

計測基礎 試験問題

担当：伊藤、村上、藤田、毎田

(注1) 問題【1】～【3】は、青色の解答用紙 [配点: 約 55%(合計)] に、問題【4】は、緑色の解答用紙 [配点: 約 30%] に、問題【5】は、茶色の解答用紙 [配点: 約 15%] に、それぞれ解答を記入すること。

(注2) 問題文中で定義されていない記号や文字等を使用する場合は、必ず定義を記した後に解答すること。

【1】 次の文章を読み、以下の各設問に答えよ。

《青色の解答用紙に解答を記入すること》

ある物性値 y が、互いに独立な n 個の計測変数 x_1, x_2, \dots, x_n の微分可能な関数 f により、 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と表せるものとする。また、 y の誤差、最大誤差及び誤差の分散を、それぞれ、 δy 、 $\Delta y (>0)$ 及び σ_y^2 と記し、各 x_i の誤差、最大誤差及び誤差の分散を、それぞれ、 δx_i 、 $\Delta x_i (>0)$ 及び $\sigma_i^2 (i=1, 2, \dots, n)$ 、と書くことにする。なお、全ての誤差や相対誤差は十分小さいものとする。

- (1) Δy と各 Δx_i との間に成立する関係式、並びに、 σ_y^2 と各 σ_i^2 との間に成立する関係式を導出せよ。
- (2) y が $x_1, x_2, x_3 (>0)$ により、 $y = k \cdot x_1^a \cdot x_2^{-b} \cdot x_3^{-c}$ (k, a, b, c は正の定数) として求められる場合について、最大相対誤差 $\frac{\Delta y}{y}$ と、最大相対誤差 $\frac{\Delta x_1}{x_1}$ 、 $\frac{\Delta x_2}{x_2}$ 、 $\frac{\Delta x_3}{x_3}$ との関係式を導け。

【2】 次の文章を読み、以下の各設問に答えよ。

《青色の解答用紙に解答を記入すること》

3つの物理量 x, y, M の間に、 a 及び b を定数として、 $M = ax + by$ なる関係式が成立する場合を考える。今、この3つの物理量を n 回測定し、 $(x_i, y_i, M_i) (i=1, 2, \dots, n)$ が得られたものとする。

- (1) 互いに独立な n 個の誤差変数 ε_i が、それぞれ、標準偏差 σ_i のガウス分布 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma_i^2}\right) (i=1, 2, \dots, n)$ に従う場合を考える。「最小2乗法」とそれらのガウス分布との関連を述べよ。
- (2) n 個の測定値の組 $(x_i, y_i, M_i) (i=1, 2, \dots, n)$ に関する誤差(残差)が、全て同一のガウス分布に従うものとして、最小2乗法により、 a 及び b を求めよ。
- (3) 各測定の誤差(残差)が、既知の標準偏差 $\sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$ のガウス分布に従う場合を考える。この場合、最小2乗法により、 n 個の測定値の組 (x_i, y_i, M_i) から、定数 a 及び b を決定するための連立方程式を導出し、行列を用いて、その連立方程式を表せ。(連立方程式は解かなくてよい。)

【3】 以下の (1) ～ (3) の各問いに答えよ。

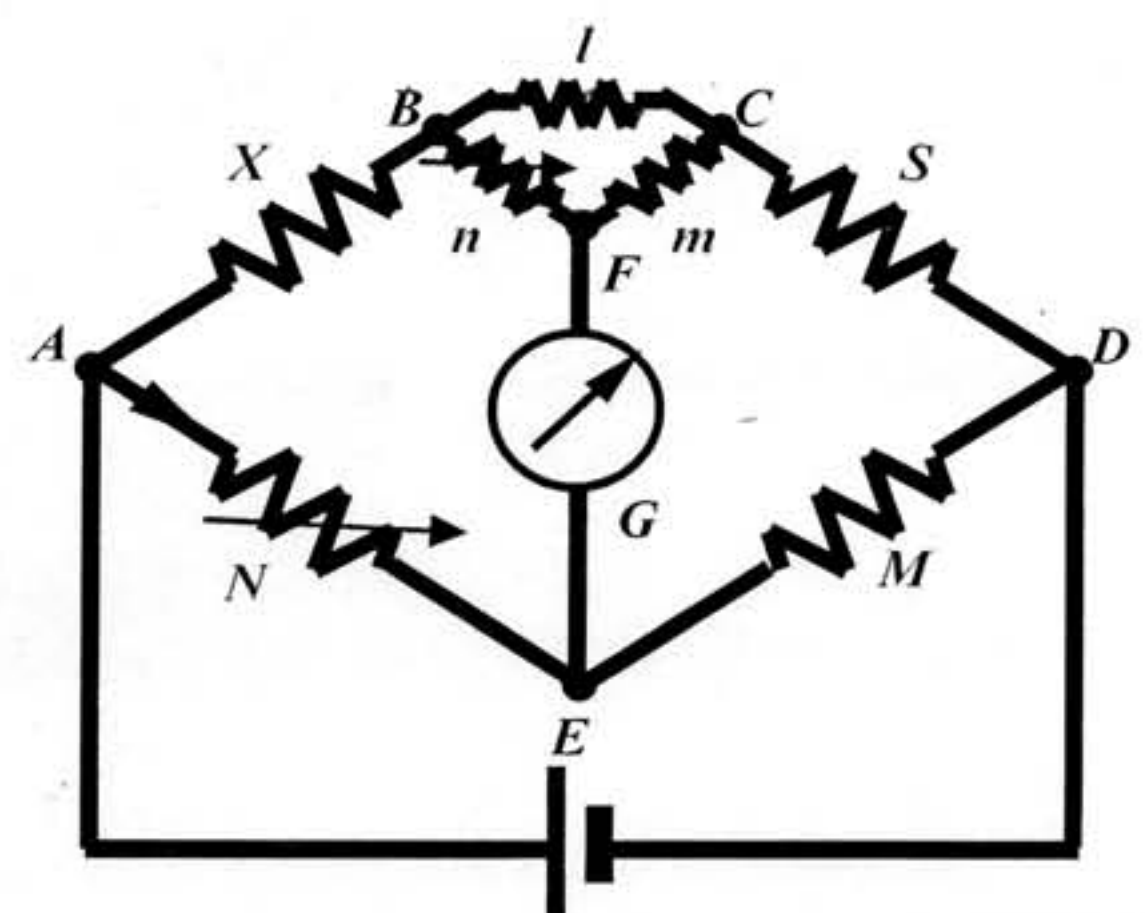
《青色の解答用紙に解答を記入すること》

- (1) 右下図に示すケルビンダブルブリッジの平衡状態における抵抗 X が

$$X = \frac{N}{M} S + \frac{ml}{m+n+l} \left(\frac{N}{M} - \frac{n}{m} \right)$$

で表されることを示し、その原理・特徴を簡潔に述べよ。

- (2) ①多段接続した増幅器の雑音指数、②サンプリング定理、③移動平均による平滑化、または、④周波数領域法による雑音除去(低減化)のうち、いずれか一つを選び、その内容を説明せよ。
- (3) ⑤アナログーデジタル(A/D)変換器(一つの方式のみでよい)、または、⑥デジタルーアナログ(D/A)変換器(一つの方式のみでよい)のうち、いずれか一つを選択し、その動作原理を説明せよ。



【4】以下の(1)及び(2)について解答せよ。

《緑色の解答用紙に解答を記入すること》

(1) 以下の①～③の各問いに答えよ。

- ① 抵抗素子内で発生するジョンソンノイズの起源は何か。また、これを根本から改善する方法について簡潔に述べよ。
- ② 光をフォトダイオードで検出する場合、ある時間内に検出される光子数はその平均値 N を中心としたポアソン分布に従う。このとき光子雑音の標準偏差は平均値 N の変化に対してどのように変化するか。また、計測精度は光強度の強弱に依存するか？もし依存する場合、より精度の高い (SN 比の良い) 測定が可能なのは、光の強度が強い場合か、それとも弱い場合か。
- ③ 電圧の量子標準に利用されている素子の名称を述べ、その素子はどのようなものかを簡潔に説明せよ。

(2) 雑音に埋もれた微小信号を測定するための測定機器の一つであるロックインアンプに関して、以下の①～③の各問いに答えよ。ただし、②については、(ア)～(エ)を最も適切な語句または数値で埋めよ。数値で埋める場合は有効数字2桁とし、必要であれば $\log_{10} 2 \approx 0.30$ と近似してよい。

- ① ロックインアンプでは、入力初段にある乗算器が微小信号を検出する上で非常に重要な役割を担っているが、その果たす役割について言葉で説明せよ。
- ② 乗算器は、オペアンプ、FET、および抵抗素子 (抵抗値 R) を使って作ることができるが、その回路図を示せ。ただし作図に際しては、オペアンプの反転入力端子 (－記号) および非反転入力端子 (+記号)、また2つの信号入力端子 V_{1in} 、 V_{2in} 、信号出力端子 V_{out} 、および、FETのドレイン、ソース、ゲートをそれぞれ D、S、G と明記して、その配置を明確に示すこと。
- ③ ロックインアンプでは、通常の測定レンジの他に“ダイナミックリザーブ”と呼ばれるパラメータがあり、これは測定レンジの何倍までのノイズを許容できるかを示し、以下の式で定義される。

$$\text{ダイナミックリザーブ [dB]} = (\text{ア}) \times \log_{10} \frac{ (\text{イ}) }{ (\text{ウ}) }$$

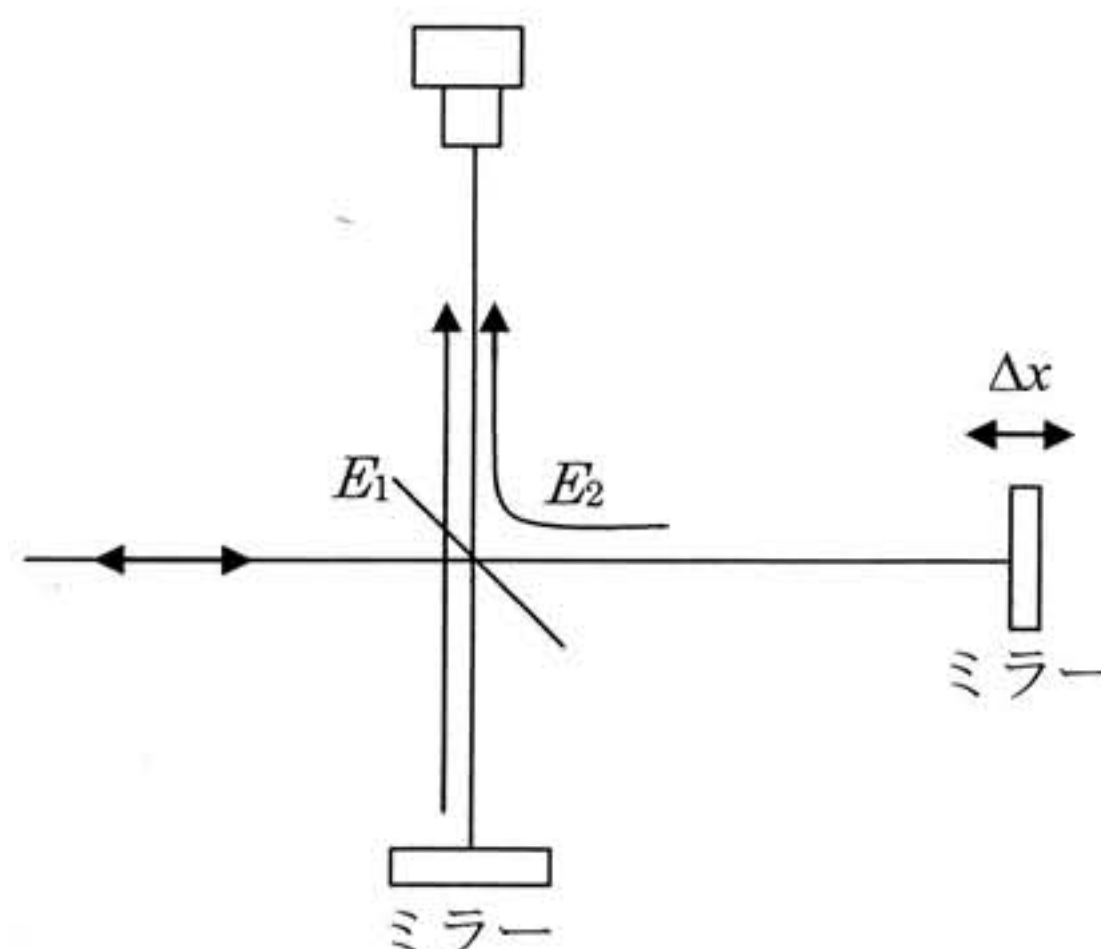
また、ロックインアンプでは、測定する信号に合わせてこのダイナミックリザーブを数段階に可変できる。例えば、 $0.05 [\text{mV}_{\text{rms}}]$ の目的信号に対して、 $1 [\text{V}_{\text{p-p}}]$ の雑音が重畳された信号を測定する場合には、測定レンジを 0.1 mV レンジに設定すると、(エ) [dB] 以上のダイナミックリザーブが必要となる。

【5】以下の各問いに答えよ。

《茶色の解答用紙に解答を記入すること》

- (1) 右図に示すマイケルソン型干渉系において、 $E_1 = A \exp i(\omega t + \phi_1)$ と $E_2 = \frac{A}{2} \exp i(\omega t + \phi_2)$ の干渉を考える。ここで、 E_1 、 E_2 はそれぞれの電界強度、 A 、 $\frac{A}{2}$ はそれぞれの振幅強度、 ω 、 t はそれぞれ角周波数、時間、 ϕ_1 、 ϕ_2 はそれぞれの $t=0$ における位相、である。

- ① 光の干渉強度 I を求めよ。(ヒント: E を光の電界強度とすると、 $I = E \times E^*$)
- ② 一方のミラーを動かすとき、干渉強度のピークから次のピークがあらわれるまでの、変位 Δx と干渉強度を図示せよ。



- (2) 角周波数 ω の光子のエネルギーと運動量を示せ。