平成 20 年 2 月 4 日

平成 20 年度量子力学 A 試験問題（担当：森田教授、阿部准教授、片山教授）

以下の問に答えよ。解答用紙に、学籍番号と所属する学科目名を必ず記すこと。
問１と問２をそれぞれ解答用紙ＡとＢの各１部に解答すること。

【解答用紙Ａ】（５０％）

問 1　中心力ポテンシャルにおける粒子の角運動量について以下の問に答えよ。

角運動量演算子 $\mathbf{L}$ の x, y, z 成分 L_x, L_y, L_z のあいだには、次の交換関係（$[A,\ B]=AB-BA$，ただし、A, B は演算子）が成り立つ。

$$[L_x,\ L_y]=i\hbar L_z \qquad [L_y,\ L_z]=i\hbar L_x \qquad [L_z,\ L_x]=i\hbar L_y \qquad ①$$

$$[\mathbf{L}^2,\ L_i]=0 \quad (i=x,\ y,\ z) \qquad \mathbf{L}^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2 \qquad ②$$

ここで、角運動量成分 L_z に着目し、波動関数の角度成分を $\varphi_{\lambda,\gamma}$ とすると、$\varphi_{\lambda,\gamma}$ は次の固有方程式を満たす。

$$\mathbf{L}^2\,\varphi_{\lambda,\gamma}=\lambda\,\varphi_{\lambda,\gamma} \quad ③, \qquad L_z\varphi_{\lambda,\gamma}=\gamma\,\varphi_{\lambda,\gamma} \quad ④$$

(1) 式④の波動関数と演算子は、極座標表示で $\varphi_{\lambda,\gamma}=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, $L_z=-i\hbar\dfrac{d}{d\phi}$ で与えられる。これから、波動関数 $\Phi(\phi)$ を求め、$\gamma=m_l\hbar$ $(m_l=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$ を示せ。ϕ についての周期性 $\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)$ を用いよ。波動関数は規格化しなくてもよい。

(2) いま、$L_+=L_x+iL_y$, $L_-=L_x-iL_y$ を定義し、$\varphi_{\lambda,\gamma}$ に L_+, L_- を掛けて $L_+\varphi_{\lambda,\gamma}$, $L_-\varphi_{\lambda,\gamma}$ をつくると、$L_+\varphi_{\lambda,\gamma}$, $L_-\varphi_{\lambda,\gamma}$ は以下の性質をもつことから、$L_+\varphi_{\lambda,\gamma}$, $L_-\varphi_{\lambda,\gamma}$ もまた $\mathbf{L}^2$ と L_z の固有関数であることがわかる。

(i) $\mathbf{L}^2(L_+\varphi_{\lambda,\gamma})=\lambda\,L_+\varphi_{\lambda,\gamma}$, $\mathbf{L}^2(L_-\varphi_{\lambda,\gamma})=\lambda\,L_-\varphi_{\lambda,\gamma}$ であり、$L_+\varphi$, $L_-\varphi$ は $\hat{\mathbf{L}}^2$ の固有関数である。

(ii) $L_z(L_+\varphi_{\lambda,\gamma})=(\gamma+\hbar)\,L_+\varphi_{\lambda,\gamma}$, $L_z(L_-\varphi_{\lambda,\gamma})=(\gamma-\hbar)\,L_-\varphi_{\lambda,\gamma}$ であり、$L_+\varphi_{\lambda,\gamma}$ は L_z の固有値 γ が $\hbar$ だけ増えた固有関数，$L_-\varphi_{\lambda,\gamma}$ は γ が $\hbar$ だけ減った固有関数である。

(iii) L_+, L_- を m' 回掛けた $L_+^{m'}\varphi_{\lambda,\gamma}$, $L_-^{m'}\varphi_{\lambda,\gamma}$ は、それぞれ、L_z の固有値が $\gamma+m'\hbar$，$\gamma-m'\hbar$ の固有関数である。つまり、γ が $\hbar$ の間隔で存在することを示しており、問(1) で導いた $\gamma=m_l\hbar$ と合致している。

ここで、$[\mathbf{L}^2,\ L_+]$, $[\mathbf{L}^2,\ L_-]$, $[L_z,\ L_+]$, $[L_+,\ L_-]$ を求めて、演算子を変形することにより、上記の (i), (ii) が成り立つことを示せ。(iii) については解答しなくてよい。

(3) 演算子 L_-L_+, L_+L_- について、$\mathbf{L}^2$, L_z を用いて表すことにより、次式（式⑤）が成り立つことを示せ。

$$L_-L_+\varphi_{\lambda,\gamma}=c_+\varphi_{\lambda,\gamma}=\{\lambda-\gamma(\gamma+\hbar)\}\,\varphi_{\lambda,\gamma}, \qquad L_+L_-\varphi_{\lambda,\gamma}=c_-\varphi_{\lambda,\gamma}=\{\lambda-\gamma(\gamma-\hbar)\}\,\varphi_{\lambda,\gamma} \qquad ⑤$$

(4) 問(1), (2), (3) の結果を踏まえて、$\mathbf{L}^2$ の固有値 λ を以下の手順で求める。L_x, L_y がエルミート演算子であることを考慮すると、$\varphi^*_{\lambda,\gamma}L_-L_+\varphi_{\lambda,\gamma}=\left|L_+\varphi_{\lambda,\gamma}\right|^2$, $\varphi^*_{\lambda,\gamma}L_+L_-\varphi_{\lambda,\gamma}=\left|L_-\varphi_{\lambda,\gamma}\right|^2$ が成り立つ。

(a) この関係と式⑤より、$\left|L_+\varphi_{\lambda,\gamma}\right|^2$, $\left|L_-\varphi_{\lambda,\gamma}\right|^2$ と $\left|\varphi_{\lambda,\gamma}\right|^2$ のあいだに成り立つ関係式を導き、$c_+=\lambda-\gamma(\gamma+\hbar)\geq0$, $c_-=\lambda-\gamma(\gamma-\hbar)\geq0$ を示せ。

(b) 上の結果から、L_z の固有値 γ には最大値 $\gamma_{\max}$ と最小値 $\gamma_{\min}$ が存在することがわかる。ここで、問(2) の (ii) の性質を用いて、固有関数は $\gamma=\gamma_{\max}$ で $L_+\varphi_{\lambda,\gamma_{\max}}=0$，$\gamma=\gamma_{\min}$ で $L_-\varphi_{\lambda,\gamma_{\min}}=0$ を満たすことを示せ。

(c) λ, $\gamma_{\max}$, $\gamma_{\min}$ のあいだに成り立つ関係を導き、$\gamma_{\max}=-\gamma_{\min}$ を示せ。

(d) 固有値 $\gamma_{\max}$ における量子数 m_l（m_l の最大値）を l とおくと $(l=0,\ 1,\ 2,\cdots)$、$\mathbf{L}^2$ の固有値 λ は $\lambda=l(l+1)\hbar^2$ で表されることを示せ。

(5) (a) 角運動量の大きさ $|\mathbf{L}|$ と１つの角運動量成分 L_i（i：x または y または z）を測定したときの期待値を求め、角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ がどのように量子化されるかについて、ベクトル模型を図示して説明せよ。

(b) $|\mathbf{L}|$ と L_i が確定された状態で、他の角運動量成分 L_j $(j\neq i)$ を測定すると、L_j はどのような値をとり得るかについて述べよ。

平成 21 年 2 月 4 日

平成 20 年度量子力学 A 試験問題（担当：森田教授、阿部准教授、片山教授）

以下の問に答えよ。解答用紙に、学籍番号と所属する学科目名を必ず記すこと。
問１と問２をそれぞれ解答用紙 A と B の各 1 部に解答すること。

【解答用紙Ｂ】（５０％）

問２　以下の問いに答えよ。

(1) 定常状態にある無摂動系のハミルトニアンを H_0、摂動が加わる前の系は時間に依存せず$|c_n|^2$の存在確率で波動関数$\varphi_n(\mathbf{r})$の n 状態に分布しているとして、時間に依存する摂動論について、以下の問いに答えよ。

(a) 摂動 $H'(t)$が加わる時の解くべきシュレーディンガー方程式を解となる波動関数 $\Psi(\mathbf{r},t)$ を用いて書け

(b) 波動関数$\varphi_n(\mathbf{r})$の固有値を $E_n^{(0)}$、時間に依存する n 状態の展開係数を $c_n(t)$として $\Psi(\mathbf{r},t)$の展開式を書け

(c) $\omega_{fn}\equiv[E_f^{(0)}- E_n^{(0)}]/\hbar$, $H'_{fn}(t)\equiv\int\varphi^*_f(\mathbf{r})H'(t)\varphi_n(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ を用いて、$dc_f(t)/dt$ を $c_n(t)H'_{fn}(t)$で展開した式を書け

(2) 括弧の中の A～D を埋める言葉または式を書け

(a) 摂動が加わる前の t=0 の初期状態(状態 i)［$c_i^{(0)}=1$, $c_n^{(0)}=0$ for $n\neq i$］から時間に依存する摂動 $H'(t)$が t=0 に加えられ終状態 (状態 f)［$c_f^{(1)}(t)$］へ遷移する場合、ある時刻 t で系を f 状態にみいだす確率は $P_{i\to f}(t)$=[　A　]で与えられる。ここで、$c_f^{(1)}(t)=-(i/\hbar)\int H'_{fi}(t)e^{i\omega_{fi}t}dt$ として摂動 $H'(t)$が時間に依らず一定の[　B　]型摂動の場合、$H'(t)$は積分の外に出せるので、$c_f^{(1)}(t)$=[　C　]となり、遷移確率として $P_{i\to f}(t)$=[　D　]を得る。

(b) 水素原子に電場を引加したときの電気双極子遷移の遷移則は、主量子数 n の変化は Δn=[　A　]、方位量子数ℓの変化は $\Delta\ell$=[　B　]、磁気量子数 m_ℓの変化は Z 方向の電場 E_zに対して Δm_ℓ=[　C　]で X, Y 方向の電場 E_x, E_y に対して Δm_ℓ=[　D　]である。

(c) 単位時間の遷移確率を $W_{i\to f}$とした場合の、時間に依存しないフェルミの黄金則は、H'_{fi} とω_{fi}を用いて $W_{i\to f}$ =[　A　]、H'_{fi} と E_{fi}=[　B　]を用いて $W_{i\to f}$ =[　C　]となる。

(3) 括弧の中のア～エを埋める言葉または式を書け

(a) 光学では電磁波の振幅や位相の[　ア　]の無い程度をコヒーレンスといい、レーザ光は自然界に存在しない極めて[　イ　]の良い、位相が時間的・空間的にそろった高いコヒーレンスを持つ人工の光である。コヒーレンス時間の意味を持つ励起状態の寿命τを用いるとコヒーレンス長 L は L=[　ウ　]となる。

(b)二準位系でのレーザ発振のしきい値を与えるシャウロウ・タウンズの式$(N_m-N_n)_t=\pi\Gamma/2h\nu_0B\tau_p$ の N_m は[　ア　]状態を占める原子数、Γは[　イ　]の幅、ν_0はレーザ光のピーク振動数、B は光のエネルギー密度に比例する[　ウ　]放出の遷移確率の比例係数、τ_p は光の損失を現象論的に考慮した光子の[　エ　]である。

(c) 二準位系でのレーザ発振の過程は、ポンピングによる[　ア　]分布の実現、一つの原子の[　イ　]放出による入射光を種とした[　ウ　]位相の光の連鎖的[　エ　]放出、レーザ媒質全原子によるコヒーレント光の放出による光の増幅の実現である。

(d) 半導体レーザの一般的な特徴は、 pn 接合を利用した[　ア　]によるキャリア注入、二重ヘテロ接合で挟まれたサンドイッチ構造中の[　イ　]領域へのキャリアと光の[　ウ　]である。

(4) 三次元自由電子のエネルギーを $E=\hbar^2k_x^2/2m+\hbar^2k_y^2/2m+\hbar^2k_z^2/2m$、長さ$(d_x,d_y,d_z)$の直方体に閉じ込められた電子の波数$(k_x,k_y,k_z)$とエネルギー固有値を決定する量子数$(n_x,n_y,n_z)$の関係を $k_x=\pi n_x/d_x$, $k_y=\pi n_y/d_y$, $k_z=\pi n_z/d_z$ とする

(a) 電子の運動が z 方向で量子化された一次元量子井戸（量子面）の電子の状態密度の求め方と解を示せ。

(b) 電子が(x,y)平面に閉じ込められた二次元量子井戸（量子細線）の電子の状態密度の求め方と解を示せ。

(5) 孤立した微小な島の両側に電極を配置して、島と電極の間を電子がトンネル効果で移動できるようになっているとする。この島が電気容量 C を持つキャパシタとすれば、この素子の電流 I－電圧 V 特性には$-e/2C\leqq V\leqq e/2C$の領域で電流が流れないことを示せ。ただし、温度効果は無視する。