これで $x = 6$ および $y + z = 14$ が決まる。その前提で各提携（1 人の場合も提携と呼ぶことにする）の不満を求めると

$$\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = -y$$
$$\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = -6$$
$$\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = -6 - z$$
$$\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -6$$
$$\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y$$
$$\{C\}:\ v(\{C\}) - z = -z$$

が得られる。-6 が 2 つあるので 3 番目に大きい不満ができるだけ小さくなるように考えよう。すると $y + z = 14$ という条件のもとで $y = 7$，$z = 7$ が得られる。したがって $(x, y, z) = (6, 7, 7)$ が最も望ましい配分である。このようにして求められた配分を「仁」と呼ぶ。プレイヤーの数が多く 3 番目に大きい不満を最小化することで配分が確定しない場合にはさらに 4 番目，5 番目 $\cdots$ と配分が確定するまで続ける。

コアが存在しない場合の仁　仁は不満を最小化するという条件で求められるものであり，コアの条件を課すわけではないのでコアがなくても仁は存在する。ただしその場合は正の不満が残ることになるので，一部のグループが全体の提携から抜けることも考えられる。

特性関数が次のようであるとする。

$$v(\{A, B\}) = 7,\ v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A, C\}) = 6,\ v(\{A, B, C\}) = 10$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

A，B，C，3 人の取り分を x，y，z とするとこれらがコアに含まれるためには次の条件が満たされなければならない。

$$x + y + z = 10$$

$$x + y \geqq 7,\ y + z \geqq 8,\ x + z \geqq 6$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

$x + y \geqq 7$，$y + z \geqq 8$ なので $z \leqq 3$，$x \leqq 2$ でなければならない。しかしそれでは $x + z \geqq 6$ が成り立たない。したがってこのゲームにはコアが存在しない。仁は定義できる。このゲームでは各提携の不満は次のように表される。

$$\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 7 - (x + y)$$
$$\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 8 - (y + z)$$
$$\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = 6 - (x + z)$$
$$\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -x$$
$$\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y$$
$$\{C\}:\ v(\{C\}) - z = -z$$

すべて足し合わせると

$$21 - 3(x + y + z) = -9$$

となってやはり一定である。最大の不満の大きさを m とするとそれぞれの不満は m 以下であるから次の式が得られる。

$$7-(x+y) \leqq m,\ 8-(y+z) \leqq m,\ 6-(x+z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

$m = \frac{1}{3}$ とすると

$$x + y \geqq \frac{20}{3},\ y + z \geqq \frac{23}{3},\ x + z \geqq \frac{17}{3},\ x \geqq -\frac{1}{3},\ y \geqq -\frac{1}{3},\ z \geqq -\frac{1}{3}$$

が得られ，これらの式から

$$x = \frac{7}{3},\ y = \frac{13}{3},\ z = \frac{10}{3}$$

が求まる。このとき

$$x + y = \frac{20}{3} < 7,\ y + z = \frac{23}{3} < 8,\ x + z = \frac{17}{3} < 6$$

であるから 2 人づつの提携には不満が残る。

より簡単な例–2 人の共同事業　もっと簡単な例を考えてみよう。2 人の人，A，B がいてある共同事業をしたときの収益の分け方を話し合っているものとする。共同事業をすれば 2000 万円の収益が得られるが，それぞれ 1 人 1 人が単独で行えば A が 100 万円，B は 300 万円の収益しか得ることができない。このゲームの特性関数は

$$v(\{A\}) = 100,\ v(\{B\}) = 300,\ v(\{A, B\}) = 2000$$

と表される。共同事業を行ったときの A，B の取り分を x_A，x_B とする。これらは次の条件を満たさなければならない。

$$x_A + x_B = 2000,\ x_A \geqq 100,\ x_B \geqq 300$$

この条件を満たす x_A，x_B の集合がこのゲームのコアをなす。$(x_A, x_B) = (1700, 300)$，$(x_A, x_B) = (100, 1900)$ などコアに含まれる配分はたくさんある。次に仁を求めよう。このゲームでは提携は $\{A\}$，$\{B\}$，$\{A, B\}$ の 3 つしかないが，2 人の提携に対する 1 人だけの提携の不満は

$$\{A\}:\ v(\{A\}) - x_A = 100 - x_A$$
$$\{B\}:\ v(\{B\}) - x_B = 300 - x_B$$

となる。2 人の不満を最小にするにはその不満を均等にすればよい。したがって

$$x_B - x_A = 200$$

が成り立つことが求められる。これから $(x_A, x_B) = (900, 1100)$ という配分が仁であることがわかる。

3. シャープレイ値

仁を計算したものと同じ例を用いる。ここで紹介するシャープレイ値 (Shapley value) は仁とは異なった観点から望ましい配分を求めようとするものである。シャープレイ値では提携が形成される際の各プレイヤーの貢献度が重要な意味を持つ。例えば提携 {A,B} に C が加われば提携 {A,B,C} が作られる，そのときの C の貢献度は $v(\{A, B, C\}) - v(\{A, B\}) = 14$ となる。A が 1 人だけいるところに B が加われば提携 {A,B} が作られる，そのときの B の貢献度は $v(\{A, B\}) - v(\{A\}) = 6$ である。また A 単独の提携については $v(\{A\})$ の値を貢献度とする。A が 1 人だけいるところに B が加わり，さらに C が加わって全員の提携が作られる過程を $A \to AB \to ABC$ と表す。同様にして B が 1 人だけいるところに C が加わり，さらに A が加わって全員の提携が作られる過程は $B \to BC \to ABC$ と表される。このときの提携 {B,C} における C の貢献度は $v(\{B, C\}) - v(\{B\}) = 8$，提携 {A,B,C} における A の貢献度は $v(\{A, B, C\}) - v(\{B, C\}) = 12$ である。このような過程は全部で 6 つある。まず各提携における各プレイヤーの貢献度を次のような一覧表で表してみる。

	A	B	C
{A,B,C}	20-8=12	20-0=20	20-6=14
{A,B}	6	6	–
{A,C}	0	–	0
{B,C}	–	8	8
{A}	0	–	–
{B}	–	0	–
{C}	–	–	0

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

	A	B	C
$A \to AB \to ABC$	0	6	14
$A \to AC \to ABC$	0	20	0
$B \to AB \to ABC$	6	0	14
$B \to BC \to ABC$	12	0	8
$C \to AC \to ABC$	0	20	0
$C \to BC \to ABC$	12	8	0

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均（期待値）を求めると A，B，C それぞれ 5，9，6 である。この値の組がシャープレイ値であり，それにもとづいた配分 $(x, y, z) = (5, 9, 6)$ が貢献度を基準とした望ましい配分ということになる。

より簡単な例–2 人の共同事業　仁の所で考えた A，B2 人の共同事業の例を見てみよう。共同事業から得られる収益は 2000 万円で，それぞれ 1 人 1 人が単独で行えば A が 100 万円，B は 300 万円の収益しか得ることができないと想定されていて，特性関数は

$$v(\{A\}) = 100,\ v(\{B\}) = 300,\ v(\{A, B\}) = 2000$$

のように表された。共同事業を行ったときの A，B の取り分を x_A，x_B とする。2 人の場合は提携の作り方が $A \to AB$ と $B \to AB$ しかない。貢献度を表にすると

	A	B
$A \to AB$	100	1900
$B \to AB$	1700	200

この表からシャープレイ値は $(900, 1100)$ であることがわかる。この配分は仁によるものと一致する。

4. ナッシュ交渉解

2 人の当事者が交渉によって取り分を決めるような協力ゲームにはナッシュ交渉解 (Nash solution) と呼ばれる有名な理論がある。ごく単純なゲームでは仁やシャープレイ値と同じ結果になる場合もあるが結果を導き出す根拠に違いがある[9]。人々の利得は（フォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型）効用関数で表される（人々は期待効用を最大化するように行動を決める）ものとする。

例で考えよう。A，B の 2 人がある仕事の報酬を巡って交渉をする。それぞれの利得を x_A，x_B（ともに 0 以上）とし次のような状況を考える

(i) 2 人が共同で仕事をしたときに得られる利得は次の式を満たす。

$$2x_A + x_B \leqq 24 \tag{10}$$

このように交渉の結果が満たしていなければならないある条件に当てはまる x_A，x_B の値の範囲を U で表す。

(ii) 交渉が決裂したときの利得をそれぞれ d_A，d_B とすると，$d_A = 4$，$d_B = 0$ であると仮定する。

ナッシュは最適な交渉の結果が以下のような条件を満たしていることを要求した。

(i) パレート効率的である：

A の取り分 x_A を小さくせずに B の取り分を大きくする（あるいは逆）分け方はない。したがって上の (10) は等式 (=) で満たされる。

(ii) 対称性：

状況が対称的であれば結果も対称的である。例えば U が

$$x_A + x_B = 12$$

のように表され，交渉が決裂したときの利得が $d_A = d_B = 2$ のときには交渉の結果は $x_A = x_B = 6$ でなければならない。この条件は 2 人の交渉力に差がないことを意味する。その人の押しの強さなどによって交渉の結果が左右されてはならない。対称的であるとは x_A と x_B，d_A と d_B を入れ替えても 2 人が置かれた立場が変らないことを意味する。

(iii) 無関係な代替案からの独立性：

U から交渉の結果実現する状態以外の選択肢が抜けても交渉の結果は変らない。

[9] ナッシュ交渉解のナッシュはナッシュ均衡のナッシュ(John Nash) と同一人物である。

(iv) アフィン変換からの独立性：

この条件は A，B の利得をそれぞれ ax_A+b，cx_B+e（d_A，d_B も同様に変換する，a, b, c, e は定数，このような変換をアフィン変換と呼ぶ）に変換すればそれに対応するように交渉の結果も変るというもので利得がフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型効用関数で表されていることによる[10]。

これらの条件を満たす解として次のものを提示する。

ナッシュ交渉解 U の中で，A，B それぞれにとっての交渉の結果得られる利得と交渉が決裂したときの利得の差の「積」が最大となるような値が交渉の結果得られる利得である。すなわち

U の中で$(x_A-d_A)(x_B-d_B)$が最大となるように x_A, x_Bが決まる

というようにして求められる x_A，x_B がナッシュ交渉解である。$(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ はナッシュ積 (Nash product) と呼ばれる。

機械的に計算されるように感じられるが，この解は上記の条件を満たしている。まず，もしパレート効率的でなければ x_A（または x_B）を下げずに x_B（または x_A）を大きくすることができるので当然 $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ も最大化されていない。したがってナッシュ交渉解はパレート効率的である。次に，$d_A=d_B$ ならば $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ は対称的な式であるから U が対称的であれば，A と B を入れ替えても同じ状況を表すことになり，ナッシュ積を最大化して得られるナッシュ交渉解も対称的である。さらに U の範囲内で $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ が最大となるように x_A，x_B を決めれば，U からその x_A，x_B 以外の部分を省いても結果に影響はないので「無関係な代替案からの独立性」が成り立つ。最後に，x_A，x_B をそれぞれ ax_A+b，cx_B+e に変換したとき $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ は次のように変わる。

$$(ax_A+b-ad_A-b)(cx_B+e-cd_B-e)=ac(x_A-d_A)(x_B-d_B) \tag{11}$$

U を表す式も同じように変る。変換後に ax_A+b，cx_B+e が条件を満たす範囲を U' とする。ac は定数であるから，(11) を最大化する x_A，x_B は $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ を最大化する x_A，x_B と同じである。その x_A，x_B が U に含まれていれば，ax_A+b，cx_B+e は U' に含まれている。したがって $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ を最大化する x_A，x_B から得られる ax_A+b，cx_B+e は (11) を最大化するナッシュ交渉解となる。

では上の例でナッシュ交渉解を求めてみよう。これは (10) の条件のもとで

$$(x_A-4)x_B$$

[10] フォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型効用関数ならば，効用関数 u と $au+b$ とは同じ選好を表す。

を最大化する問題になるが，パレート効率性によって (10) は等式で満たされるのでラグランジュ乗数法を用いることができる。ラグランジュ関数を

$$\mathscr{L} = (x_A - 4)x_B + \lambda(2x_A + x_B - 24)$$

として x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$x_B + 2\lambda = 0$$

$$x_A - 4 + \lambda = 0$$

を得る。これらの式から

$$x_B = 2x_A - 8$$

が得られる。これと (10) により

$$x_A = 8,\ x_B = 8$$

が求まる。

次に交渉が決裂したときの B の利得が 4 の場合を考える。そのときナッシュ積は

$$(x_A - 4)(x_B - 4)$$

となり，ラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = (x_A - 4)(x_B - 4) + \lambda(2x_A + x_B - 24)$$

と書け，これを x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$x_B - 4 + 2\lambda = 0$$

$$x_A - 4 + \lambda = 0$$

を得る。これらの式から

$$x_B = 2x_A - 4$$

が得られる。これと (10) により

$$x_A = 7,\ x_B = 10$$

が求まる。このように交渉に当たっては決裂したときの利得を大きくすることによってより有利な交渉結果を実現することができる。それが交渉力である。

略解（計算問題の解を中心に）

1.

$$p = 272 - 3x,\ p = 6x + 20$$

を連立させて解けば $x = 28$, $p = 188$ が得られる。同様に

$$p = 200 - 4x,\ p = 3x + 32$$

を連立させて解けば $x = 24$, $p = 104$ が得られる。各自図示せよ。

2. 価格が 100 円のときの需要を 100，200 円のときの需要を 50 とする。100 円から 200 円に値上がりしたときの需要の価格弾力性は

$$-\frac{\frac{50-100}{100}}{\frac{200-100}{100}} = \frac{1}{2}$$

であるが，逆に 200 円から 100 円に値下がりしたときの需要の価格弾力性は

$$-\frac{\frac{100-50}{50}}{\frac{100-200}{200}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

となる。もっと小さな価格の変化を考えてみよう。価格が 100 円のときの需要を 100，105 円のときの需要を 95 とする。100 円から 105 円に値上がりしたときの需要の価格弾力性は

$$-\frac{\frac{95-100}{100}}{\frac{105-100}{100}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}} = 1$$

であるが，逆に 105 円から 100 円に値下がりしたときの需要の価格弾力性は

$$-\frac{\frac{100-95}{95}}{\frac{100-105}{105}} = \frac{\frac{1}{19}}{\frac{1}{21}} = \frac{21}{19}$$

となるので小さな価格の変化の場合にはどちら向きに考えても需要の価格弾力性の値はあまり変わらない。

3. 価格が 150 円のときの供給を 100，200 円のときの供給を 150 とする。150 円から 200 円に値上がりしたときの需要の価格弾力性は

$$\frac{\frac{150-100}{100}}{\frac{200-150}{150}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

であるが，逆に 200 円から 150 円に値下がりしたときの供給の価格弾力性は

$$\frac{\frac{100-150}{150}}{\frac{150-200}{200}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

となる。もっと小さな価格の変化を考えてみよう。価格が 150 円のときの供給を 100，160 円のときの供給を 105 とする。150 円から 160 円に値上がりしたときの需要の価格弾力性は

$$\frac{\frac{105-100}{100}}{\frac{160-150}{150}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{15}} = \frac{3}{4}$$

であるが，逆に 160 円から 150 円に値下がりしたときの供給の価格弾力性は

$$\frac{\frac{100-105}{105}}{\frac{150-160}{160}} = \frac{\frac{1}{21}}{\frac{1}{16}} = \frac{16}{21} \approx 0.762$$

となるので小さな価格の変化の場合にはどちら向きに考えても供給の価格弾力性の値はあまり変わらない。

4. （数値例の 1 つ）需要曲線が

$$p = 272 - 3x$$

から

$$p = 344 - 3x$$

に変化したと仮定する。供給曲線が

$$p = 6x + 20$$

のとき取引量 x は 28 から 36 に変わり，均衡価格 p は 188 から 236 に変わる。一方供給曲線が

$$p = 2x + 132$$

であるとすると取引量 x は 28 から 42.4 に変わり，均衡価格 p は 188 から 216.8 に変わる。後者の方が価格の変化が小さく，取引量の変化が大きい。

5. （数値例の 1 つ）供給曲線が

$$p = 6x + 20$$

から

$$p = 6x + 74$$

に変化したと仮定する。需要曲線が

$$p = 272 - 3x$$

のとき取引量 x は 28 から 22 に変わり，均衡価格 p は 188 から 206 に変わる。一方需要曲線が

$$p = 300 - 4x$$

であるとすると取引量 x は 28 から 22.6 に変わり，均衡価格 p は 188 から 209.6 に変わる。後者の方が価格の変化が大きく，取引量の変化が小さい。

6. （ヒント）消費税の変化は供給曲線に影響し，所得税の変化は需要曲線に影響する。

7. （ヒント）清酒とワインは代替財であると考えられる。

8. （適当な参考書を見よ）

9. （適当な参考書を見よ）

10. （適当な参考書を見よ）

11. 第 0 期の価格を p_0 とすると第 1 期の産出量は供給曲線から

$$x_1 = \frac{1}{6}(p_0 - 20)$$

となり，需要曲線からそのときの価格は

$$p_1 = 272 - \frac{1}{2}(p_0 - 20)$$

と求まる。同様にして p_1 から出発すると

$$p_2 = 272 - \frac{1}{2}(p_1 - 20)$$

が得られるので一般的に第 $n-1$ 期から n 期にかけては

$$p_n = 272 - \frac{1}{2}(p_{n-1} - 20)$$

となる。この式が a を定数として次のように変形されると考えると

$$p_n - a = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - a)$$

$a = 188$ となる。すなわち

$$p_n - 188 = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - 188)$$

この 188 は均衡価格である。この式から $p_n - 188$ が公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列であることがわかる。この数列は $p = 188$ に収束するのでくもの巣の調整過程は安定である。

12. 第 0 期の価格を p_0 とすると第 1 期の産出量は供給曲線から

$$x_1 = \frac{1}{3}(p_0 - 32)$$

となり，需要曲線からそのときの価格は

$$p_1 = 200 - \frac{4}{3}(p_0 - 32)$$

と求まる。同様にして p_1 から出発すると

$$p_2 = 200 - \frac{4}{3}(p_1 - 32)$$

が得られるので一般的に第 $n-1$ 期から n 期にかけては

$$p_n = 200 - \frac{4}{3}(p_{n-1} - 32)$$

となる。この式は次のように変形される。

$$p_n - 104 = -\frac{4}{3}(p_{n-1} - 104)$$

104 は均衡価格である。この式から $p_n - 104$ が公比 -2 の等比数列であることがわかる。この数列は収束しない（発散する）のでくもの巣の調整過程は不安定である。

13. （適当な参考書を見よ）

14. （適当な参考書を見よ）

15. （補足とヒント）2 つの無差別曲線が交わっている点で考える。無差別曲線上の 2 点を結ぶ線分の傾きは消費される財の消費者にとっての相対的な関係，すなわち 1 単位の X 財（または Y 財）消費量が何単位の Y 財（または X 財）消費量で置き換えられるかあるいは相当するかを表しているが，X 財・Y 財消費量のごく小さな変化を考えると 2 点を結ぶ線分はある点における無差別曲線の接線に近づく。その接線の傾きがその点での無差別曲線の傾きである。

16. （ヒント）予算制約線は互いに平行になるように描き，無差別曲線は互いに交わらないように描くこと。

17. （ヒント）上の問題と同じ。

18. （ヒント）X の価格のみが下落したとき予算制約線の Y 軸上の切片は変わらず，X 軸上の切片のみが変化する。

19. （ヒント）上の問題と同じ。

20. （ヒント）上の 2 問と同様（X と Y が入れ替わっている）。

21. （ヒント）Y の価格の変化に伴って Y の需要がどのように変化すればよいかを考えること。

22. （ヒント）所得効果の方向と代替効果，所得効果の大きさの関係を考えること。

23. （ヒント）消費量の変化による個人の効用の変化，異なる人々の効用の比較などについて考えてみること。

24. （ヒント）現在の消費と将来の消費に対する好みがどのようなことを意味するかを考えてみること。

25. （ヒント）利子率の変化と現在の消費との関係，現在の消費と貯蓄の関係を考えること。

26. （ヒント）上の問題と同じ。

27. （ヒント）余暇と労働供給の関係，および賃金率と消費，労働供給の関係を考えよ。

28. （ヒント）代替効果，所得効果それぞれが労働供給を増やすか減らすかを考えること。

29. （ヒント）予算制約線は価格の変化によって初期保有量を示す点を支点として回転するように変化することに留意すること。

30. 上と同様。

31. （ヒント）2 人の消費者の無差別曲線が接するような点がパレート効率的であること，その点で両者の無差別曲線に共通に接する直線（の傾き）が均衡（相対）価格を表すことに留意すること。

32. X，Y の価格を p_x，p_y とすると消費者 A，B の予算制約式はそれぞれ次のように表される。

$$p_x x_A + p_y y_A = 12p_x + 12p_y$$

$$p_x x_B + p_y y_B = 24p_x + 8p_y$$

ラグランジュ関数を作るとそれぞれ

$$\mathscr{L}_A = x_A^2 y_A + \lambda(p_x x_A + p_y y_A - 12p_x - 12p_y)$$

$$\mathscr{L}_B = x_B y_B + \lambda(p_x x_B + p_y y_B - 24p_x - 8p_y)$$

となるから，次のような効用最大化条件が得られる。

$$2x_A y_A + \lambda p_x = 0,\ x_A^2 + \lambda p_y = 0$$

$$y_B + \lambda p_x = 0,\ x_B + \lambda p_y = 0$$

したがって

$$p_x x_A = 2p_y y_A,\ p_x x_B = p_y y_B$$

を得る。これらの式と予算制約式より消費者 A，B それぞれについて

$$y_A = 4\frac{p_x}{p_y} + 4$$

$$y_B = 12\frac{p_x}{p_y} + 4$$

が得られ，Y 財の需要供給の均衡条件によって

$$16\frac{p_x}{p_y} + 8 = 20$$

が導かれる。したがって均衡相対価格は $\frac{p_x}{p_y} = \frac{3}{4}$ と求まる。X 財については同様の計算によって

$$x_A = 8 + 8\frac{p_y}{p_x}$$

$$x_B = 12 + 4\frac{p_y}{p_x}$$

より需給均衡条件

$$20 + 12\frac{p_y}{p_x} = 36$$

が導かれ $\frac{p_y}{p_x} = \frac{4}{3}$ が得られるが，これは上記の $\frac{p_x}{p_y} = \frac{3}{4}$ と同一である。X 財の市場が均衡すれば Y 財の市場も均衡する（ワルラスの法則）。これは X 財の市場均衡条件に消費者の予算制約式を合わせると Y 財の市場均衡条件が導かれることを意味している。

33. ラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = x^3y^2 + \lambda(p_x x + p_y y - 15000)$$

となる。これを x，y で微分すると

$$3x^2y^2 + \lambda p_x = 0$$

$$2x^3y + \lambda p_y = 0$$

が得られる。この両式から

$$3p_y y = 2p_x x$$

を得る。したがって予算制約式から

$$x = \frac{9000}{p_x},\ y = \frac{6000}{p_y}$$

が求まる。予算制約式 $p_x x + p_y y = 15000$ を満たすような x と y の変化 Δx，Δy を考えると $\Delta y = -\frac{p_x}{p_y}\Delta x$ が得られる。効用関数よりこの関係を満たす x，y の変化による効用の変化は

$$\Delta u = 3x^2y^2\Delta x + 2x^3y\Delta y = (3x^2y^2 - 2\frac{p_x}{p_y}x^3y)\Delta x = x^2y(3y - 2\frac{p_x}{p_y}x)\Delta x$$

と表される。$\Delta x > 0$（X の消費量の増加）として $3y-2\frac{p_x}{p_y}x > 0$ のとき $\Delta u > 0$，$3y-2\frac{p_x}{p_y}x < 0$ のとき $\Delta u < 0$ なので $3p_y y = 2p_x x$ を満たす水準よりも x が小さいときに x の増加によって効用が増大し，その水準よりも x が大きいときには x の増加によって効用が減少する。したがって $3p_y y = 2p_x x$ が成り立つところで効用が最大化されることがわかる。

34. 前問と同様。ラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = xy^4 + \lambda(p_x x + p_y y - 25000)$$

となる。これを x，y で微分すると

$$y^4 + \lambda p_x = 0$$

$$4xy^3 + \lambda p_y = 0$$

が得られる。この両式から

$$p_y y = 4p_x x$$

を得る。したがって予算制約式から

$$x = \frac{5000}{p_x},\ y = \frac{20000}{p_y}$$

が求まる。予算制約式 $p_x x + p_y y = 25000$ を満たすような x と y の変化 Δx，Δy を考えると $\Delta y = -\frac{p_x}{p_y}\Delta x$ が得られる。効用関数よりこの関係を満たす x，y の変化による効用の変化は

$$\Delta u = y^4\Delta x + 4xy^3\Delta y = (y^4 - 4\frac{p_x}{p_y}xy^3)\Delta x = y^3(y - 4\frac{p_x}{p_y}x)\Delta x$$

と表される。$\Delta x > 0$（X の消費量の増加）として $y-4\frac{p_x}{p_y}x > 0$ のとき $\Delta u > 0$，$y-4\frac{p_x}{p_y}x < 0$ のとき $\Delta u < 0$ なので $p_y y = 4p_x x$ を満たす水準よりも x が小さいときに x の増加によって効用が増大し，その水準よりも x が大きいときには x の増加によって効用が減少する。したがって $p_y y = 4p_x x$ が成り立つところで効用が最大化されることがわかる。

35. ラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = 200x + 300y + \lambda(x^3y^2 - 1536)$$

となる。これを x，y で微分すると

$$200 + 3x^2y^2\lambda = 0$$

$$300 + 2x^3y\lambda = 0$$

が得られる。この両式から

$$y = \frac{4}{9}x$$

を得る。したがって $x^3y^2 = 1536$ から

$$x = 6,\ y = \frac{8}{3}$$

が求まる。$x^3y^2 = 1536$ を満たすような x と y の変化 Δx，Δy を考えると $3x^2y^2\Delta x + 2x^3y\Delta y = 0$ より $\Delta y = -\frac{3y}{2x}\Delta x$ が得られる。この関係を満たす予算の変化を Δm とすると

$$\Delta m = 200\Delta x + 300\Delta y = 200 - 450\frac{y}{x}\Delta x = 50(4 - 9\frac{y}{x})\Delta x$$

が得られる。$\Delta x > 0$（X の消費量の増加）として $4 - 9\frac{y}{x} < 0$ のとき $\Delta m < 0$, $4 - 9\frac{y}{x} > 0$ のとき $\Delta m > 0$ なので $y = \frac{4}{9}x$ を満たす水準よりも x が小さい（$\frac{y}{x}$ が大きい）ときに x の増加によって予算が減少し，その水準よりも x が大きい（$\frac{y}{x}$ が小さい）ときには x の増加によって予算が増加する。したがって $y = \frac{4}{9}x$ が成り立つところで予算（支出）が最小化される。

36. $U = xy^2$，$U = 4xy^2 + 30$，$U = x^3y^6$ が，それぞれ U を定数として $xy^2 = U$，$xy^2 = \frac{1}{4}(U - 30)$，$xy^2 = \sqrt[3]{U}$ となることから同一の無差別曲線が得られることがわかる。

37. ラグランジュ関数はそれぞれ

$$\mathscr{L}_1 = xy^2 + \lambda(200x + 100y - 24000)$$

$$\mathscr{L}_2 = 4xy^2 + 120 + \lambda(200x + 200y - 24000)$$

$$\mathscr{L}_3 = x^3y^6 + \lambda(200x + 200y - 24000)$$

となる。これらを x，y で微分すると

$$y^2 + 200\lambda = 0,\ 2xyx + 100\lambda = 0$$

$$4y^2 + 200\lambda = 0,\ 8xy + 100\lambda = 0$$

$$3x^2y^6 + 200\lambda = 0,\ 6x^3y^5 + 100\lambda = 0$$

が得られ，それぞれのケースについて

$$y = 4x$$

が導かれるから，予算制約式によって $x = 40$，$y = 160$ が求まる。

$U = xy^2$ について最大化を確認する。予算制約式 $200x + 100y = 24000$ を満たすような x と y の変化 Δx，Δy を考えると $\Delta y = -2\Delta x$ が得られる。効用関数よりこの関係を満たす x，y の変化による効用の変化は

$$\Delta U = y^2 \Delta x + 2xy\Delta y = y(y-4x)\Delta x$$

と表される。$\Delta x > 0$（X の消費量の増加）として $y-4x > 0$ のとき $\Delta U > 0$，$y-4x < 0$ のとき $\Delta U < 0$ なので $y = 4x$ を満たす水準よりも x が小さいときに x の増加によって効用が増大し，その水準よりも x が大きいときには x の増加によって効用が減少する。したがって $y = 4x$ が成り立つところで効用が最大化されることがわかる。

38. 予算制約式は

$$5000y = 10000(366 - x)$$

と表されるから，ラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = xy^2 + \lambda[5000y - 10000(366 - x)]$$

となる。これを x，y で微分すると

$$y^2 + 10000\lambda = 0$$

$$2xy + 5000\lambda = 0$$

が導かれる。この両式から

$$y^2 = 4xy$$

したがって $y = 4x$ を得る。予算制約式より $x = 122$（$y = 488$）となるから労働日数 $L = 244$ が求まる。ラグランジュ乗数法を用いない場合は以下のように計算する。予算制約式から $y = 732 - 2x$ が得られ，これを効用関数に代入すると

$$u = x(732 - 2x)^2$$

となる。これを x で微分してゼロとおくと

$$(732 - 2x)^2 - 4x(732 - 2x) = x(732 - 2x)(732 - 6x) = 0$$

が得られ予算制約式と合わせて $x = 122$，$y = 488$ が求まる。

39. 予算制約式は

$$8000y = 8000(\bar{L} - x)$$

と表されるから，ラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = xy^3 + \lambda[8000y - 8000(\bar{L} - x)]$$

となる。これを x，y で微分すると

$$y^3 + 8000\lambda = 0$$

$$3xy^2 + 8000\lambda = 0$$

が導かれる。この両式から

$$y^3 = 3xy^2$$

したがって $y = 3x$ を得る。予算制約式より $x = \frac{1}{4}\bar{L}$（$y = \frac{3}{4}\bar{L}$）となるから労働日数 $L = \frac{3}{4}\bar{L}$ が求まる。

40. 予算制約式は

$$2x + y = 110$$

と表される。ラグランジュ関数を作ると

$$\mathscr{L} = (x-5)(y-10)^2 + \lambda(2x + y - 110)$$

となる。これを x，y で微分してゼロとおくと

$$(y-10)^2 + 2\lambda = 0$$

$$2(x-5)(y-10) + \lambda = 0$$

が得られる。これらの式から

$$(y-10)^2 = -2\lambda$$

$$(x-5)(y-10) = -\frac{1}{2}\lambda$$

が導かれるが，この両式から（それぞれ左辺が $(x-5)(y-10)^2$ となるようにして）

$$y = 4x - 10$$

を得る。したがって予算制約式から

$$x = 20,\ y = 70$$

が求まる。

ラグランジュ乗数法を用いない場合は以下のように計算する。予算制約式から $y = 110 - 2x$ が得られ，これを効用関数に代入すると

$$u = (x-5)(100-2x)^2$$

となる。これを x で微分してゼロとおくと

$$(100-2x)^2 - 4(x-5)(100-2x) = 0$$

が得られ予算制約式から $x = 20$，$y = 70$ が求まる

41. 前問と同様。予算制約式は

$$x + 2y = 180$$

と表される。ラグランジュ関数を作ると

$$\mathscr{L} = (2x-5)^3(y-10) + \lambda(x + 2y - 180)$$

となる。これを x，y で微分してゼロとおくと

$$3(2x-5)^2(y-10) + \lambda = 0$$

$$(2x-5)^3 + 2\lambda = 0$$

が得られる。これらの式から

$$(2x-5)^2(y-10) = -\frac{1}{3}\lambda$$

$$(2x-5)^3 = -2\lambda$$

が導かれるが，この両式から

$$2x - 5 = 6(y-10)$$

を得る。したがって予算制約式から

$$x = 97,\ y = 41.5$$

が求まる。

42. 予算制約式は次のように表される。

$$C_2 = 120 + 1.2(100 - C_1) = -1.2C_1 + 240$$

ラグランジュ関数を作ると

$$\mathscr{L} = C_1C_2^2 + \lambda(1.2C_1 + C_2 - 240)$$

となる。これを C_1，C_2 で微分してゼロとおくと

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial C_1} = C_2^2 + 1.2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial C_2} = 2C_1C_2 + \lambda = 0$$

が得られる。これらの式から

$$C_2^2 = -1.2\lambda$$

$$C_1C_2 = -\frac{1}{2}\lambda$$

が導かれるが，この両式から

$$C_2 = 2.4C_1$$

を得る。したがって予算制約式から

$$C_1 = \frac{200}{3},\ C_2 = 160$$

が求まる。

（ここ追加）

43. 予算制約式は次のように表される。

$$C_2 = 270 + 1.25(240 - C_1) = -1.25C_1 + 570$$

ラグランジュ関数を作ると

$$\mathscr{L} = C_1^2C_2 + \lambda(1.25C_1 + C_2 - 570)$$

となる。これを C_1，C_2 で微分してゼロとおくと

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = 2C_1C_2 + 1.25\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_2} = C_1^2 + \lambda = 0$$

が得られる。これらの式から

$$1.6C_1C_2 = -\lambda,\ C_1^2 = -\lambda$$

が導かれるが，この両式から $1.6C_2 = C_1$ を得る。したがって予算制約式から

$$C_1 = 304,\ C_2 = 190$$

が求まる。

（ここ追加）

44. 各自図を描いていただきたい。企業の費用最小化の図とよく似ている。

45. (i) 効用最大化：

予算制約式は

$$p_x x + p_y y + p_z z + p_w w = m$$

と書け，ラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = x^4y^3z^2w + \lambda(p_x x + p_y y + p_z z + p_w w - m)$$

と表される。これを x，y，z，w で微分してゼロとおくと

$$4x^3y^3z^2w + \lambda p_x = 0$$
$$3x^4y^2z^2w + \lambda p_y = 0$$
$$2x^4y^3zw + \lambda p_z = 0$$
$$x^4y^3z^2 + \lambda p_w = 0$$

が得られる。これらの式から

$$p_x x : p_y y : p_z z : p_w w = 4:3:2:1$$

を得る。予算制約式より需要関数が次のように求まる。

$$x = \frac{2m}{5p_x},\ y = \frac{3m}{10p_y},\ x = \frac{m}{5p_z},\ x = \frac{m}{10p_w}$$

(ii) 支出最小化：

一定の効用を $x^4y^3z^2w = \bar{u}$ とする。ラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = p_x x + p_y y + p_z z + p_w w + \lambda(x^4y^3z^2w - \bar{u})$$

と表される。これを x，y，z，w で微分してゼロとおくと

$$p_x + \lambda 4x^3y^3z^2w = 0$$
$$p_y + \lambda 3x^4y^2z^2w = 0$$
$$p_z + \lambda 2x^4y^3zw = 0$$
$$p_w + \lambda x^4y^3z^2 = 0$$

が得られる。これらの式から

$$p_x x : p_y y : p_z z : p_w w = 4:3:2:1$$

を得る。

$x^4y^3z^2w = \bar{u}$ より

$$\tilde{x} = \sqrt[10]{\frac{2^{10}p_y^3p_z^2p_w}{3^3p_x^6}\bar{u}},\ \tilde{y} = \sqrt[10]{\frac{3^7p_x^4p_z^2p_w}{2^{10}p_y^7}\bar{u}},$$
$$\tilde{z} = \sqrt[10]{\frac{p_x^4p_y^3p_w}{3^3p_z^8}\bar{u}},\ \tilde{w} = \sqrt[10]{\frac{p_x^4p_y^3p_z^2}{2^{10}3^3p_w^9}\bar{u}}$$

が得られる。

46. (i) 保険がないときのタイプ 1 の人々の期待効用は

$$1200 \times \frac{9}{10} + 400 \times \frac{1}{10} = 1120$$

であるから，保険料を y とすると

$$400 + 80(20 - y) - 2(20 - y)^2 = 1200 - 2y^2 = 1120$$

より $y = 2\sqrt{10} \approx 6.3$ が求まる。したがって 6.3 までの保険料を支払う用意がある。一方保険がないときのタイプ 2 の人々の期待効用は

$$1200 \times \frac{1}{2} + 400 \times \frac{1}{2} = 800$$

であるから，保険料を y とすると

$$1200 - 2y^2 = 800$$

より $y = 10\sqrt{2} \approx 14.1$ が求まる。したがって 14.1 までの保険料を支払う用意がある。保険料を 6.3 以下にしなければタイプ 1 は保険に加入しない。タイプ 1 よりタイプ 2 の人々の方が 2 倍多いので事故が起きる確率は $\frac{11}{30}$ である。事故の損害は 20 であるからその期待値は約 7.3 となり保険料を上回るので採算がとれない。

(ii) （以下は 1 つの例である）次のような 2 つの保険を考えてみよう。

i. 保険 1：損害保障額は 15 で保険料は 8。したがって事故が起きたときの損害は（保険料を含めて）-13，起きなかったときは -8。

ii. 保険 2：損害保障額は 5 で保険料は 1。事故が起きたときの損害は（保険料を含めて）-16，起きなかったときは -1。

それぞれの保険を購入したときの各タイプの人々の期待効用を求める。

i. タイプ 1：保険 1 から得られる期待効用は

$$1072 \times \frac{9}{10} + 862 \times \frac{1}{10} = 1051$$

保険 2 から得られる期待効用は

$$1198 \times \frac{9}{10} + 688 \times \frac{1}{10} = 1147 > 1120$$

であるからこれらの人々は保険 2 を購入する。

ii. タイプ 2：保険 1 から得られる期待効用は

$$1072 \times \frac{1}{2} + 862 \times \frac{1}{2} = 967 > 800$$

保険 2 から得られる期待効用は

$$1198 \times \frac{1}{2} + 688 \times \frac{1}{2} = 943$$

であるからこれらの人々は保険 1 を購入する。

この保険ではそれぞれのタイプの人々が事故を起こす確率を考えると保険会社の採算に問題はない。

47. （ヒント）$x = \sqrt{LK}$ の値が一定のときの L と K の関係を考える。

48. （ヒント）等産出量曲線上のある点よりも右の点，下の点はそれぞれどのような状態を表すかを考えよ。

49. （ヒント）等産出量曲線の意味を考えればわかる。

50. （補足とヒント）2 つの等産出量曲線が交わっている点で考える。等産出量曲線上の 2 点を結ぶ線分の傾きは生産要素の代替関係，すなわち 1 単位の資本（または労働）投入量が何単位の労働（または資本）投入量で置き換えられるかを表しているが，資本・労働投入量のごく小さな変化を考えると 2 点を結ぶ線分はある点における等産出量曲線の接線に近づく。その接線の傾きがその点での等産出量曲線の傾きである。

51. （ヒント）等費用線の傾きの変化を考える。等産出量曲線は変わらない。

52. （ヒント）上の問題と同じ。

53. （ヒント）「資本」とは具体的にどのようなものであり，誰が所有しているか，あるいは誰が「資本」の存在に貢献しているかを考えること。

54. （ヒント）限界費用と平均費用の意味を考えればわかる。微分を使った計算でも確認できる。

55. 企業の利潤は

$$\pi = 36x - 2x^2 - 4x - 100 = -2x^2 + 32x - 100$$

と表される。これを変形すると

$$\pi = -2(x - 8)^2 + 28$$

が得られる。したがって利潤を最大化する産出量は 8 であり，そのときの利潤は 28 である。

56. (i) 企業の利潤は

$$\pi = 19x - x^3 + 4x^2 - 3x - 3$$

と表される。これを x で微分してゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dx} = 16 - 3x^2 + 8x = -(3x + 4)(x - 4) = 0$$

となるから利潤を最大化する産出量は 4 である。

(ii) 1 単位当りの従量税を t とすると企業の利潤は

$$\pi = 19x - x^3 + 4x^2 - 3x - 3 - tx$$

となる。これを x で微分してゼロとおけば

$$\frac{d\pi}{dx} = 16 - 3x^2 + 8x - t = 0$$

が得られるが，$x = 3$ がこの式を満たすので

$$t = 13$$

を得る。

57. ホテリングの補題の例である。

(i)

$$\pi = 4pL^{\frac{1}{4}}K^{\frac{2}{3}} - wL - rK$$

を L，K で微分してゼロとおくと

$$pL^{-\frac{3}{4}}K^{\frac{2}{3}} = w \tag{12}$$

$$\frac{8}{3}pL^{\frac{1}{4}}K^{-\frac{1}{3}} = r \tag{13}$$

が得られる。(13) の両辺を 2 乗すると

$$\frac{64}{9}p^2L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{2}{3}} = r^2$$

となり，(12) とかけ合わせて

$$\frac{64}{9}p^3L^{-\frac{1}{4}} = r^2w$$

が得られる。したがって

$$\tilde{L}(p,w,r) = \left(\frac{64}{9}\right)^4 p^{12}(r^2w)^{-4} = \frac{2^{24}}{3^8}p^{12}r^{-8}w^{-4}$$

を得る。また

$$L^{\frac{1}{4}} = \frac{64}{9}p^3(r^2w)^{-1}$$

より

$$K^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{r}\frac{8}{3}\frac{64}{9}p^4(r^2w)^{-1} = \frac{2^9}{3^3}p^4(r^3w)^{-1}$$

であるから

$$\tilde{K}(p,w,r) = \frac{2^{27}}{3^9}(r^3w)^{-3}p^{12}$$

が得られる。このとき企業の産出量は

$$\begin{aligned}\tilde{x}(p,w,r)=&4L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{2}{3}}=4\times\frac{64}{9}p^3(r^2w)^{-1}\times\frac{2^{18}}{3^6}(r^3w)^{-2}p^8\\=&\frac{2^{26}}{3^8}p^{11}r^{-8}w^{-3}\end{aligned}$$

で与えられ，利潤は

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(p,w,r)=&\frac{2^{26}}{3^8}p^{12}r^{-8}w^{-3}-\frac{2^{24}}{3^8}p^{12}r^{-8}w^{-3}-\frac{2^{27}}{3^9}p^{12}r^{-8}w^{-3}\\=&\frac{2^{24}}{3^9}p^{12}r^{-8}w^{-3}\end{aligned}\tag{14}$$

となる。

(ii) (14) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial p}&=\frac{2^{26}}{3^8}p^{11}r^{-8}w^{-3}=\tilde{x}(p,w,r)\\\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial w}&=-\frac{2^{24}}{3^8}p^{12}r^{-8}w^{-4}=-\tilde{L}(p,w,r)\\\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial r}&=-\frac{2^{27}}{3^9}p^{12}r^{-9}w^{-3}=-\tilde{K}(p,w,r)\end{aligned}$$

が導かれる。

58. 短期費用関数を，x を与えられたものとして K で微分してゼロとおくと（x に対する費用最小化）

$$\frac{dc}{dK}=-3(4x-K)^2+3K^2=12x(2K-4x)$$

となるから $K=2x$ が得られる。これを短期費用関数に代入すると

$$c=16x^3+4$$

が得られる。これが長期費用関数である。

59. 短期費用関数を，x を与えられたものとして K で微分してゼロとおくと

$$4-\frac{x^2}{K^2}=0$$

となるから，$K=\frac{x}{2}$ が求まり，長期費用関数は

$$C(x)=4x$$

となる。いくつかの K の値について短期の費用曲線を描き，それらをなぞるようにして長期の費用曲線を描く（包絡線）。

60. （ヒント）長期均衡において何と何が等しいか，また何がゼロになっているか，などに留意して考えること。

61. （ヒント）限界収入とは何を表すかを考えれば自ずとわかる。

62. （ヒント）独占企業にとって限界収入が持つ意味，完全競争において企業が置かれた立場に留意すること。

63. 利潤は

$$\pi = (300 - 2x)x - 3x^2 - 200 = -5x^2 + 300x - 200$$

と表される。これを変形して

$$\pi = -5(x - 30)^2 + 4300$$

となるから利潤を最大化する産出量は 30 であり，そのときの利潤は 4300 である。

64. （適当な参考書を見よ）

65. （ヒント）独占的競争と完全競争において各企業が生産する財の関係，均衡における企業の費用や利潤などについて考えること。

66. 外部性が存在するときの企業行動に関する問題である。

(i) 企業 A の利潤は

$$\pi_A = 120x - 2x^2$$

であるから，これを x で微分してゼロとおくと

$$120 - 4x = 0$$

となり $x = 30$ が求まる。一方企業 B の利潤は $x = 30$ として

$$\pi_B = 150y - 2y^2 - 30y$$

であるから，これを y で微分してゼロとおくと

$$120 - 4y = 0$$

より $y = 30$ を得る。

(ii) 両企業の利潤の合計は

$$\pi = 120x - 2x^2 + 150y - 2y^2 - xy$$

と表される。これを x，y で微分してそれぞれゼロとおくと

$$120 - 4x - y = 0,\ 150 - 4y - x = 0$$

となり，これらの式を連立させて解けば $x = 22$，$y = 32$ が求まる。

(iii) 企業 A に 1 単位当り t の税を課すとするとその利潤は

$$\pi_A = 120x - 2x^2 - tx$$

となる。利潤最大化条件は

$$120 - 4x - t = 0$$

である。$x = 22$ がこの条件を満たすように t を決めれば $t = 32$ である。$x = 22$ ならば企業 B の利潤は

$$\pi_B = 150y - 2y^2 - 22y$$

となり，利潤最大化条件は

$$150 - 4y - 22 = 0$$

であるから $y = 32$ が得られる。

67. 企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (32 - x - y)x - 3x$$

$$\pi_A = (32 - x - y)x - y$$

と表され，利潤最大化条件は

$$29 - 2x - y = 0$$

$$31 - x - 2y = 0$$

となる。したがって企業 A，B の反応曲線の方程式はそれぞれ次のようになる。

$$x = \frac{1}{2}(29 - y)$$

$$y = \frac{1}{2}(31 - x)$$

(各自図示していただきたい)

また均衡産出量はそれぞれ

$$x = 9,\ y = 11$$

と求まる。

68.　(i) 企業 i の利潤は

$$\pi_i = (26 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i)x_i - 2x_i - f$$

と表されるから，利潤最大化の条件は

$$26 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i - 2x_i - 2 = 0$$

となる。ここですべての企業の費用関数が等しいことより均衡産出量も等しくなることを用いると $\sum_{i=1}^{n} x_i = nx_i$ であるから

$$x_i = \frac{24}{2(n+1)} = \frac{12}{n+1}$$

が求まる。

(ii) 均衡価格は

$$p = 26 - 2nx_i = \frac{26+2n}{n+1}$$

となるので，均衡における各企業の利潤は

$$\pi_i = \left[\frac{26+2n}{n+1} - 2\right]\frac{12}{n+1} - f = \frac{288}{(n+1)^2} - f$$

に等しい。$\pi_i = 0$ とおくと

$$n = \frac{24}{\sqrt{2f}} - 1$$

が得られる。f が大きくなるとこの式を満たす n の値は小さくなる。

(iii) 財の価格は

$$p = \frac{26 + 2\left[\frac{24}{\sqrt{2f}} - 1\right]}{\frac{24}{\sqrt{2f}}} = 2 + \sqrt{2f}$$

となる。f が 0 に近づけば p は 2（限界費用の値）に近づく。

69. （ヒント）独占とクールノーの寡占において企業が置かれている状況がどのように異なっているかに留意すること。

70.　(i) $k = \frac{1}{2}$ のとき

クールノー均衡

企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (36 - 2x_A + x_B)x_A - x_A$$

$$\pi_A = (36 - 2x_B + x_A)x_B - 2x_B$$

と表される。それぞれ x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$35 - 4x_A + x_B = 0$$

$$34 - 4x_B + x_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$x_A = \frac{58}{5},\ x_B = \frac{57}{5}$$

を得る。そのときの各企業が生産する財の価格は

$$p_A = \frac{121}{5},\ p_B = \frac{124}{5}$$

となる。

ベルトラン均衡

逆需要関数から需要関数を求めると

$$x_A = 36 - \frac{2}{3}p_A - \frac{1}{3}p_B$$

$$x_B = 36 - \frac{2}{3}p_B - \frac{1}{3}p_A$$

となる。企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = [36 - \frac{2}{3}p_A - \frac{1}{3}p_B](p_A - 1)$$

$$\pi_B = [36 - \frac{2}{3}p_B - \frac{1}{3}p_A](p_B - 2)$$

と表される。それぞれ p_A，p_B で微分してゼロとおくと

$$110 - 4p_A - p_B = 0$$

$$112 - 4p_B - p_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$p_A = \frac{328}{15},\ p_B = \frac{338}{15}$$

を得，そのときの各企業の産出量

$$x_A = \frac{626}{45},\ x_B = \frac{616}{45}$$

が得られる。

(ii) $k = -\frac{1}{2}$ のとき

クールノー均衡

企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (36 - 2x_A - x_B)x_A - x_A$$

$$\pi_A = (36 - 2x_B - x_A)x_B - 2x_B$$

と表される。それぞれ x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$35 - 4x_A - x_B = 0$$

$$34 - 4x_B - x_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$x_A = \frac{106}{15},\ x_B = \frac{101}{15}$$

を得る。そのときの各企業が生産する財の価格は

$$p_A = \frac{227}{15},\ p_B = \frac{232}{15}$$

となる。

ベルトラン均衡

逆需要関数から需要関数を求めると

$$x_A = 12 - \frac{2}{3}p_A + \frac{1}{3}p_B$$

$$x_B = 12 - \frac{2}{3}p_B + \frac{1}{3}p_A$$

となる。企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = [12 - \frac{2}{3}p_A + \frac{1}{3}p_B](p_A - 1)$$

$$\pi_B = [12 - \frac{2}{3}p_B + \frac{1}{3}p_A](p_B - 2)$$

と表される。それぞれ p_A，p_B で微分してゼロとおくと

$$38 - 4p_A + p_B = 0$$

$$40 - 4p_B + p_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$p_A = \frac{192}{15} = \frac{64}{5},\ p_B = \frac{198}{15} = \frac{66}{5}$$

を得る。そのときの各企業の産出量は

$$x_A = \frac{118}{15},\ x_B = \frac{112}{15}$$

である。

71. (i) クールノー均衡

企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (36 - 2x_A + x_B)x_A$$

$$\pi_B = (36 - 2x_B + x_A)x_B$$

と表される。それぞれ x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$36 - 4x_A + x_B = 0$$

$$36 - 4x_B + x_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$x_A = x_B = 12$$

を得る。各企業の利潤は次の通りである。

$$\pi_A = \pi_B = 288$$

(ii) シュタッケルベルク均衡

企業 B の行動はクールノー均衡と同一であるから，その反応関数は

$$x_B = 9 + \frac{1}{4}x_A$$

となる。そのとき企業 A の利潤は次のように表される。

$$\pi_A = (45 - \frac{7}{4}x_A)x_A$$

これを x_A で微分してゼロとおくと

$$45 - \frac{7}{2}x_A = 0$$

となり $x_A = \frac{90}{7}$ が得られる。そのとき $x_B = \frac{171}{14}$ であり，各企業が生産する財の価格はそれぞれ

$$p_A = \frac{315}{14},\ p_B = \frac{342}{14}$$

であるから，各企業の利潤は次のように求まる。

$$\pi_A = \frac{315}{14} \times \frac{90}{7} = \frac{28350}{98}$$

$$\pi_B = \frac{342}{14} \times \frac{171}{14} = \frac{29241}{98}$$

このとき $\pi_B > \pi_A$ である。

72. 均衡においては需要と供給が（各地域）で等しいから $d_1 = x_1$，$d_2 = x_2$ が成り立つ。需要関数から逆需要関数を求めると，それぞれの地域で

$$p_1 = 400 - x_1$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(600 - x_2)$$

となる。したがってこの企業の利潤は

$$\pi = (400 - x_1)x_1 + \frac{1}{2}(600 - x_2)x_2 - \frac{2x_1^2 + x_2^2}{2}$$

と表される。これを x_1，x_2 で微分すると

$$400 - 4x_1 = 0$$

$$300 - 2x_2 = 0$$

が得られるから供給量は $x_1 = 100$，$x_2 = 150$ となる。また価格はそれぞれ $p_1 = 300$，$p_2 = 225$ である。

73. （ヒント）Y 財の生産の減少によって X 財の生産をどのくらい増やすことができるか。またそれによって消費者の効用がどうなるかを考えよ。

74. (i) 企業の利潤 π は，X 財の投入量を x として

$$\pi = 20p_y\sqrt{2}\sqrt{x} - p_x x$$

と表される。これを x で微分してゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dx} = 10p_y\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - p_x = 0$$

より

$$x = 200\frac{p_y^2}{p_x^2}$$

$$y = 400\frac{p_y}{p_x}$$

が求まる。そのときの利潤は

$$\pi = p_y y - p_x x = 200\frac{p_y^2}{p_x}$$

である。

(ii) 個人 A の予算制約式は，X 財，Y 財の消費量を x，y として

$$p_x x + p_y y = 200 p_x + 100\frac{p_y^2}{p_x}$$

個人 B の予算制約式は

$$p_x x + p_y y = 100 p_x + 100\frac{p_y^2}{p_x}$$

と表される。個人 A の効用最大化問題を考えるとラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = xy^2 + \lambda(p_x x + p_y y - 200 p_x - 100\frac{p_y^2}{p_x})$$

となるから，これを x，y で微分すると

$$y^2 + \lambda p_x = 0$$

$$2xy + \lambda p_y = 0$$

が得られ，この両式から $p_y y = 2 p_x x$ を得る。したがって予算制約式より

$$x = \frac{200}{3} + \frac{100}{3}\frac{p_y^2}{p_x^2},\ y = \frac{400}{3}\frac{p_x}{p_y} + \frac{200}{3}\frac{p_y}{p_x}$$

が求まる。同様に個人 B のラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = x^2 y + \lambda(p_x x + p_y y - 100 p_x - 100\frac{p_y^2}{p_x})$$

となるから，これを x，y で微分すると

$$2xy + \lambda p_x = 0$$

$$x^2 + \lambda p_y = 0$$

が得られ，この両式から $p_x x = 2 p_y y$ を得る。したがって予算制約式より

$$x = \frac{200}{3} + \frac{200}{3}\frac{p_y^2}{p_x^2},\ y = \frac{100}{3}\frac{p_x}{p_y} + \frac{100}{3}\frac{p_y}{p_x}$$

が求まる。

(iii) X 財の需要・供給の均衡条件は

$$\frac{400}{3} + 100\frac{p_y^2}{p_x^2} + 200\frac{p_y^2}{p_x^2} = 300$$

需要の合計は各消費者の需要と企業の投入量の和に等しい（左辺第 3 項が企業の投入量)。この式を整理すると $\frac{p_y^2}{p_x^2} = \frac{500}{900}$ が得られ，分子・分母を逆にして

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

が求まる。これが均衡における X，Y の相対価格である。

一方 Y 財の需要・供給の均衡条件は次のようにあらわされる。

$$\frac{500}{3}\frac{p_x}{p_y} + 100\frac{p_y}{p_x} = 400\frac{p_y}{p_x}$$

左辺は消費者の需要の合計，右辺は企業の供給である。この式からも $\frac{p_x}{p_y} = \frac{3}{\sqrt{5}}$ が得られる。すなわち X 財の市場が均衡すれば Y 財の市場も均衡するというワルラスの法則が成り立つ。

75. 企業の費用は

$$c = wL + rK$$

と表され，ラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = wL + rK + \lambda(L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} - 4)$$

となる。w，r 一定のもとでこれを L，K で微分すると

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial L} = w + \frac{2}{3}L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial K} = r + \frac{1}{3}L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}}\lambda = 0$$

が得られる。この両式から

$$L = \frac{2r}{w}K$$

を得る。生産関数より $L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} = 4$ であるから

$$L = 4\left(\frac{2r}{w}\right)^{\frac{1}{3}},\ K = 4\left(\frac{w}{2r}\right)^{\frac{2}{3}}$$

が求まる。$L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{3}} = 4$ を満たすような L と K の変化 ΔL，ΔK を考えると $\frac{2}{3}L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}\Delta L + \frac{1}{3}L^{\frac{2}{3}}K^{-\frac{2}{3}}\Delta K = 0$ より $\Delta K = -2\frac{K}{L}\Delta L$ が得られる。この関係を満たす費用の変化を Δc とすると

$$\Delta c = w\Delta L + r\Delta K = (w - 2r\frac{K}{L})\Delta L$$

が得られる。$\Delta L > 0$（労働投入量の増加）として $w - 2r\frac{K}{L} < 0$ のとき $\Delta c < 0$, $w - 2r\frac{K}{L} > 0$ のとき $\Delta c > 0$ なので $L = \frac{2r}{w}K$ を満たす水準よりも L が小さい

ときに L の増加によって費用が減少し，その水準よりも L が大きいときには L の増加によって費用が増加する。したがって $L=\frac{2r}{w}K$ が成り立つところで費用が最小化される。

（ここ追加）

76. 前問と同様。

企業の費用は

$$c = wL + rK$$

と表され，ラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = wL + rK + \lambda(L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}} - \bar{x})$$

となる。w，r 一定のもとでこれを L，K で微分すると

$$w + \frac{1}{4}L^{-\frac{3}{4}}K^{\frac{3}{4}}\lambda = 0$$

$$r + \frac{3}{4}L^{\frac{1}{4}}K^{-\frac{1}{4}}\lambda = 0$$

が得られる。この両式から

$$L = \frac{r}{3w}K$$

を得る。生産関数より $L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}} = \bar{x}$ であるから

$$L = \left(\frac{r}{3w}\right)^{\frac{3}{4}}\bar{x},\ K = \left(\frac{3w}{r}\right)^{\frac{1}{4}}\bar{x}$$

が求まる。$L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}} = \bar{x}$ を満たすような L と K の変化 ΔL，ΔK を考えると $\frac{1}{4}L^{-\frac{3}{4}}K^{\frac{3}{4}}\Delta L + \frac{3}{4}L^{\frac{1}{4}}K^{-\frac{1}{4}}\Delta K = 0$ より $\Delta K = -\frac{1}{3}\frac{K}{L}\Delta L$ が得られる。この関係を満たす費用の変化を Δc とすると

$$\Delta c = w\Delta L + r\Delta K = (w - \frac{r}{3}\frac{K}{L})\Delta L$$

が得られる。$\Delta L > 0$（労働投入量の増加）として $w - \frac{r}{3}\frac{K}{L} < 0$ のとき $\Delta c < 0$, $w - \frac{r}{3}\frac{K}{L} > 0$ のとき $\Delta c > 0$ なので $L = \frac{r}{3w}K$ を満たす水準よりも L が小さいときに L の増加によって費用が減少し，その水準よりも L が大きいときには L の増加によって費用が増加する。したがって $L = \frac{r}{3w}K$ が成り立つところで費用が最小化される。

（ここ追加）

77. ある企業（企業 i とする）の利潤は

$$\pi_i = px_i - x_i^2 - 100 = (240 - 3X)x_i - x_i^2 - 100,$$

$$X = x_1 + x_2 + \cdots x_i + \cdots + x_n$$

と表される。x_i 以外の産出量を一定としてこれを x_i で微分してゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dx_i} = 240 - 3x_i - 3X - 2x_i = 0$$

が得られる。均衡においてはすべての企業の産出量が等しいので $X = nx_i$ であるから

$$x_i = \frac{240}{3n+5}$$

が求まる。全企業の産出量の合計は

$$X = nx_i = \frac{240n}{3n+5}$$

であるが，この式は

$$X = \frac{240}{3+\frac{5}{n}}$$

と変形されるので，n が非常に大きな値になって行くと X は 80 に近づいて行く。そのとき財の価格は 0 に近づく。

各企業（企業 i で代表させる）の費用関数が $c_i = 3x_i$ であるとすると利潤は

$$\pi_i = px_i - 3x_i = (240 - 3X)x_i - 3x_i,\ X = x_1 + x_2 + \cdots x_i + \cdots + x_n$$

と表される。x_i 以外の産出量を一定としてこれを x_i で微分してゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dx_i} = 237 - 3x_i - 3X = 0$$

が得られる。均衡においてはすべての企業の産出量が等しいので $X = nx_i$ であるから

$$x_i = \frac{79}{n+1}$$

が求まる。全企業の産出量の合計は

$$X = nx_i = \frac{79n}{n+1}$$

であるが，この式は

$$X = \frac{79}{1+\frac{1}{n}}$$

と変形されるので，n が非常に大きな値になって行くと X は 79 に近づいて行く。そのとき財の価格は 3 に近づく。

78. プレイヤー A，B それぞれの最適反応を考えよう。

(i) プレイヤー A の最適反応
B が X を選んだときは Y が最適であり，B が Y を選んだときは X が最適である。

(ii) プレイヤーBの最適反応

A が X を選んだときは Y が最適であり，A が Y を選んだときは X も Y も最適である。

したがってナッシュ均衡は（X, Y）（A が X，B が Y）および (Y, X)（A が Y, B が X）の 2 つある。

79. （1 つの例）

$b > a, a > 5, 2a > b + 2$ となるように a，b を選ぶ。例えば $a = 6$，$b = 8$ と仮定してみよう。するとこのゲームは次のように表される。

		プレイヤーB	
プレイヤーA		大	小
	大	6, 6	2, 8
	小	8, 2	5, 5

最適反応は次のようになる。

(i) プレイヤーAの最適反応

B が大を選んだときは小が最適であり，B が小を選んだときにも小が最適である。

(ii) プレイヤーBの最適反応

A が大を選んだときは小が最適であり，A が小を選んだときにも小が最適である。

したがって「小」が両方のプレイヤーにとって支配戦略となり，ナッシュ均衡は (小, 小) のみである。

80. （1 つの例）

例えば $a = 8$，$b = 6$，$c = 4$ と仮定してみよう。するとこのゲームは次のように表される。

		プレイヤーB	
プレイヤーA		大	小
	大	8, 8	4, 6
	小	6, 4	2, 2

最適反応は次のようになる。

(i) プレイヤーAの最適反応

B が大を選んだときは大が最適であり，B が小を選んだときも大が最適である。

(ii) プレイヤー B の最適反応

A が大を選んだときは大が最適であり，A が小を選んだときも大が最適である。

したがってナッシュ均衡は (大, 大) のみである。

81. 最適反応は次のようになる。

(i) プレイヤー A の最適反応

B が X を選んだときは X が最適であり，B が Y を選んだときにも X が最適である。

(ii) プレイヤー B の最適反応

A が X を選んだときは X が最適であり，A が Y を選んだときは Y が最適である。

したがってナッシュ均衡は (X, X)（ともに X を選ぶ）である。

82. プレイヤー A が X を選ぶ確率を $p(0 \leqq p \leqq 1)$，プレイヤー B が X を選ぶ確率を $q(0 \leqq q \leqq 1)$ とすると，プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = 3pq + 3p(1-q) + 3(1-p)q + 2(1-p)(1-q) = 2 + p(1-q) + q$$

$$\pi_B = 2pq + 4p(1-q) + 4(1-p)q + 3(1-p)(1-q) = 3 + q(1-3p) + p$$

となる。各プレイヤーの最適反応は以下の通りである。

(i) プレイヤー A の最適反応

i. $q < 1$ のときは $p = 1$ が最適

ii. $q = 1$ のときは p の値は何でもよい

(ii) プレイヤー B の最適反応

i. $\frac{1}{3} < p \leqq 1$ のときは $q = 0$ が最適

ii. $0 \leqq p < \frac{1}{3}$ のときは $q = 1$ が最適

iii. $p = \frac{1}{3}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は次のように分類される。

(i) $p = 1, q = 0$。これはプレイヤー A が X，B が Y を選ぶ純粋戦略からなる均衡である。

(ii) $q = 1$ で $0 \leqq p \leqq \frac{1}{3}$。この均衡ではプレイヤー B は純粋戦略として X を選ぶが，プレイヤー A は $0 \leqq p \leqq \frac{1}{3}$ の範囲で純粋戦略（Y）または混合戦略を選ぶ。

83. プレイヤー A が X を選ぶ確率を $p(0 \leqq p \leqq 1)$，プレイヤー B が X を選ぶ確率を $q(0 \leqq q \leqq 1)$ とすると，プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = 2pq+3p(1-q)+4(1-p)q+2(1-p)(1-q) = 2+p+2q-3pq = 1+p(1-3q)+2q$$

$$\pi_B = 4pq+2p(1-q)+2(1-p)q+3(1-p)(1-q) = 3-p-q+3pq = 3+q(3p-1)p-p$$

となる。各プレイヤーの最適反応は以下の通りである。

(i) プレイヤー A の最適反応

i. $\frac{1}{3} < q \leqq 1$ のときは $p = 0$ が最適
ii. $0 \leqq q < \frac{1}{3}$ のときは $p = 1$ が最適
iii. $q = \frac{1}{3}$ のときは p の値は何でもよい

(ii) プレイヤー B の最適反応

i. $\frac{1}{3} < p \leqq 1$ のときは $q = 1$ が最適
ii. $0 \leqq p < \frac{1}{3}$ のときは $q = 0$ が最適
iii. $p = \frac{1}{3}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は $p = \frac{1}{3}$，$q = \frac{1}{3}$ のときのみである（p と q の値が等しいのはこのゲームの構造によるものであり混合戦略によるナッシュ均衡において常にそうであるとは限らない)。

84. プレイヤー A が X を選ぶ確率を $p(0 \leqq p \leqq 1)$，プレイヤー B が X を選ぶ確率を $q(0 \leqq q \leqq 1)$ とすると，プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = 3pq + 2p(1-q) + 2(1-p)q + 4(1-p)(1-q) = 4 + p(3q-2) - 2q$$

$$\pi_B = 4pq + 2p(1-q) + 2(1-p)q + 3(1-p)(1-q) = 3 + q(3p-1) - p$$

となる。各プレイヤーの最適反応は以下の通りである。

(i) プレイヤー A の最適反応

i. $\frac{2}{3} < q \leqq 1$ のときは $p = 1$ が最適
ii. $0 \leqq q < \frac{2}{3}$ のときは $p = 0$ が最適
iii. $q = \frac{2}{3}$ のときは p の値は何でもよい

(ii) プレイヤー B の最適反応

i. $\frac{1}{3} < p \leqq 1$ のときは $q = 1$ が最適
ii. $0 \leqq p < \frac{1}{3}$ のときは $q = 0$ が最適
iii. $p = \frac{1}{3}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は次のように分類される。

(i) $p = 1, q = 1$。これはプレイヤーA，Bがともに X を選ぶ純粋戦略による均衡である。

(ii) $p = 0, q = 0$。これはプレイヤーA，Bがともに Y を選ぶ純粋戦略による均衡である。

(iii) $p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$。これはともに（純粋戦略ではない）混合戦略を選ぶ均衡である。

85. プレイヤーAの戦略は X と Y の 2 つであるが，プレイヤーBの戦略は次の 4 つある。

(i) XX：A が X のときは X，Y のときも X

(ii) XY：A が X のときは X，Y のときは Y

(iii) YX：A が X のときは Y，Y のときは X

(iv) YY：A が X のときは Y，Y のときも Y

この動学的なゲームを標準型ゲームで表現すると次の表が得られる。

プレイヤーB

プレイヤーA		XX	XY	YX	YY
	戦略X	1, 1	1, 1	2, 4	2, 4
	戦略Y	4, 2	1, 1	4, 2	1, 1

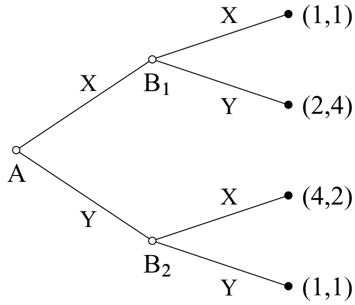
最適反応を考えてみよう。

(i) プレイヤーAの最適反応
B が XX を選んだときは Y が最適であり，B が XY を選んだときは X も Y も最適であり，B が YX を選んだときは Y が最適であり，B が YY を選んだときは X が最適である。

(ii) プレイヤーBの最適反応
A が X を選んだときは YX と YY が最適であり，A が Y を選んだときは XX と YX が最適である。

したがってナッシュ均衡は (X, YY)（A が X，B が YY），(Y, XX)（A が Y，B が XX），(Y, YX)（A が Y，B が YX）の 3 つある。しかし (X, YY) は A が Y を選んだときに B が Y を選ぶという前提に立っており合理的ではない。また (Y, XX) は A が X を選んだときに B が X を選ぶという前提に立っておりこれも合理的ではない。したがって合理的なナッシュ均衡（部分ゲーム完全均衡）は (Y, YX) である。

86. ゲームの樹は次のように描かれる。



A はプレイヤー A が，B_1，B_2 はプレイヤー B が意思決定する時点を表している。B_1 において B は Y を選び，B_2 においては X を選ぶ。それに対応して A は Y を選ぶ。したがって部分ゲーム完全均衡は (Y, YX) である。

87. B_1 において B は X を選び，B_2 においては Y を選ぶ。それに対応して A は Y を選ぶ。したがって部分ゲーム完全均衡は (Y, XY) である。

88. アメリカが核兵器を持つ確率を p，ロシアが核兵器を持つ確率を q とする。アメリカ，ロシアの期待利得はそれぞれ次のように表される。

$$\pi_A = -8pq + 3p(1-q) - 12(1-p)q + 6(1-p)(1-q) = p(7q-3) - 18q + 6$$

$$\pi_R = -8pq - 12p(1-q) + 3(1-p)q + 6(1-p)(1-q) = q(7p-3) - 18p + 6$$

アメリカの最適反応は以下のようである。

(i) $0 \leqq q < \frac{3}{7}$ のとき $p = 0$ が最適

(ii) $\frac{3}{7} < q \leqq 1$ のとき $p = 1$ が最適

(iii) $q = \frac{3}{7}$ のとき p は何でもよい（$0 \leqq p \leqq 1$ の範囲で）

ロシアの最適反応も同様に

(i) $0 \leqq p < \frac{3}{7}$ のとき $q = 0$ が最適

(ii) $\frac{3}{7} < p \leqq 1$ のとき $q = 1$ が最適

(iii) $p = \frac{3}{7}$ のとき q は何でもよい（$0 \leqq q \leqq 1$ の範囲で）

である。したがってナッシュ均衡は以下のようになる。

(i) $p = 0$，$q = 0$。これはアメリカ，ロシア両国が核兵器を持たない純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。

(ii) $p=1$，$q=1$。これはアメリカ，ロシア両国が核兵器を持つ純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。

(iii) $p=\frac{3}{7}$，$q=\frac{3}{7}$。これは両国が純粋戦略ではない混合戦略を選ぶナッシュ均衡である。

89. アメリカが核兵器を持つ確率を p，ロシアが核兵器を持つ確率を q とする。アメリカ，ロシアの期待利得はそれぞれ次のように表される。

$$\pi_A = -18pq + 8p(1-q) - 12(1-p)q + 6(1-p)(1-q) = 2p(1-4q) - 18q + 6$$

$$\pi_R = -18pq - 12p(1-q) + 8(1-p)q + 6(1-p)(1-q) = 2q(1-4p) - 18p + 6$$

アメリカの最適反応は以下のようである。

(i) $0 \leqq q < \frac{1}{4}$ のとき $p=1$ が最適

(ii) $\frac{1}{4} < q \leqq 1$ のとき $p=0$ が最適

(iii) $q=\frac{1}{4}$ のとき p は何でもよい（$0 \leqq p \leqq 1$ の範囲で）

ロシアの最適反応も同様に

(i) $0 \leqq p < \frac{1}{4}$ のとき $q=1$ が最適

(ii) $\frac{1}{4} < p \leqq 1$ のとき $q=0$ が最適

(iii) $p=\frac{1}{4}$ のとき q は何でもよい（$0 \leqq q \leqq 1$ の範囲で）

である。したがってナッシュ均衡は以下のようになる。

(i) $p=0$，$q=1$。これはアメリカが核兵器を持たず，ロシアが持つという純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。

(ii) $p=1$，$q=0$。これはアメリカが核兵器を持ち，ロシアが持たないという純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。

(iii) $p=\frac{1}{4}$，$q=\frac{1}{4}$。これは両国が純粋戦略ではない混合戦略を選ぶナッシュ均衡である。

90. 企業 2 の利潤は

$$\pi_2 = [24 - 2(x_2 + kx_1)]x_2$$

であるから x_1 を与えられたものとしてこれを x_2 で微分してゼロとおくと

$$24 - 2kx_1 - 4x_2 = 0$$

より

$$x_2 = 6 - \frac{k}{2}x_1$$

が得られる。これをもとに企業 1 の利潤は

$$\pi_1 = [24 - 2(x_1 + 6k - \frac{k^2}{2}x_1)]x_1$$

と表される。したがって企業 1 の利潤最大化条件は

$$24 - 12k - 2(2 - k^2)x_1 = 0$$

となり

$$x_1 = \frac{6(2-k)}{2-k^2}$$

を得る。そのときの企業 2 の産出量は

$$x_2 = 6 - k\frac{3(2-k)}{2-k^2} = \frac{3(4-2k-k^2)}{2-k^2}$$

である。また，各企業が生産する財の価格は

$$p_1 = 24 - 2x_1 - 2kx_2 = \frac{6[4-2k-2k^2+k^3]}{2-k^2} = 6(2-k)$$

$$p_2 = 24 - 2kx_1 - 2x_2 = \frac{6[4-2k-k^2]}{2-k^2}$$

であるから，企業 1，2 の利潤はそれぞれ

$$\pi_1 = p_1x_1 = \frac{36(2-k)^2}{2-k^2},\ \pi_2 = p_2x_2 = \frac{18(4-2k-k^2)^2}{(2-k^2)^2}$$

となる。これらを比較すると

$$\begin{aligned}\pi_1 - \pi_2 =& \frac{36(2-k)^2}{2-k^2} - \frac{18(4-2k-k^2)^2}{(2-k^2)^2} \\ =& \frac{18}{(2-k^2)^2}[2(4-4k+k^2)(2-k^2) - (4-2k-k^2)^2] \\ =& \frac{18k^3}{(2-k^2)^2}(4-3k)\end{aligned}$$

となる。したがって $-1 < k < 1$ であるから $k > 0$ のとき $\pi_1 > \pi_2$，$k < 0$ のとき $\pi_1 < \pi_2$ である。

91. (i) 企業 1，2 の利潤最大化条件は

$$36 - 4p_1 + p_2 = 0$$

$$36 - 4p_2 + p_1 = 0$$

これらより $p_1 = p_2 = 12$ が求まる。

(ii) 企業 2 の反応関数は

$$p_2 = 9 + \frac{1}{4}p_1$$

となるから企業 1 の利潤は

$$\pi_1 = (45 - \frac{7}{4}p_1)p_1$$

と表される。したがって利潤最大化条件は

$$45 - \frac{7}{2}p_1 = 0$$

となり。$p_1 = \frac{90}{7}$ が得られる。そのとき $p_2 = \frac{171}{14}$ である。需要関数より各企業の産出量は $x_1 = \frac{315}{14} = \frac{45}{2}$，$x_2 = \frac{171}{7}$ となるので利潤

$$\pi_1 = \frac{28350}{98},\ \pi_2 = \frac{29241}{98}$$

が得られる。このとき $\pi_2 > \pi_1$ であるからフォローワーである企業 2 の利潤の方が大きい。

92. 各プレイヤーの入札額を p_1，p_2 として，以下の入札額がベイジアン・ナッシュ均衡であることを示さなければならない。

$$p_1 = \frac{v_1 + 1}{2},\ p_2 = \frac{v_2 + 1}{2}$$

プレイヤー 1 が上記の入札額を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が入札額 p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > \frac{v_1+1}{2}$ となる場合であるが，一様分布の仮定により $\frac{v_1+1}{2}$ は 1 から $\frac{3}{2}$ までの値を等しい確率でとる（$1 \leqq v_1 \leqq 2$ であるから）。したがって入札に勝つ確率は $1 \leqq p_2 \leqq \frac{3}{2}$ として $2(p_2 - 1)$ に等しい。勝ったときの利得は $v_2 - p_2$ であるから期待利得は

$$2(p_2 - 1)(v_2 - p_2) = -2(p_2^2 - p_2 - p_2 v_2 + v_2)$$

となる。これを p_2 で微分してゼロとおくと

$$2p_2 - 1 - v_2 = 0$$

が得られ，期待利得を最大化する入札額は

$$p_2 = \frac{v_2 + 1}{2}$$

と求まる。プレイヤー 1 と 2 を入れ替えると同様の議論によって

$$p_1 = \frac{v_1 + 1}{2}$$

を得る。

93. 各プレイヤーの入札額を p_1，p_2 として，以下の入札額がベイジアン・ナッシュ均衡であることを示さなければならない。

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1,\ p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$$

プレイヤー 1 が上記の入札額を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が入札額 p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > \frac{v_1}{2} + 1$ となる場合であるが，一様分布の仮定により $\frac{v_1}{2} + 1$ は 2 から 3.5 までの値を等しい確率でとる（$2 \leqq v_1 \leqq 5$ であるから）。したがって入札に勝つ確率は $2 \leqq p_2 \leqq 3.5$ として $\frac{2(p_2-2)}{3}$ である。勝ったときの利得は $v_2 - p_2$ であるから期待利得は

$$\frac{2}{3}(p_2 - 2)(v_2 - p_2) = -\frac{2}{3}(p_2^2 - 2p_2 - p_2 v_2 + 2v_2)$$

となる。これを p_2 で微分してゼロとおくと

$$2p_2 - (2 + v_2) = 0$$

が得られ，期待利得を最大化する入札額は

$$p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$$

と求まる。プレイヤー 1 と 2 を入れ替えると同様の議論によって

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1$$

を得る。

94. プレイヤー 2 の入札額を

$$p_2 = p_2(v_2)$$

とする。この逆関数を

$$v_2 = g_2(p_2)$$

と表す。プレイヤー 1 の入札額を p_1 とすると落札する確率（$p_1 > p_2$ となる確率）は $g_2(p_1) - 1$ に等しい（一様分布の仮定によって）。そのとき期待利得は

$$(v_1 - p_1)(g_2(p_1) - 1)$$

となる。これを p_1 で微分してゼロとおくと

$$(v_1 - p_1)g_2'(p_1) - g_2(p_1) + 1 = 0$$

が得られる。$g_2'(p_1) = g_1'(p_1)$ より上の式は

$$(v_1 - p_1(v_1))g_1'(p_1) - g_1(p_1) + 1 = 0$$

と書き直される。さらに

$$g_1'(p_1) = \frac{1}{p_1'(v_1)}$$

であるから，

$$(v_1 - p_1(v_1))\frac{1}{p_1'(v_1)} - v_1 + 1 = 0$$

が導かれ，これを整理して

$$(v_1 - p_1(v_1)) - (v_1 - 1)p_1'(v_1) = 0$$

を得る。この式を満たす関数 $p_1(v_1)$ は

$$p_1 = \frac{v_1 + 1}{2}$$

である。実際 $p_1' = \frac{1}{2}$ であるから上の式に代入すると

$$(v_1 - \frac{v_1}{2} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2} = 0$$

が成り立つ。

95. プレイヤー 2 の入札額を $p_2 = p_2(v_2)$ とし，その逆関数を $v_2 = g_2(p_2)$ と表す。プレイヤー 1 の入札額を p_1 とすると落札する確率（$p_1 > p_2$ となる確率）は $\frac{g_2(p_1)-2}{3}$ に等しい（一様分布の仮定によって）。そのとき期待利得は

$$\frac{1}{3}(v_1 - p_1)(g_2(p_1) - 2)$$

となる。これを p_1 で微分してゼロとおくと

$$(v_1 - p_1)g_2'(p_1) - g_2(p_1) + 2 = 0$$

が得られる。以下は上の問題とほぼ同じ。

96. 割り引き因子を δ とすると戦略 Y を選ぶことが絶対に利益にならない条件は次の通りである。

$$3[1 + \delta + \delta^2 + \cdots] > 6 + [\delta + \delta^2 + \cdots]$$

これより

$$\frac{3}{1-\delta} > 6 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

が得られ

$$\delta > \frac{3}{5}$$

が求まる。したがって割り引き因子が $\frac{3}{5}$ より大きければ（それ以上に割り引かなければ），ともに上記のトリガー戦略を選ぶことが部分ゲーム完全均衡となり戦略 X を選ぶ状態が永遠に続く。割引率 $r(\frac{1}{1+r} = \delta)$ で表せばこの条件は $r < \frac{2}{3}$ となる。

97. 割り引き因子を δ とすると，3 回のゲームで相手が「戦略 X」「戦略 Y」「戦略 Y」を選び自分が「戦略 Y」を選ぶときの（割引を含めた）自分の利得は

$$6+\delta+\delta^2 \tag{15}$$

であり，互いに「戦略 X」を選び続けるときの（割引を含めた）自分の利得は

$$3(1+\delta+\delta^2) \tag{16}$$

である。(16) が (15) より大きくなる条件は $2\delta+2\delta^2>3$ であり，この式から

$$\delta>0.823$$

が得られる。

98. (i) **完全ベイジアン均衡 1 の確認： プレイヤー A の戦略の最適性** プレイヤー A が Y を選んだときプレイヤー B は N を，X を選んだときは F を選ぶのでタイプ S のプレイヤー A が Y を選んだときに得られる利得は 3，X を選んだときに得られる利得は 0 であるから Y を選ぶのは最適である。またタイプ W のプレイヤー A が Y を選んだときに得られる利得は 1，X を選んだときに得られる利得は 2 であるから X を選ぶのは最適である。

プレイヤー B の戦略の最適性 プレイヤー B はプレイヤー A が Y を選んだときにそれが間違いなくタイプ S であるという推測を持つので N が最適である。またプレイヤー A が X を選んだときにそれが間違いなくタイプ W であるという推測を持つので F が最適である。

プレイヤー B の推測の整合性 この均衡おいてはタイプ S のプレイヤー A とタイプ W のプレイヤー A が異なる戦略を選ぶから，それぞれに応じて明確な推測を持つことができる。タイプ S のプレイヤー A は Y を，タイプ W のプレイヤー A は X を選ぶので完全ベイジアン均衡 1 に示されている推測は整合的である。

完全ベイジアン均衡 2 の確認： プレイヤー A の戦略の最適性 プレイヤー A が Y を選んだときプレイヤー B は F を，X を選んだときは N を選ぶのでタイプ S のプレイヤー A が Y を選んだときに得られる利得は 1，X を選んだときに得られる利得は 2 であるから X を選ぶのは最適である。またタイプ W のプレイヤー A が Y を選んだときに得られる利得は 2，X を選んだときに得られる利得は 3 であるから X を選ぶのは最適である。

プレイヤー B の戦略の最適性 プレイヤー B はプレイヤー A が Y を選んだときにそれが $\frac{1}{2}$ より小さい確率でタイプ S であるという推

測を持つので F が最適である。またプレイヤー A が X を選んだときにそれが確率 $\frac{2}{3}$ でタイプ S であるという推測を持つので N が最適である。

プレイヤー B の推測の整合性 この均衡においてはどちらのタイプのプレイヤー A も X を選ぶから，プレイヤー A が X を選んだときのプレイヤー B の推測はゲームが始まる前の確率と同じでなければならない。一方どちらのタイプのプレイヤー A も Y を選ばないので，プレイヤー A が Y を選んだときのプレイヤー B の推測には制約はなく，どのような推測を持ってもかまわない。

(ii) **完全ベイジアン均衡 1 の合理性** タイプ S のプレイヤー A とタイプ W のプレイヤー A とが異なる戦略を選ぶのでプレイヤー B の推測の合理性には問題がない。

完全ベイジアン均衡 2 の合理性 問題はプレイヤー A が X を選んだときにプレイヤー B が持つ推測が合理的であるかどうかである。この均衡はプレイヤー A が Y を選んだときにそれが $\frac{1}{2}$ より大きい確率でタイプ W であるという推測を持つという前提に基づいている。タイプ W のプレイヤー A が Y を選んだときに得ることができる最大の利得は 2 であるがそれは均衡の利得 3 よりも小さい。一方タイプ S のプレイヤー A が Y を選んだときに得ることができる最大の利得は 3 であり，それは均衡利得 2 よりも大きい。したがってプレイヤー A が Y を選んだとき，プレイヤー B はそれが間違いなくタイプ S であるという推測を持つべきであるということになる。そうするとプレイヤー A が Y を選んだときプレイヤー B は N を選ぶのが最適となり，完全ベイジアン均衡 2 は均衡ではなくなる。

(iii) そのような均衡があるとすれば企業 A がタイプ S である確率が $\frac{2}{3}$ であるから，両タイプの企業 A が Y を選んだとき企業 B は N を選ぶのが最適となる。そうするとタイプ W の企業 A は X を選んだ方が大きな利得を得られるので均衡とはならない。

(iv) そのような均衡があるとすれば，企業 A が Y を選んだとき企業 B は F を，企業 A が X を選んだとき企業 B は N を選ぶのが最適である。そうするとタイプ W の企業 A は X を選んだ方が大きな利得を得られるので均衡とはならない。

99. （各自考えてみていただきたい）

100. まずすべての個体が戦略 Y を選んでいるときに，わずかな割合 (p)（p はごく小さな正の数）で戦略 X を選ぶ個体が出現したとしてみよう。そのとき Y を選ぶ個体の期待利得は $6(1-p)+p=6-5p$ であり，X を選ぶ個体の期待利得は

$10(1-p)+4p=10-6p$ であるから，p が小さいならば X を選ぶ個体の利得の方が大きい。したがって戦略 Y は進化的に安定な戦略ではない。

一方すべての個体が戦略 X を選んでいるときに，わずかな割合 (p) で（確率 q で X を選ぶ）混合戦略（戦略 J とする）を選ぶ個体が出現したとする。そのとき X を選ぶ個体の期待利得を $E(X)$ とすると

$$E(X)=4(1-p)+pF(q)\text{（}F(q)\text{は }p\text{ に関係のない }q\text{ の関数）}$$

であり，J を選ぶ個体の期待利得を $E(J)$ とすると

$$E(J)=(1-p)[4q+(1-q)]+pG(q)=(1-p)(1+3q)+pG(q)\text{（}G(q)\text{は }p\text{ に関係のない }q\text{ の関数）}$$

である。差をとれば

$$E(X)-E(J)=3(1-p)(1-q)+pH(q)\text{（}H(q)\text{は }p\text{ に関係のない }q\text{ の関数）}$$

となるから p が小さく $1-q>0$（Y を選ぶ確率が正）であれば $E(X)>E(J)$ である。したがって戦略 X は進化的に安定な戦略である。

101. $E(A,B)$ と $E(B,B)$ の差をとると

$$\begin{aligned}E(A,B)-E(B,B)=&(r-q)[qE(H,H)+(1-q)E(H,D)-qE(D,H)-(1-q)E(D,D)]\\=&(r-q)[\frac{1}{2}q(V-C)+(1-q)V-\frac{1}{2}(1-q)V]=\frac{1}{2}(r-q)[-qC+V]\end{aligned}$$

となるが，$r=\frac{V}{C}$ より

$$E(A,B)-E(B,B)=\frac{1}{2}(r-q)^2C>0\ (r\neq q\text{ ならば})$$

が導かれ，$E(A,B)>E(B,B)$ を得る。

102. すべての個体が戦略 X を選んでいるときに，わずかな割合 (p) で（確率 q で X を選ぶ）混合戦略（戦略 J とする）を選ぶ個体が出現したとする。そのとき X を選ぶ個体の期待利得を $E(X)$ とすると

$$E(X)=3(1-p)+pF(q)\text{（}F(q)\text{は }p\text{ に関係のない }q\text{ の関数）}$$

であり，J を選ぶ個体の期待利得を $E(J)$ とすると

$$E(J)=(3q+1-q)(1-p)+pG(q)\text{（}F(q)\text{は }p\text{ に関係のない }q\text{ の関数）}$$

である。差をとれば

$$E(X)-E(J)=2(1-p)(1-q)+pH(q)\text{（}H(q)\text{は }p\text{ に関係のない }q\text{ の関数）}$$

となるから p が小さく $q < 1$（Y を選ぶ確率が正）であれば X を選ぶ個体の利得の方が大きい。したがって戦略 X は進化的に安定な戦略である。

一方すべての個体が戦略 Y を選んでいるときに，わずかな割合 (p) で戦略 J を選ぶ個体が出現したとする。そのとき Y を選ぶ個体の期待利得を $E(Y)$ とすると

$$E(Y) = 1 - p + pF(q) \text{（$F(q)$は p に関係のない q の関数）}$$

であり，J を選ぶ個体の期待利得は

$$E(J) = (1 - p)(1 - q) + pG(q) \text{（$G(q)$は p に関係のない q の関数）}$$

である。差をとれば

$$E(Y) - E(J) = q(1 - p) + pH(q) \text{（$H(q)$は p に関係のない q の関数）}$$

となる。p が小さく $q > 0$ ならば（X を選ぶ確率が正）Y を選ぶ個体の利得の方が大きい。したがって戦略 Y も進化的に安定な戦略である。

103. まずすべての個体が戦略 X を選んでいるときに，わずかな割合 (p)（p はごく小さな正の数）で戦略 Y を選ぶ個体が出現したとしてみよう。そのとき X を選ぶ個体の期待利得を $E(X)$ とすると

$$E(X) = 1 - p + 3p = 1 + 2p$$

であり，Y を選ぶ個体の期待利得を $E(Y)$ とすると

$$E(Y) = 4(1 - p) + p = 4 - 3p$$

である。p の値が小さければ Y を選ぶ個体の利得の方が大きい。したがって戦略 X は進化的に安定な戦略ではない。一方すべての個体が戦略 Y を選んでいるときに，わずかな割合 (p) で戦略 X を選ぶ個体が出現したとする。そのとき Y を選ぶ個体の期待利得は

$$E(Y) = 1 - p + 4p = 1 + 3p$$

であり，X を選ぶ個体の期待利得は

$$E(X) = 3(1 - p) + p = 3 - 2p$$

である。p が小さければ X を選ぶ個体の利得の方が大きい。したがって戦略 Y も進化的に安定な戦略ではない。そこで確率 $\frac{2}{5}$ で戦略 X を，確率 $\frac{3}{5}$ で戦略 Y を選ぶ混合戦略を考えてみよう。これを戦略 I とする。このとき

$$E(I, I) = \frac{2}{5}E(X, I) + \frac{3}{5}E(Y, I)$$

であるが

$$E(X,I)[=\frac{2}{5}E(X,X)+\frac{3}{5}E(X,Y)]=E(Y,I)[=\frac{2}{5}E(Y,X)+\frac{3}{5}E(Y,Y)]=\frac{11}{5}$$

が成り立つ。したがって $E(I,I)=\frac{11}{5}$ である。確率 $q(\neq\frac{2}{3})$ で X を，$1-q$ で Y を選ぶ任意の戦略を J として，すべての個体が戦略 I を選んでいる状態においてわずかな割合 (p) で戦略 J を選ぶ個体が出現したとしてみよう。そのとき I を選ぶ個体の期待利得を $E(I)$ とすると

$$\begin{aligned}E(I)=&(1-p)E(I,I)+pE(I,J)=(1-p)\frac{11}{5}+p[\frac{2}{5}E(X,J)+\frac{3}{5}E(Y,J)]\\=&(1-p)\frac{11}{5}+p\left\{\frac{2}{5}[qE(X,X)+(1-q)E(X,Y)]+\frac{3}{5}[qE(Y,X)+(1-q)E(Y,Y)]\right\}\\=&(1-p)\frac{11}{5}+p\frac{5q+9}{5}\end{aligned}$$

となる。一方 J を選ぶ個体の期待利得を $E(J)$ とすると

$$\begin{aligned}E(J)=&(1-p)E(J,I)+pE(J,J)=(1-p)[qE(X,I)+(1-q)E(Y,I)]\\&+p[qE(X,J)+(1-q)E(Y,J)]\\=&(1-p)\frac{11}{5}+p\{q[qE(X,X)+(1-q)E(X,Y)]+(1-q)[qE(Y,X)+(1-q)E(Y,Y)]\}\\=&(1-p)\frac{11}{5}+p(5q-5q^2+1)\end{aligned}$$

となる。両者の差を求めると

$$E(I)-E(J)=\frac{p}{3}(2-5q)^2$$

が得られる。したがって $q\neq\frac{2}{5}$ ならば I を選ぶ個体の方が大きい利得を得るので I は進化的に安定な戦略である。

104. (i) **コア**

3 人で提携を結んだときの A，B，C の取り分を x，y，z とする。コアの条件は次のように表される。

$$x+y+z=24,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 2$$

$$x+y\geqq 8,\ y+z\geqq 10,\ x+z\geqq 4$$

これらの条件を満たす配分の集合がコアである。条件より $0\leqq x\leqq 14$，$0\leqq y\leqq 20$，$2\leqq z\leqq 16$ でなければならない。

(ii) **仁**

各提携の不満は以下のようである。

$$\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 8 - (x + y)$$
$$\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 10 - (y + z)$$
$$\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = 4 - (x + z)$$
$$\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -x$$
$$\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y$$
$$\{C\}:\ v(\{C\}) - z = 2 - z$$

最大の不満の大きさを m とすると

$8-(x+y) \leqq m$, $10-(y+z) \leqq m$, $4-(x+z) \leqq m$, $-x \leqq m$, $-y \leqq m$, $2-z \leqq m$,

が得られる。$x + y + z = 24$ よりこれらの条件は次のように書き直される。

$$-m \leqq x \leqq 14 + m,\ -m \leqq y \leqq 20 + m,\ 2 - m \leqq z \leqq 16 + m$$

$m = -7$ とすると

$$7 \leqq x \leqq 7,\ 7 \leqq y \leqq 13,\ 9 \leqq z \leqq 9$$

となるから，この -7 が最小化された最大の不満であり，$x = 7$, $z = 9$ が決まり，さらに $y = 8$ が決まる。したがって仁となる配分は $(x, y, z) = (7, 8, 9)$ である。

(iii) **シャープレイ値**

各提携における各プレイヤーの貢献度は次の表で表される。

	A	B	C
{A,B,C}	24-10=14	24-4=20	24-8=16
{A,B}	8	8	–
{A,C}	2	–	4
{B,C}	–	8	10
{A}	0	–	–
{B}	–	0	–
{C}	–	–	2

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

	A	B	C
$A \to AB \to ABC$	0	8	16
$A \to AC \to ABC$	0	20	4
$B \to AB \to ABC$	8	0	16
$B \to BC \to ABC$	14	0	10
$C \to AC \to ABC$	2	20	2
$C \to BC \to ABC$	14	8	2

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均を求めると A，B，C それぞれ $\frac{19}{3}$，$\frac{28}{3}$，$\frac{25}{3}$ であるからシャープレイ値にもとづく配分は $(x, y, z) = (\frac{19}{3}, \frac{28}{3}, \frac{25}{3})$ である。

105. A，B，C，3 人の取り分を x，y，z とするとこれらがコアに含まれるためには次の条件が満たされなければならない。

$$x + y + z = 12$$

$$x + y \geqq 9,\ y + z \geqq 8,\ x + z \geqq 10$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

$x + y \geqq 9$，$y + z \geqq 8$ なので $z \leqq 3$，$x \leqq 4$ でなければならない。しかしそれでは $x + z \geqq 10$ が成り立たない。したがってこのゲームにはコアが存在しない。仁は定義できる。このゲームでは各提携の不満は次のように表される。

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 9 - (x + y)\\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 8 - (y + z)\\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = 10 - (x + z)\\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -x\\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y\\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = -z
\end{aligned}$$

最大の不満の大きさを m とするとそれぞれの不満は m 以下であるから次の式が得られる。

$$9-(x+y) \leqq m,\ 8-(y+z) \leqq m,\ 10-(x+z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

$m = 1$ とすると

$$x + y \geqq 8,\ y + z \geqq 7,\ x + z \geqq 9,\ x \geqq -1,\ y \geqq -1,\ z \geqq -1$$

が得られ，これらの式から

$$x = 5,\ y = 3,\ z = 4$$

が求まる。このとき

$$x + y = 8 < 9,\ y + z = 7 < 8,\ x + z = 9 < 10$$

であるから 2 人づつの提携には不満が残る。

106. この問題を 37 ページのナッシュ交渉解の記号を使って表すと。U は $x_A + x_B \leqq 2000$ で表され，$d_A = 100$，$d_B = 300$ である。ラグランジュ関数は

$$\mathscr{L} = (x_A - 100)(x_B - 300) + \lambda(x_A + x_B - 2000)$$

となり，これを x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$x_B - 300 + \lambda = 0$$

$$x_A - 100 + \lambda = 0$$

が得られる。これらの式と $x_A + x_B = 2000$ から

$$x_A = 900,\ x_B = 1100$$

が求まる。この場合はナッシュ交渉解と仁が一致する。

107. (i) 交渉が決裂したときの企業の利得は 0，組合の利得は 19,200,000(8000 × 2400) である。

(ii) 企業の利得は

$$u_1(w, l) = 18000 \times 40\sqrt{l} - wl$$

労働組合の利得は

$$u_2(w, l) = wl + (2400 - l) \times 8000$$

と表される。

(iii) ナッシュ積は

$$(18000 \times 40\sqrt{l} - wl)(wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000) \qquad (17)$$

と書ける。これを w で微分してゼロとおくと

$$-l(wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000) + l(18000 \times 40\sqrt{l} - wl) = 0$$

となり，$l \neq 0$ であるから次の式が得られる。

$$wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000 = 18000 \times 40\sqrt{l} - wl \qquad (18)$$

この式はナッシュ交渉解において企業の利得と労働組合の利得から外部賃金を引いたもの（すなわち交渉によって得られる利得）が等しいことを意味している。一方 (17) を l で微分してゼロとおくと

$$\begin{aligned}&(360000\frac{1}{\sqrt{l}} - w)(wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000)\\&+ (w - 8000)(18000 \times 40\sqrt{l} - wl) = 0\end{aligned}$$

が得られる。(18) より

$$360000\frac{1}{\sqrt{l}} - w + w - 8000 = 0 \qquad (19)$$

となり $l = 2025$ が求まる。これが交渉解における雇用量である。$l = 2025$ を (18) に代入すると

$$2025w - 16200000 = 32400000 - 2025w$$

となり $w = 12000$ を得る。これが交渉解における賃金率である。
外部の仕事から得られる賃金率が 10000 であれば (17) は

$$(18000 \times 40\sqrt{l} - wl)(wl + (2400 - l) \times 10000 - 24000000)$$

(18) は

$$wl + (2400 - l) \times 10000 - 24000000 = 18000 \times 40\sqrt{l} - wl \qquad (20)$$

となり，(19) は

$$360000\frac{1}{\sqrt{l}} - w + w - 10000 = 0$$

となるので $l = 1296$ が得られる。これを (20) に代入すると

$$1296w - 12960000 = 25920000 - 1296w$$

より $w = 15000$ が求まる。