

{p1~}

、読者は  $i^2 = -1$  をみたす虚数単位  $i$  を知っているだろう。虚数単位を 2 つの実数  $x, y$  と加法乗法で結びつけて、複素数  $x + iy$  をうる。。。2 つの複素数が等しいのは、それらが同じ実部と同じ虚部をもつとき、そのときだけと約束する。

。普通の計算規則を複素数に適用してよいと仮定し、

$$(x + iy) + (\gamma + i\delta) = (x + \gamma) + i(y + \delta)$$

$$(x + iy)(\gamma + i\delta) = (x\gamma - y\delta) + i(x\delta + y\gamma)$$

とする。後者では  $i^2 = -1$  を用いた。

。  $\gamma + i\delta \neq 0$  と仮定して、

。

、

。

。

$$\frac{x + iy}{\gamma + i\delta} = \frac{x\gamma + y\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + i \frac{y\gamma - x\delta}{\gamma^2 + \delta^2}$$

をうる。

{p7~}

積  $= x^2 + y^2$  はつねに正か零である。その正の平方根を、複素数  $z$  の絶対値といい  $|z|$  とかく。。。。

{p13~}

。点  $(x, y)$  の極座標が  $(r, \theta)$  ということは、

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

ということである。ゆえに、 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  とかける。、 $r$  はつねににとることにすると  $r$  は絶対値  $|z|$  に等しい。角  $\theta$  を複素数  $z$  の偏角といって  $\arg z$  とかく。

以下は自分用のメモ

{p1~}

、読者は  $i^2 = -1$  をみたす虚数単位  $i$  を知っているだろう。虚数単位を 2 つの実数  $\alpha, \beta$  と加法乗法で結びつけて、複素数  $\alpha + i\beta$  をうる。。。2 つの複素数が等しいのは、それらが同じ実部と同じ虚部をもつとき、そのときだけと約束する。

。普通の計算規則を複素数に適用してよいと仮定し、

$$(\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta) = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta)$$

$$(\alpha + i\beta)(\gamma + i\delta) = (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma)$$

とする。後者では  $i^2 = -1$  を用いた。

。  $\gamma + i\delta \neq 0$  と仮定して、

。

、

。

。

$$\frac{\alpha + i\beta}{\gamma + i\delta} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + i\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}$$

をうる。

{p7~}

積  $= \alpha^2 + \beta^2$  はつねに正か零である。その正の平方根を、複素数  $a$  の絶対値といい  $|a|$  とかく。。。。

{p13~}

。点  $(\alpha, \beta)$  の極座標が  $(r, \varphi)$  ということは、

$$\alpha = r\cos\varphi$$

$$\beta = r\sin\varphi$$

ということである。ゆえに、 $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$  とかける。、 $r$  はつねににとることになると  $r$  は絶対値  $|a|$  に等しい。角  $\varphi$  を複素数  $a$  の偏角といって  $\arg a$  とかく。

チャp1

$$i^2 := -1$$

2 つの複素数、の相等、和、積を次のように定める：

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$$

p1

2つの実数  $x, y$  の組  $(x, y)$  を考え、これを改めて  $x + iy$  で表す。ここでは、 $+i$  は、その前にある数が第1成分であり、その後にある数が第2成分であることを示す単なる記号と考える。、つの元に対し、これらの和、差、積、商を

と定義する。、 $0+i0, 1+i0$  のそれぞれを改めて  $0, 1$  で表し、



正則関数、コーシー・リーマンの微分方程式 { 複素解析 p25 ~ }

複素変数の複素関数で、定義されている 各点 で微分係数をもつものを、解析関数という。正則関数ともいって { 高 } 同じ意味である。

微分係数の定義は

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \{ \text{高} \}$$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h + ik \{ 0 < |h + ik| < \delta \},$$

$$\left| \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon]$$

という形でかける。

例  $D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1 + i1$  において複素微分可能である。  $2 + i2$

どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h + ik| < \delta$  となるすべての  $h + ik$  に対し  $\left| \frac{\{(1+h)^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{h + ik} - \{2 + i2\} \right| < \varepsilon$  となる。

$\left| \frac{\{(1+h)^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{h + ik} - \{2 + i2\} \right| < 100$  とするに

は、 $0 < |h + ik| < 1$  で大丈夫。

$$\{0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1,$$

$$\left| \frac{\{(1+0.5)^2 - \{1-0.5\}^2 + i2\{1+0.5\}\{1-0.5\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2 + i2\} \right| < 100,$$

$$0 < |0.1 + i0.2| < 1,$$

$$\left| \frac{\{(1+0.1)^2 - \{1+0.2\}^2 + i2\{1+0.1\}\{1+0.2\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.1 + i0.2} - \{2 + i2\} \right| < 100\}.$$

$$\left| \frac{\{(1+h)^2 - \{1+k\}^2 + i2\{1+h\}\{1+k\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{h + ik} - \{2 + i2\} \right| < 200 \text{ とするに}$$

は、...

[次のページへ続く。]

h が 0 に近づく 近づき方によらず 極限 は同じでなければならない{高} h を実数にとって 0 に近づけると、虚数部分 y は一定であり微分係数は x に関する偏微分係数になる。したがって、次の式をうる：

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h, y) + iv(x+h, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + i0} =]$$

同様に、h を純虚数 ik にして 0 に近づけると、

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z+ik) - f(z)}{ik} = -i \frac{\partial f}{\partial y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$[\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\{u(x, y+k) + iv(x, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{0 + ik}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + \lim_{k \rightarrow 0} \frac{i\{v(x, y+k) - v(x, y)\}}{ik}]$$

をうる。ゆえに、 $f(z)$  は偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

をみたすことがわかり、これを実数の方程式にわけると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (6)\{\text{高}\}$$

$$[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)]$$

となる。これは、コーシー・リーマンの微分方程式とよばれ{高} 解析関数の実部と虚部はこれをみたさねばならない。

[次のページへ続く。]

、 $u$  と  $v$  は 1 回微分可能で 1 階偏導関数は連続とし、(6) をみたとする。微分可能性についてのこの条件の下で、偏微分法の定理から

$$\underline{u(x+h, y+k) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k + \varepsilon_1 \quad \{\text{高}\}}$$

$$\underline{v(x+h, y+k) - v(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}h + \frac{\partial v}{\partial y}k + \varepsilon_2 \quad \{\text{高}\}}$$

$$[u(x+h, y+k) - u(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)k + \varepsilon_1(h, k)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h+ik \{0 < |h+ik| < \delta\}, \left| \frac{\varepsilon_1(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| < \varepsilon]$$

とかけ、 $h+ik \rightarrow 0$  のときに  $\varepsilon_1/(h+ik) \rightarrow 0$ 、 $\varepsilon_2/(h+ik) \rightarrow 0$  という意味で、剰余項  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  は  $h+ik$  より早く 0 に近づくことがわかっている。 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  とおくと、(6) により

$$\underline{f(z+h+ik) - f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(h+ik) + \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \quad \{\text{高}\}}$$

となり、ゆえに、

$$\lim_{h+ik \rightarrow 0} \frac{f(z+h+ik) - f(z)}{h+ik} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \{\text{高}\}$$

をうる。これで、 $f(z)$  は解析的がいえた。

$\{u(x, y), v(x, y)\}$  が偏微分可能で偏導関数は連続とし、コーシー・リーマンの微分方程式をみたとすると、 $f(z) = u(z) + iv(z)$  は解析関数で、導関数  $f'(z)$  は連続となる。また、この逆も成り立つ。

$$[v(x_0+h, y_0+k) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)k + \varepsilon_2(h, k)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \{0 < \left| \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right| < \delta\}, \left| \frac{\varepsilon_2(h, k)}{\left| \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right|} \right| < \varepsilon]$$

**定義** 開集合上で定義された複素数値関数は、の各点で微分係数をもつときに、で解析的であるという。

、。正則関数という言葉も、よく使われる同意語である。



p24

The class of analytic functions is formed by the complex functions of a complex variable which possess a derivative wherever the function is defined. The term holomorphic function is used with identical meaning.

The definition of the derivative can be rewritten in the form

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \{ \text{高} \}$$

$$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h + ik \{0 < |h + ik| < \delta\},$$

$$\left| \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} - \{a + ib\} \right| < \varepsilon]$$

The limit of the difference quotient must be the same regardless of the way in which h approaches zero. If we choose real values for h, then the imaginary part y is kept constant, and the derivative becomes a partial derivative with respect to x. We have thus

正則 { 解析入門 Ip162 }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された複素数値関数  $f[= u(x, y) + iv(x, y)]$  は、一点  $a[= a + ib] \in D$  において

$$\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in C$$

[どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h + ik| < \delta$  となるすべての  $h + ik$  に対し  $\left| \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - \{\alpha + i\beta\} \right| < \varepsilon$  となる]

が存在するとき、複素微分可能であるといい、 $b$  を  $f$  の  $a$  における導値といい、 $f'(a)[=]$  で表わす。領域  $D$  の各点で複素微分可能であるとき、 $f$  は  $D$  で正則という。

例  $D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1 + i1$  において複素微分可能である。 $2 + i2$

どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |k + il| < \delta$  となるすべての  $k + il$  に対し  $\left| \frac{\{\{1+k\}^2 - \{1+l\}^2 + i2\{1+k\}\{1+l\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < \varepsilon$  となる。

$\left| \frac{\{\{1+k\}^2 - \{1+l\}^2 + i2\{1+k\}\{1+l\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < 100$  とするには、  
 $0 < |k + il| < 1$  で大丈夫。

$\{0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1,$

$\left| \frac{\{\{1+0.5\}^2 - \{1-0.5\}^2 + i2\{1+0.5\}\{1-0.5\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2 + i2\} \right| < 100,$

$0 < |0.1 + i0.2| < 1,$

$\left| \frac{\{\{1+0.1\}^2 - \{1+0.2\}^2 + i2\{1+0.1\}\{1+0.2\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.1 + i0.2} - \{2 + i2\} \right| < 100\}.$

$\left| \frac{\{\{1+k\}^2 - \{1+l\}^2 + i2\{1+k\}\{1+l\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < 200$  とするには、  
 $\dots$

{ 解析入門 Ip162 } { 解析入門 Ip163 ~ 164、イプシロン-デルタ p44 ~、数学概論 p169 }

$[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall k + il \{0 < |k + il| < \delta\},$

$\left| \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - \{\alpha + i\beta\} \right| < \varepsilon]$

$f'(a)[= \frac{d}{dx+idy}\{u(a, b) + iv(a, b)\}]$



複素関数入門 p26

定義

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

$$f'(z)$$

複素関数入門 p51

関数がある点で微分可能であるというのは、h が 0 でない複素数を動きつつ 0 に近づく とき、近づき方にはよらず に一定の 極限 が存在することをいうのであった。

複素関数入門 p52

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o()$$

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + o(|z - z_0|), \quad \alpha = \frac{df}{dz}(z_0)$$

$$\alpha = a + ib$$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + a(x - x_0) - b(y - y_0) + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}),$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + b(x - x_0) + a(y - y_0) + o(\sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2})$$

複素関数入門 p54

定義 領域で定義された関数  $f(z)$  が正則であるとは、それが級であって、複素関数として微分可能であることをいう。

解析概論 p201

。すなわち  $f(z)$  が  $z$  において微分可能であるとは

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$$

が確定であることをいう。換言すれば

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + o(h)$$

で、

すなわち  $h$  が どの方面から、どのような過程を経て  $0$  に 近づくとしても、それには無関係に  
が一定の 極限  $f'(z)$  に近づくのである。

複素数平面上の或る領域  $K$  の 各点 において微分可能な函数を  $K$  において正則な 解析函数という。  
あるいは略して単に 正則ともいう。

上記の意味で、 $f(z) = u + vi$  が  $z = x + yi$  に関して微分可能であることを、実数の関係に引き  
直してみるために、 $f'(z) = p + qi$  とし、また  $h = dz = dx + idy$  と置けば、(1) から

$$, \quad (|h| = \sqrt{dx^2 + dy^2})$$

故に実部と虚部とを分けて

すなわち、 $u, v$  は実変数  $x, y$  の函数としての意味で微分可能で

$$u_x = v_y = p, \quad -u_y = v_x = q$$

従って

$$f'(z) = u_x + iv_x = -i()$$

すなわち  $f(z)$  が正則ならば、その実部  $u$  および虚部  $v$  の間に

$$\underline{u_x = v_y, \quad u_y = -v_x} \quad (2)$$

なる関係が成り立つ。これは微分可能の必要条件である。(2) を Cauchy-Riemann の微分方程式と  
いう。

逆に  $u, v$  が  $x, y$  の実函数として、に述べた意味で微分可能で、かつ (2) が成り立つならば、 $h =$   
 $dx + idy$  として

$$\underline{du = u_x dx + u_y dy + o(|h|),}$$

$$\underline{dv = v_x dx + v_y dy + o(|h|),}$$

従って (2) を用いて

$$\underline{du + idv = (u_x + iv_x)(dx + idy) + o(|h|)}$$

故に

すなわちは複素変数に関して微分可能である。

。

複素関数 p33

複素数 30 講 p85

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy$$

複素数 30 講 p89

定義 極限值

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

が存在するとき、 $f$  は、 $z_0$  で微分可能であるといい、この極限値を  $f'(z_0)$  で表わす：

すなわち、ある複素数  $A$  があって

30 講 p91

とおく。このときは

$$\{u(x, y) + iv(x, y)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\} = (a + ib)\{(x - x_0) + i(y - y_0)\} + ()\{(x - x_0) + i(y - y_0)\}$$

という式になる。

この実数部分、虚数部分を見比べると

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = a(x - x_0) - b(y - y_0) + -$$

という

$$z \rightarrow z_0 \text{ のとき } \epsilon \rightarrow 0$$

という関係は、ここでは

$$x - x_0, y - y_0 \rightarrow 0 \text{ のとき、 } \epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$$

と表わされる。

30 講 p92

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\{u(x, y_0) + iv(x, y_0)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

複素数 30 講 p97

定義 領域  $D$  で定義された関数が、 $D$  の各点で微分可能なとき、 $f$  を  $D$  上の正則関数という。  
を、 $f(z)$  の導関数という。

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z)$$

なお、で述べたように、微分可能ならば連続なのだから、正則関数は連続な関数となっている。

複素解析 p23

定義 1 関数  $f(x)$  が  $x$  を  $a$  に近づけたときに極限  $A$  をもつ、記号でかくと

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

というのは次のことが成り立つことである：

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在し、 $|x - a| < \delta$ 、 $x \neq a$  をみたすすべての  $x$  に対し  $|f(x) - A| < \varepsilon$  が成り立つようにできる。

複素解析 p25

複素変数の複素関数で、定義されている各点で微分係数をもつものを、という。正則関数ともいって、同じ意味である。

微分係数の定義は

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

という形でかける。

[任意の  $\varepsilon > 0$  に対し  $\delta > 0$  が存在し、 $|h - 0| < \delta$ 、 $h \neq 0$  をみたすすべての  $h$  に対し  $\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| < \varepsilon$  が成り立つようにできる。]

記号

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (\mathcal{A})$$

$$\frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h+ik} \quad (\text{数学概論})$$

$$[f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h+ik}]$$

$$q : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (\text{田島})$$

$$q : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x-a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon \quad (\text{田島})$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h| < \delta), |\frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h+ik} - f'(z)| < \epsilon]$$

杉浦記号

定義 1

$$\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in C \quad (\text{杉 1.1})$$

$$\frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h+ik} \quad (\text{数学概論})$$

$$[\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k+il}]$$

P51 ~ 52

定義 2  $f$  を  $R^n$  の部分集合  $A$  で定義され、 $R^m$  の値を取る函数とし、 $a \in \bar{A}, b \in R^m$  とする。  
 $x$  が  $a$  に近づくときの  $f(x)$  の極限が  $b$  であるとは、どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、  
 $|x-a| < \delta$  となるすべての  $x \in A$  に対し  $|f(x) - b| < \varepsilon$  となることを言う。このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

などと表わす。

[どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h+ik| < \delta$  となるすべての  $h+ik$  に対し  
 $|\frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k+il} - \{\alpha + i\beta\}| < \varepsilon$  となる]



記号

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\{u(x, y_0) + iv(x, y_0)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (\text{志})$$

$$[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{(x_0 + h + iy_0) - (x_0 + iy_0)} =]$$

$$[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x + h, y) + iv(x + h, y)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + i0} =]$$

この章では  $R^n$  の元  $x$  を

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\text{杉浦})$$

函数  $f$  が

$$\lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (\text{杉浦})$$

をみたすとき、 $f$  を一般に  $o(g)\{x \rightarrow a\}$  と記す。

$$(|h| = \sqrt{dx^2 + dy^2}) \quad (\text{高})$$

$h = dx + idy$  として

$$du = u_x dx + u_y dy + o(|h|) \quad (\text{高})$$

$$[\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(h)}{|h|(h)} = 0]$$

$$[\lim_{dx+idy \rightarrow 0, dx+idy \neq 0} \frac{f(h)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}(h)} = 0]$$

$$q : \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (\text{田島})$$

$$q : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon \quad (\text{田島})$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h - 0| < \delta), |\frac{f(h)}{|h|(h)} - 0| < \epsilon]$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall dx + idy \{0 < |dx + idy - 0| < \delta\}, |\frac{f(h)}{\sqrt{dx^2 + dy^2}(h)} - 0| < \epsilon]$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \{0 < \left| \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right| < \delta\}, \left| \frac{\varepsilon_1(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| < \epsilon]$$

$$f(z + h) - f(z) = (a + bi)h + o(h) \quad (h \rightarrow 0) \quad (\text{杉浦 1.8})$$

$$u(x + k, y + l) - u(x, y) = ak - bl + o(h) \quad (h \rightarrow 0) \quad (\text{杉浦 1.9})$$

$$[\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(h)}{h(h)} = 0]$$

$$q: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (\text{田島})$$

$$q: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon \quad (\text{田島})$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h| < \delta), |\frac{f(h)}{h(h)} - 0| < \epsilon]$$

定義1  $R^n$  の開集合  $U$  で定義された実数値関数  $f$  が、 $a \in U$  で微分可能であるとは、ある  $n$  項横ベクトル  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  が存在して

$$f(a+h) - f(a) = ch + o(|h|) \quad \{h \rightarrow 0\} \quad (\text{杉浦 5.3})$$

$$[\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(h)}{h(h)} = 0]$$

となることを意味する。

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \{0 < \left| \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right| < \delta\}, \left| \frac{\varepsilon_1(h, k)}{\left| \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right|} < \epsilon]$$

下書き解析入門 Ip162

定義1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された複素数値関数  $f$  は、一点  $a \in D$  において

$$\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in C$$

$$[\lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} = b \in C]$$

が存在するとき、複素微分可能であるといい、 $b$  を  $f$  の  $a$  における、 $f'(a)$  で表わす。領域  $D$  の各点で複素微分可能であるとき、 $f$  は  $D$  で正則という。

P163 ~ 164 { 30P91 }

定理  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) (z = x + yi)$

$$h = k + li$$

$$u(x+k, y+l) - u(x, y)$$

$$f'(z) = a + ib =$$

イプシロン-デルタ p44 ~

$$q: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

すなわち、

$q$ : 任意の正の数に対して、適当な正の数を決めると、

$$0 < |x - a| < \delta \text{ のすべての } x \text{ について } |f(x) - b| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

となるのであったが、

結局、q は、とを用いて、

$$q : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon$$

$$\left[ \lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b \in C \quad \text{杉浦 (1.1)} \right]$$

$$[q : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |h - 0| < \delta), \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - b \right| < \epsilon]$$

$$\left[ \lim_{h \neq 0, h \rightarrow 0} \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} = b \in C \right]$$

$$[q : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h| < \delta), \left| \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - b \right| < \epsilon]$$

数学概論 p169

$$\frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik}$$

イプシロン-デルタ p44 ~

$$q: \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

すなわち、

q: 任意の正の数に対して、適当な正の数を決めると、

$$0 < |x - a| < \delta \text{ のすべての } x \text{ について } |f(x) - b| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

となるのであったが、

結局、q は、とを用いて、

$$q: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (0 < |x - a| < \delta), |f(x) - b| < \epsilon$$

$$[f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad \mathcal{A}]$$

$$[q: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h| < \delta), |\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)| < \epsilon]$$

$$[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik} = f'(z) \quad \mathcal{A} + \text{寺}]$$

$$[q: \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall h (0 < |h| < \delta), |\frac{\{u(x+k, y+l) + iv(x+k, y+l)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{k + il} - f'(z)| < \epsilon]$$

数学概論 p169

$$\frac{f(z+\delta) - f(z)}{\delta} = \frac{\{u(x+h, y+k) + iv(x+h, y+k)\} - \{u(x, y) + iv(x, y)\}}{h + ik}$$

複素関数 p28

複素関数入門 p26

$$\left(\text{または} \frac{d}{dz} f(z)\right)$$

$$\left[\frac{d}{dx+idy}\{u(x,y)+iv(x,y)\}\right]$$

$$\left[\frac{d}{dx+idy}\{u(a,b)+iv(a,b)\}\right]$$

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z))$$

複素関数入門 p50

$$\overline{z}(f(z))$$

曲面上の関数論 p4

$$dz = dx + idy$$



P51 ~ 52

定義2  $f$  を  $R^n$  の部分集合  $A$  で定義され、 $R^m$  の値を取る函数とし、 $a \in \bar{A}, b \in R^m$  とする。 $x$  が  $a$  に近づくときの  $f(x)$  の極限が  $b$  であるとは、どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $|x - a| < \delta$  となるすべての  $x \in A$  に対し  $|f(x) - b| < \epsilon$  となることを言う。このとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

などと表わす。

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(|x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \epsilon)$$

$$[\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \{0 < |x - a| < \delta\}, |f(x) - b| < \epsilon]$$

[どんな  $\epsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |h - 0| < \delta$  となるすべての  $\{a + h\} \in D$  に対し  $|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - b| < \epsilon$  となることを言う。]

P120

ある  $n$  項横ベクトル  $c=[,,]$  が存在して

30p34

どんな正数  $\epsilon$  をとっても、ある正数  $\delta$  で

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon$$

を成り立たせるものが存在するとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

と表わす。そして

複素微分可能、正則 { 解析入門 Ip162 }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y)$  が  $a + ib \in D$  において複素微分可能であるとは、ある  $\alpha + i\beta$  が存在して

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall k + il \{0 < |k + il| < \delta\},$$

$$\left| \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - \{\alpha + i\beta\} \right| < \varepsilon$$

となることをいう。このとき

$$\alpha + i\beta = \{u + iv\}'(a + ib)$$

等と記す。領域  $D$  の各点で複素微分可能であるとき、 $u(x, y) + iv(x, y)$  は  $D$  で正則という。

例  $D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1 + i1$  において複素微分可能である。  $2 + i2$

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、ある  $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |k + il| < \delta$  ならば

$$\left| \frac{\{1+k\}^2 - \{1+l\}^2 + i2\{1+k\}\{1+l\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < \varepsilon \text{ となる。}$$

$\varepsilon = 100$  に対し、 $\delta = 1$ 、 $0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1$ 、

$$\left| \frac{\{1+0.5\}^2 - \{1-0.5\}^2 + i2\{1+0.5\}\{1-0.5\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2 + i2\} \right| < 100$$

$\varepsilon = \dots$

複素微分可能、正則の定義 { 解析入門 P162 } { 解析入門 P51 ~ 52、120、163 ~、30 講 P89 }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された複素数値関数  $u(x, y) + iv(x, y)$  が  $\{a + ib\} \in D$  において複素微分可能であるとは、ある複素数  $\alpha + i\beta$  が存在して

$$\text{どんな } \varepsilon > 0 \text{ に対しても、} \delta > 0 \text{ が存在して、} 0 < |k + il| < \delta \text{ となるすべての } \{\{a + ib\} + \{k + il\}\} \in D \text{ に対し } \left| \frac{\{u(a+k, b+l) + iv(a+k, b+l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - \{\alpha + i\beta\} \right| < \varepsilon$$

となることを言う。このとき  $\alpha + i\beta = \{u + iv\}'(a + ib)$  等と記す。領域  $D$  の各点で複素微分可能であるとき、 $u(x, y) + iv(x, y)$  は  $D$  で正則という。

例  $D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1 + i1$  で微分可能である

どんな  $\varepsilon > 0$  に対しても、 $\delta > 0$  が存在して、 $0 < |k + il| < \delta$  となるすべての  $\{\{1 + i1\} + \{k + il\}\} \in D$  に対し

$$\left| \frac{\{1+k\}^2 - \{1+l\}^2 + i2\{1+k\}\{1+l\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < \varepsilon \text{ となる。}$$

$\varepsilon = 100$  の場合、 $\delta = 1$  は OK。  $0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1$ 、

$$\left| \frac{\{1+0.5\}^2 - \{1-0.5\}^2 + i2\{1+0.5\}\{1-0.5\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2 + i2\} \right| < 100$$

$\varepsilon = \dots$





大学院別入試問題と解法 P15

[6]

解

複素微分可能、正則の定義 { 解析入門 P162 }

定義 1 複素数体  $C$  の開集合  $D$  で定義された関数  $u(x, y) + iv(x, y)$  が  $\{a + ib\} \in D$  において複素微分可能であるとは、ある複素数  $\alpha + i\beta$  が存在して

$$\{\forall \epsilon > 0\} \{\exists \delta > 0\} \{\forall \{a + ib\} + \{k + il\} \in D\}$$

$$\{0 < |k + il| < \delta \implies \left| \frac{\{u(a + k, b + l) + iv(a + k, b + l)\} - \{u(a, b) + iv(a, b)\}}{k + il} - \{\alpha + i\beta\} \right| < \epsilon\}$$

となることをいう。このとき

$$\alpha + i\beta = \{u + iv\}'(a + ib)$$

等と記す。領域  $D$  の各点で複素微分可能であるとき、 $u(x, y) + iv(x, y)$  は  $D$  で正則という。

例と説明  $D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$  で定義された  $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$  は  $1 + i1$  で微分可能

$\epsilon$  にどんな数  $\{> 0\}$  を選んでも、 $0 < |k + il| < \delta$  となる  $k + il$  ならなんでも

$$\left| \frac{\{(1 + k)^2 - (1 + l)^2 + i2\{1 + k\}\{1 + l\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{k + il} - \{2 + i2\} \right| < \epsilon \text{ となる。そう}$$

いう  $\delta$  が選べる。

$\epsilon = 100$  の場合、 $\delta = 1$  は OK。  $0 < |0.5 + i\{-0.5\}| < 1$ 、

$$\left| \frac{\{(1 + 0.5)^2 - (1 - 0.5)^2 + i2\{1 + 0.5\}\{1 - 0.5\}\} - \{1^2 - 1^2 + i2 \cdot 1 \cdot 1\}}{0.5 + i\{-0.5\}} - \{2 + i2\} \right| < 100$$

$\epsilon = \dots$