平成 21 年 1 月 30 日

量子力学演習　後半の試験問題

問題１　水素原子の 1s 状態の波動関数$\psi_{1s}(r)$は、次のように表せる。

$$\Psi_{1s}(r) = A\exp(-r/a)$$

ここで、aはボーア半径、Aは規格化定数である。以下の問に答えよ。

(1) 規格化定数 A を求めよ。なお、$\int_0^\infty r^{\alpha-1}\exp(-r)dr = (\alpha-1)!$ である。

(2) 波動関数 $\psi_{1s}(r)$に対して、座標 r及び運動量 p^2の期待値を求めよ。

なお、運動量演算子は、$(p_x, p_y, p_z) = (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial z})$ と表わされる。

問題２　１次元調和振動子（質量 m、角振動数ω）のハミルトニアンを、

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

とし、無摂動系の固有値及び固有関数を

$E_n^{(0)} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$、$\varphi_n^{(0)}(x) = A_n H_n(\beta x)\exp(-\frac{1}{2}\beta^2 x^2)$、$A_n = \sqrt{\frac{\beta}{\pi^{1/2}2^n n!}}$、$\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$　$(n = 0,1,2,\ldots)$

とする。ここで、$H_n(\xi)$ はエルミートの多項式であり、$H_0(\xi) = 1, H_1(\xi) = 2\xi$　とする。

また、１次の摂動エネルギーは

$$E_n^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^{*(0)}(x)\,H'\,\varphi_n^{(0)}(x)\,dx$$

で与えられる。以下の各問に答えよ。

(1) 時間に依存しない摂動ハミルトニアン$H' = \lambda x^2$が加わった場合を考え、基底状態（n=0）のエネルギー変化を１次の摂動により求めよ。

(2) 基底状態（n=0）のエネルギー変化の厳密解を求め、$\lambda << m\omega^2$の場合、１次の摂動により得られた解と一致することを示せ。

(3) 時間に依存する摂動ハミルトニアン$H' = x\exp(-(t/\tau)^2)$が加わった場合を考え、基底状態（n=0）と量子数が一つ違う状態（n=1）に対して、遷移行列要素H'_{10}を求めよ。
なお、H'_{10}は以下の式で与えられる。

$$H'_{10} = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^{*(0)}(x)\,H'\,\varphi_0^{(0)}(x)\,dx$$

(4) $t = -\infty$で基底状態（n=0）であるとして、$t = +\infty$で一つ違う状態（n=1）にある確率 $P = \left|b_{10}^{(1)}\right|^2$ を求めよ。ここで、$b_{10}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}H'_{10}\exp(i\omega t)dt$ である。
なお、$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-c^2t^2 + ift)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{c}\exp(-\frac{f^2}{4c^2})$ である。