平成 20 年 7 月 28 日

平成 20 年度量子基礎論 A 試験問題（担当：森田教授、片山教授、阿部准教授）

以下の問に答えよ。解答用紙に、学籍番号と所属する学科目名を必ず記すこと。
問 1 と問 2 をそれぞれ解答用紙 A と B の各 1 部に解答すること。
（注意：問題は２枚ある）

【解答用紙Ａ】（５０％）

問 1　以下の問いに答えよ。

1)　量子力学では波は粒子の性質を持つ。
　(a)（波の）粒子一個が持つ運動量 p の絶対値と波の波長 λ との関係を示せ。
　(b)（波の）粒子一個が持つ運動量 p を測定する実験について具体的に説明せよ。
　(c)（波の）粒子一個が持つエネルギー E と波の周波数 ν との関係を示せ。

2)　(a) ポテンシャルが無視できる場合の物質波の分散関係を角振動数 ω、波数 k、質量 m などを用いて示せ。
　(b) 上記物質波の位相速度 v_p と群速度 v_g を書け

3)　(a) 3 次元の場合の運動量の演算子を書け。
　(b) エネルギーの演算子を書け。

4)　一次元の波動関数 φ(x)=Aexp(ikx)+Bexp(-ikx)［A,B は係数、k は波数］について以下の問いに答えよ。
　(a) φ(x) は運動量の演算子の固有関数では無いことを証明せよ。
　(b) φ(x) は運動量の 2 乗の演算子の固有関数であることを証明し固有値を求めよ。

5)　ポテンシャルが無視できる場合の時間に依存しないシュレーディンガー方程式について以下の問いに答えよ。
　(a) 一次元の波動関数 φ(x)、質量 m、エネルギー E などを用いてシュレーディンガー方程式を書け。
　(b) 波数 k を使って $\varphi_1(x)$=Acos(kx)+Bsin(kx)、$\varphi_2(x)$=Cexp(ikx)+Dexp(-ikx) がこの方程式の解となっていることを証明せよ。
　(c) 波数 k を固有値に持つ一次元の波動関数と演算子を書け。この結果に基づいて、(b) 中の係数 A,B,C,D の物理的意味について説明せよ。

問２は２枚目

平成 20 年度量子基礎論 A 試験問題（２枚目）

【解答用紙Ｂ】（５０％）

問 2　幅 d, 深さ V_0 の 1 次元井戸型ポテンシャル $V(x)=0\ \ (|x|<\frac{d}{2}),\ V_0\ (|x|\geq\frac{d}{2})$ における粒子の振る舞いを考える。粒子の質量を m、エネルギーを E とする。

(1) $E<V_0$ のとき、波動関数 $\varphi(x)$ を次の手順により求めよ。領域 II における波数を k、領域 I と III における波数を k' とする。

　① 領域 I $(x\leq-\frac{d}{2})$、領域 II $(|x|<\frac{d}{2})$、領域 III $(x\geq\frac{d}{2})$ における波動関数 $\varphi_I(x)$, $\varphi_{II}(x)$, $\varphi_{III}(x)$ をそれぞれ求めよ。ただし、波動関数の各係数を A, B, C, D とおいた一般解でよい。

　② $x=\pm\frac{d}{2}$ における境界条件から、波動関数の各係数のあいだに成り立つ関係を導け。

　③ ②の結果を用いて、領域 I, II, III を含めた波動関数 $\varphi(x)$ を求めよ。波動関数は規格化しなくてよい。

(2) 前問の算出過程から、波数 k, k' は $k'=k\tan\frac{kd}{2}$ または $k'=-k\cot\frac{kd}{2}$ の関係を満たすことを示せ。

(3) 前問の関係式と $k^2+k'^2=$ 定数 の連立方程式について、横軸を $\alpha=\frac{kd}{2}$、縦軸を $\beta=\frac{k'd}{2}$ としたグラフを図示することにより、エネルギー固有値 E_n を定性的に調べることができる。ここで、束縛状態の数が 4 個の場合を考える。

　① エネルギー固有値 E_1, E_2, E_3, E_4 を求めるためのグラフを図示せよ。グラフの横軸を α、縦軸を β、$E_1<E_2<E_3<E_4$ とする。

　② この場合、波数 k_n $(n=1, 2, 3, 4)$ は、β が大きくなるにつれて、$\beta\to\infty$ とした波数の漸近解 k_n^∞ の値に近づく（ただし、$k_n\neq k_n^\infty$）。このことを踏まえて、波動関数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$ を図示せよ。図中に $x=-\frac{d}{2}$, $\frac{d}{2}$ の位置を記すこと。

(4) 束縛状態の数（エネルギー固有値の個数）が n 個（$n\geq2$ の整数）以下である（$n+1$ 個以上存在しない）とき、V_0, d, m が満たす条件を導け。