

システム線形代数 試験問題 (担当: 谷野)

平成 21 年 7 月 23 日

1. 実行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ について, $\text{Im } A$ と $\text{Ker } A$ の基底を求めよ.

2. \mathbf{R}^n の m 個のベクトル x_1, x_2, \dots, x_m が 1 次独立であるための必要十分条件は

$$\det \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_m \rangle \\ \langle x_2, x_1 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_m \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_m, x_1 \rangle & \langle x_m, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_m, x_m \rangle \end{bmatrix} \neq 0$$

であることを証明せよ.

3. $m \times n$ 行列 A に対し次の式が成り立つことを証明せよ.

$$\dim(\text{Im } A) + \dim(\text{Ker } A) = n.$$

4. 実対称行列の相異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを証明せよ.

5. 実行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の一般化逆行列を求めよ.

6. 実行列 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ について, 次の問に答えよ. ただし λ は実数とする.

(a) 固有値と固有ベクトルを求めよ.

(b) $k = 1, 2, \dots$ に対し A^k を求めよ.

(c) e^{At} を求めよ (t は非負実数).

$$\frac{1 - \lambda^{k+1}}{1 - \lambda}$$

$$\lambda \frac{1 - \lambda^{k+1}}{1 - \lambda}$$

$$1 + \lambda^{k+1} - 2\lambda^k$$