平成 21 年 11 月 13 日

平成 21 年度 量子力学演習試験問題（前半）

以下の問について問題 1—問題 3 をそれぞれ解答用紙 A（青色），B（茶色），C（緑色）の各 1 部に解答すること。

【問題 1】 解答用紙 A（青色）

1 次元の自由粒子に対して、周期的境界条件 $\varphi(x)=\varphi(x+d)$ が成り立つ場合について、以下の問に答えよ。

(1) シュレディンガー方程式を記し、波動関数とエネルギー固有値を求めよ。波動関数は、区間 $[0,d]$ で規格化せよ。

(2) $\int_0^d \varphi^*{}_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx \;=\; \delta_{mn}$ $(m=n:\ 1,\ m\neq n:\ 0)$ を示し、$\varphi(x)$ が規格直交性を満足することを示せ。

(3) 区間 $[0,d]$ での粒子の位置と運動量の期待値 $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ をそれぞれ求めよ。

(4) 自由粒子の運動量が確定していること、すなわち、運動量の標準偏差 $\Delta p=\sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2}=0$ を示し、Δp が 0 となる理由を記せ。

(5) 確率の流れの密度 $s\;=\dfrac{\hbar}{2mi}\left\{\varphi^*\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi-\varphi\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi^*\right\}$ を求めよ。

【問題 2】 解答用紙 B（茶色）

質量 m、エネルギー E の粒子の一次元の運動を量子論に基づいて考える。

(1)まずポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x)=\begin{cases}0 & (-a\le x\le a)\\ V_0 & (x<-a,\ x>a)\end{cases}$$

であり、$0<E<V_0$ の場合について、以下の問に答えよ。

① ポテンシャル $V(x)$ が x の偶関数 $(V(-x)=V(x))$ である場合、ハミルトニアンの固有関数は x の偶関数か奇関数かのどちらかに限られることを、束縛状態について示せ。

② 境界条件を満たす波動関数 $\varphi(x)$ のうち、偶関数であるものを求めよ（規格化しなくてよい）。

(2)今度は、ポテンシャルが

$$V(x)=\begin{cases}\infty & (x<0)\\ 0 & (0\le x\le a)\\ V_0 & (x>a)\end{cases}$$

であり、同様に $0<E<V_0$ の場合について、以下の問に答えよ。

（裏面に続く）

① 基底状態にある粒子の存在確率の分布関数（規格化しなくてよい）を求め、その V_0 依存性の概要について図を用いて説明せよ。

② エネルギー固有値 E が少なくとも 1 個存在する条件を導け。

③ $V_0 \to \infty$ のときのエネルギー固有値 E を求めよ。

【問題 3】　解答用紙 C（緑色）

幅 d 、高さ V_0 の 1 次元ポテンシャル障壁

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < -d,\ x > 0) \\ V_0 & (-d \le x \le 0) \end{cases}$$

に対してエネルギー $E\ (0 < E < V_0)$、質量 m の電子が入射した場合を考える。

(1) 各領域における固有関数および境界条件を求めよ。

(2) 電子の透過率 T が次式で表されることを示せ。

$$T = \left[1 + \frac{V_0{}^2 \sinh^2(\beta d)}{4E(V_0 - E)}\right]^{-1} \qquad \beta = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$$