

解析学 A・数学演習 A 中間テスト

2008 年 6 月 11 日

1 次の極限值および級数の和を求めよ.

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{3n^2 + 2n + 2}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \cdots + \frac{n!}{n^n} \right)$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 - 2x^3 + 2} - x^2 + x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin^{-1}(x)}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos 3x}{e^{x^2} - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}(\log x)^3$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} x \log(1 + \sin(2/x))$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \tan^{-1} x \right)^x$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin(x^2) - x^2 \sin^{-1}(2x)}{x^5}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x - x^2 \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right\}$$

2 a を定数とする. \mathbb{R} 上の関数

$$y = f(x) = (x^2 + a)e^{-x}$$

について次を答えよ.

(1) $a = 0$ のときの上記の関数に対して, 増減表を書きグラフの概形をかけ.

(2) 変曲点が存在するような a の範囲を求めよ.

3 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ を微分可能な関数とする. 関数 $\Delta(x)$ を行列式

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix}$$

により定義する. このとき,

$$\frac{d}{dx} \Delta(x) = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a'_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a'_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a'_{22}(x) \end{vmatrix}$$

が成立することを示せ