線形代数学A小テストの答

問題 1. 次の値を求めよ.($i=\sqrt{-1}$ である)

(1) $(-\sqrt{3}+i)^8=-128+128\sqrt{3}i$　　(2) $(1+i)^{18}=512i$

問題 2. (1) $x-y+2z=0$

(2) $x=1+2t,\ y=4t,\ z=3+t$ を (1) の平面の方程式に代入すると $(1+2t)-4t+2(3+t)=0$. これを整理すると $0t+7=0$ でこれをみたす t は存在しない. したがって, この直線と (1) の平面の共有点はない.

(2) の別解. 直線の方向ベクトル $\boldsymbol{v}=(2,4,1)$ と (1) の法線ベクトル $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$ は内積をとると

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=2\cdot1+4\cdot(-1)+1\cdot2=0$$

となることより, 直行する. したがって, (1) の平面とこの直線は平行か直線が平面に含まれているかのいずれかである. 直線上の点 (1,0,3) は $1-0+2\cdot3=7\neq0$ より (1) の平面上にないので, (1) の平面と (2) の直線は平行で共有点をもたない.

問題 3.

(1) 拡大係数行列 $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&-1\\1&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$　よって, $\underline{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}}$

(2) 拡大係数行列 $\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&1&-1\\1&2&3&2\\1&3&4&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$　よって, $\underline{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}$

(3) 拡大係数行列 $\begin{pmatrix}1&-2&0&1\\1&-2&1&3\\-3&6&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

3行目を見ると, $0x_1+0x_2+0x_3=1$ で, これをみたす x_1,x_2,x_3 は存在しない. つまり, <u>解なし</u>.

(4) 拡大係数行列 $\begin{pmatrix}1&-1&0&3&0&2\\1&-1&1&2&1&2\\-2&2&-1&-5&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{簡約化}}\begin{pmatrix}1&-1&0&3&0&2\\0&0&1&-1&0&9\\0&0&0&0&1&-9\end{pmatrix}$

主成分に対応しない x_2, x_4 をそれぞれ c_1,c_2 とおくと,

$x_1-c_1+3c_2=2,\ x_3-c_2=9,\ x_5=-9$

これより, $\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (c_1,\, c_2 \in \boldsymbol{R}).}$

問題 4.

(1) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

は自明でない解をもつ（例えば $c_1 = c_2 = c_3 = 1,\, c_4 = 2$）したがって, この4つのベクトルは $\underline{\text{一次独立ではない}}$.

(2) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

この連立一次方程式の係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を簡約化すると, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

したがって、$c_1 = c_2 = c_3 = 0$. 故に, この3個のベクトルは $\underline{\text{一次独立である}}$.

問題 5.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を基本変形で簡約化しようとすると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

という形になる. これはもとの行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の簡約化が $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で階数が2ということである. つまり, この行列は $\underline{\text{正則でない}}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を簡約化すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

したがって, この行列は正則で, 逆行列は $\underline{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.