

解析学 A・数学演習 A 期末テスト

2008 年 7 月 23 日

採点者（他人）が読むことを考えて解答を書くこと。採点者が読むことが出来ない解答（答案）は採点しない可能性があることを留意すること。また、**[2]**と**[3]**については「なぜその答えが出たのか」がわかる程度の計算を答案用紙に記述すること。**解答用紙は各自一枚のみ配布する。**配分を考えて解答を書くこと。

[1] 次の極限值が存在するかを判定せよ。極限值が存在するときにはその極限值を与えよ。また存在しない場合にはその理由を述べよ（各 10 点、計 40 点）

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{\cos x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^{-1}(x^2)}{\sin x - \sinh(x)}$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} \sin^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2}{e^x + e^y} \right)$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4 + x^4y}{x^2 + y^8}$$

[2] 関数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x - y)$ について次の問に答えよ。（30 点）

(1) $-\pi < x, y < \pi$ の範囲にある関数 $f(x, y)$ の特異点（ $f_x = 0$ かつ $f_y = 0$ を満たす点）をすべて求めよ。

(2) $-\pi < x, y < \pi$ の範囲における関数 $f(x, y)$ の極値および極値の種類と、それを取る点を求めよ。

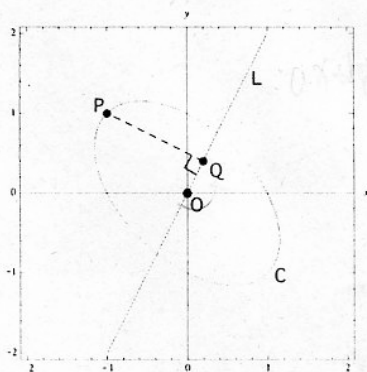
[3] 方程式 $x^2 + xy + y^2 = 1$ で定義される曲線を C とする。 L を $ax + by = 0$ で定義される直線とする（ a, b は定数）。 C 上の点 P に対して、 L 上の点 Q を次のように定義する：線分 PQ は Q において L と直交する。このような Q を P の L に関する射影という（図を参照）。 P が C 上の点を動くとき、 P の L に関する射影の全体は L 上の線分 C_L を描く（ここでは、このことを証明する必要はない）。 次の問に答えよ。（30 点）

(1) C 上の点 $P = (x, y)$ の L に関する射影を Q とするとき、 L 上にある原点 $O = (0, 0)$ と Q を結ぶ線分の長さは

$$\frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で与えられる事を示せ。

(2) ラグランジュの未定乗数法を用いて、線分 C_L の長さを求めよ。



解析学 A・数学演習 A 期末テスト 3 の絵

2008 年 7 月 23 日

