平成 21 年 7 月 27 日

平成 21 年度量子論基礎 A 試験問題（担当：森田教授、片山教授、阿部准教授）

以下の問に答えよ。解答用紙に、学籍番号と所属する学科目名を必ず記すこと。
問 1 と問 2 をそれぞれ解答用紙 A と B の各 1 部に解答すること。

【解答用紙A】（５０％）

問 1　以下の問いに答えよ。

(1)　量子力学では波は粒子の性質を粒子は波の性質を持つ。
- (a)（波の）粒子一個が持つ運動量 $\mathbf{p}$ と波の波数 $\mathbf{k}$ との関係を示せ。
- (b)（粒子の）波が持つ波長 λ と運動量 $\mathbf{p}$ の絶対値との関係を示せ。
- (c)（波の）粒子一個が持つエネルギー E と波の角周波数 ω との関係を示せ。
- (d)（粒子の）波が持つ周波数 ν とエネルギー E との関係を示せ。

(2)　(a) ポテンシャルが無視できる場合の物質波の分散関係を角振動数 ω、波数 $\mathbf{k}$、質量 m などを用いて示せ。
(b) 上記物質波の位相速度 v_p と群速度 v_g の定義を角振動数 ω と波数 k を使って示し (a) の場合を計算せよ。

(3)　ポテンシャルが無視できる場合の時間に依存しない一次元のシュレーディンガー方程式について回答せよ。
(a) 一次元の波動関数 $\varphi(x)$、質量 m、エネルギー E などを用いてシュレーディンガー方程式を書け。
(b) 波数 k を使って $\varphi_1(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$、$\varphi_2(x)=C\exp(ikx)+D\exp(-ikx)$ がこの方程式の解となっていることを証明せよ (A,B,C,D は係数)。
(c) $\hbar k$ を固有値に持つ一次元の波動関数と演算子を書け。
(d) 無限の高さのポテンシャル障壁中に閉じ込められた粒子の係数 A,B,C,D の物理的意味について説明せよ。

(4)　(a) **座標と運動量**演算子は可換で無い事を 1 次元の場合に証明せよ。
(b) 演算子 $\hat{A}$ と $\hat{C}$ が共通の固有関数をもつなら $\hat{A}$ と $\hat{C}$ は可換であることを証明せよ。

(5)　(a) 自由粒子の三次元の波動関数が平面波で与えられることを示せ。
(b) 自由粒子の波動関数 $\varphi(x,y,z)$ が x, y, z 方向に周期 L を持つと仮定した場合の波数の満たす式を示せ。

【解答用紙B】（５０％）

問 2　1 次元ポテンシャル $V(x)=V_0\ (x<-d),\ \ 0\ (-d\le x\le 0),\ \ \infty\ \ (x>0)$ における粒子の振る舞いを考える。をここで、粒子の質量を m、エネルギーを E とし、領域を I：$x<-d$，II：$-d\le x\le 0$，III：$x>0$ と定める。

(1) $E<V_0$ のとき、波動関数 $\varphi(x)$ およびエネルギー固有値 E を次の手順により求めよ。

① 領域 I，II，III における波動関数 $\varphi_I(x),\ \varphi_{II}(x),\ \varphi_{III}(x)$ を求めよ。
領域 II における波数を κ、領域 I における波数を κ' とし、波動関数の各係数を $A,\ B,\ C,\cdots$ とおけ。
$\varphi_{II}(x)$ の導出においては $x=0$ での境界条件を用いよ。

② 境界条件を満たす関係式と $\kappa^2+\kappa'^2=$ 定数の連立方程式から、エネルギー固有値 E_n を求める式を導け。

③ 前問の解は、横軸を $\alpha=\kappa d$、縦軸を $\beta=\kappa' d$ としたグラフを用いて求めることができる。
束縛状態が 1 個存在する場合について、エネルギー固有値 E_n を求めるグラフを図示し、$E\neq 0$ の固有値が最低 1 個存在するとき V_0 が満たす条件を導け。

(2) $E>V_0$ の粒子が $x<-d$ から x 方向に入射した場合を考える。

① 領域 I における波数を k'、領域 II における波数を k とおき、領域 I，II における波動関数 $\varphi_I(x),\ \varphi_{II}(x)$ および波数 $k',\ k$ を求めよ。波動関数の各係数を $A,\ B,\ C,\ D$ とおけ。$\varphi_{II}(x)$ の導出においては $x=0$ での境界条件を用いよ。

② 領域 I にある粒子の反射率 R は 1（領域 II に透過する確率 T は 0）であることを示せ。
証明法として、$x=-d$ における境界条件から反射率を導出する手法、あるいは領域 II の確率流密度を導出する手法のいずれかを用いよ。