

システム線形代数 試験問題 (担当: 谷野)

平成 22 年 7 月 22 日

1. A を $n \times n$ 正定対称行列とする. 以下の問に答えよ.

- (a) A の対角要素はすべて正であることを示せ.
- (b) T を $n \times n$ 行列とすると, $T^T A T$ が半正定であることを示せ. また, この行列が正定になるための T に関する必要十分条件を求めよ.

2. W を \mathbf{R}^n の部分空間, x_1, x_2, \dots, x_r ($r < n$) を W の正規直交基底とする. 以下の問に答えよ.

- (a) x を W に属さない \mathbf{R}^n のベクトルとすると, x_1, x_2, \dots, x_r, x は 1 次独立であることを示せ.
- (b) \mathbf{R}^n に $n-r$ 個のベクトル $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ を取り, x_1, x_2, \dots, x_n が \mathbf{R}^n の正規直交基底になるようにする方法を説明せよ.

3. $m \times n$ 行列 A に対し以下のそれぞれの式について, もしそれが成り立つなら証明を与え, 成り立たないなら反例を挙げよ. ただし, $m < n$ とする.

$$\dim(\text{Im } A) + \dim(\text{Ker } A) = m, \quad (1)$$

$$\dim(\text{Im } A) + \dim(\text{Ker } A) = n. \quad (2)$$

4. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

について以下の問に答えよ.

- (a) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ (1 次独立なものを固有空間の次元と同じだけ求めること).
- (b) A の Jordan 標準形を求めよ.

5. 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ について以下の問に答えよ.

- (a) $\text{Ker } A$ 及びその直交補空間 $(\text{Ker } A)^\perp$ の基底を求めよ.
- (b) $\text{Im } A$ 及びその直交補空間 $(\text{Im } A)^\perp$ の基底を求めよ.
- (c) (a), (b) の結果を利用して A の一般化逆行列を求めよ.

解答用紙には, 所属コース名 (略記可), 学生番号, 氏名を明記すること