平成２１年７月３０日

数学解析試験問題

担当：堺

以下の１～４および(I)～(ＩＶ)の８問の中から４問選んで答えよ。但し、同じ問題番号のうち、どちらか（たとえば、１または（I)が対比される）一方を選択すること。また、その解答する４問のうち、１～４の番号の問題の中から２問以上選択すること。

１．　次の微分方程式を解け。

$$D^2y+y=\sec x$$

２．(1)次の偏微分方程式で，$U(x,t)=X(x)T(t)$として変数分離せよ。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2\frac{\partial U}{\partial x};$$

(2) 境界条件「$U(0,t)=U(\pi,t)=0$」のもとで $U(x,t)$を求めよ。

３．(1) $f(x)=\dfrac{ae^{-a^2/4x}}{2\sqrt{\pi x^3}}$ の Laplace 変換 $L[f(x)](s)$ は、$e^{-a\sqrt{s}}$ となることを示せ。ただし、$\beta>0$ においては、以下の関係が成立する。

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\beta}{u}-u\right)^2}du=\int_0^\infty \frac{\beta e^{-\left(v-\frac{\beta}{u}\right)^2}}{v^2}dv$$

(2) *Convolution* 定理を用いて，次のアーベル型積分方程式の解 $y(\xi)$ を求めよ。

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^3}}e^{-\frac{a^2}{x-\xi}}y(\xi)d\xi=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{a^2}{x}}$$

ここで、$L\left[\dfrac{e^{-a^2/4x}}{\sqrt{\pi x}}\right](s)=\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$ であることを利用してもよい。

4
~~3~~. 留数の定理を用いて，次の定積分を計算せよ。

(1) $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$$

(2) $$\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{\left(x^2+a^2\right)^2}dx \qquad (a>0,\ m>0)$$

（I） 次の微分方程式を解け。

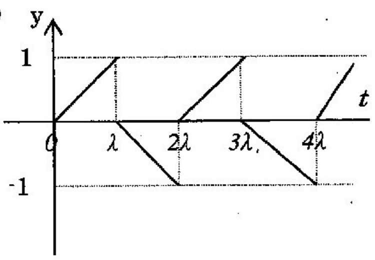
(i) $y' = 4e^{-y}\sin x - 1$　　(ii) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x^3$

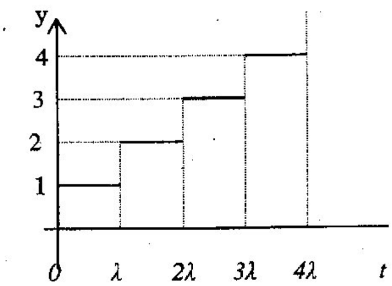
（I I） 以下の問いに答えよ。

(i) 区間[－π，π]で定義された関数　$f(x)=|\sin x|$　の Fourier 級数を求めよ。

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$　の値を求めよ。

（I I I） 次のグラフによって表される関数のラプラス変換をせよ。

(i)


(ii)


（I V）次の積分を求めよ。

(i) $\displaystyle\oint_C \tan^2 z\,dz$　　(ii) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$