

解析学 A・数学演習 A 期末再テスト

2008 年 7 月 30 日

この試験は「合否」の判定のみを目的とした試験であることを留意すること。採点者（他人）が読むことを考えて解答を書くこと。採点者が読むことが出来ない解答（答案）は採点しない可能性があることを留意すること。また、**2**と**3**については「なぜその答えが出たのか」がわかる程度の計算を答案用紙に記述すること。解答用紙は各自一枚のみ配布する。配分を考えて解答を書くこと。

- 1** 次の極限值が存在するかを判定せよ。極限值が存在するときにはその極限值を与えよ。また存在しない場合にはその理由を述べよ（各 10 点、計 40 点）

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1 - x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^{\sin x}$

(3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$

(4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^5}{x^2 + y^{10}}$

但し、(3) では、 (x, y) は $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ を満たしながら $(0, 0)$ に近づくものとする。

- 2** C^∞ 級関数 $f(x, y)$ に対して $g(u, v) = f(u^2 - v^2, 2uv)$ とする。このとき次の式が成立することを証明せよ。（各 15 点、計 30 点）

(1) $\{f_x(u^2 - v^2, 2uv)\}^2 + \{f_y(u^2 - v^2, 2uv)\}^2 = \frac{1}{4(u^2 + v^2)} (\{g_u(u, v)\}^2 + \{g_v(u, v)\}^2)$

(2) $f_{xx}(u^2 - v^2, 2uv) + f_{yy}(u^2 - v^2, 2uv) = \frac{1}{4(u^2 + v^2)} (g_{uu}(u, v) + g_{vv}(u, v))$

- 3** a を定数とする。このとき関数 $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2)$ の極値および極値の種類と、それを取る点を求めよ。（30 点）