

複素線積分 { Ahlfp108 ~、Churp70 ~ }

、実区間の上での複素数値関数の定積分である。 $f(t) = u(t) + iv(t)$ が区間 $[a, b]$ で定義された連続関数のとき、

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt \quad (1) \{ a \}$$

と定義する。。

$$\int_a^b cf(t)dt = c \int_a^b f(t)dt \quad (c = \text{複素数値}) \quad (3) \{ ca \}$$

(3) について。 $c = \alpha + i\beta$ とすると、

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \{ \alpha + i\beta \} \{ u + iv \} dt \\ &= \int_a^b \{ \{ \alpha u - \beta v \} + i \{ \alpha v + \beta u \} \} dt \\ &= \int_a^b \{ \alpha u - \beta v \} dt + i \int_a^b \{ \alpha v + \beta u \} dt \quad ((1) \text{ から}) \\ &= \alpha \int_a^b u dt - \beta \int_a^b v dt + i \alpha \int_a^b v dt + i \beta \int_a^b u dt \quad (\text{実数の微分積分学の性質から}) \\ &= \{ \alpha + i\beta \} \{ \int_a^b u dt + i \int_a^b v dt \} = \end{aligned}$$

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \quad () \quad (4) \{ ca \}$$

(4) について。

$$\int_a^b f(t)dt = \text{複素定数} = re^{i\theta}$$

とおくと、 $|e^{i\theta}| = 1$ だから、

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| = r$$

いっぽう、

$$\begin{aligned} r &= e^{-i\theta} \int_a^b f(t)dt \\ &= \int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt \quad ((3) \text{ から}) \\ &= \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt \quad (r = \text{実数であるから、も実数}) \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta} f(t)]dt \quad () \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)|dt \quad () \\ &= \int_a^b |f(t)|dt \quad (|e^{-i\theta}| = 1) \end{aligned}$$

、 $z = z(t), a \leq t \leq b$ で表された区分的に微分可能な曲線 C を考える。関数 $f(z)$ が C の上で定義され連続とすると $\{j\}$ $f(z(t))$ は連続となり

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \quad \{acs\}$$

$$[= \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\} dt + i \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\} dt]$$

とおくことができる。これを、曲線 C の上での $f(z)$ の複素線積分の $\{cj\}$ われわれの定義とする $\{cj\}$

$z'(t)$ が区分的に連続であるとする、の右辺の積分は、の実変数の複素数値関数の積分として一定の値が存在する

、、曲線の形そのものは C と同じであるが向きを逆と見たものを $-C$ で表す：

$$: z = z(-t) = x(-t) + iy(-t) \quad (-b \leq t \leq -a)$$

に沿うの積分は

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))(-z'(-t)) dt \quad (z'(-t) = [\frac{d}{du} z(u)]_{u=-t}) \quad \{ca\}$$

である。

$$== - \int_a^b f(z(u)) z'(u) du = *$$

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz \quad (5) \{cs\}$$

。。定義は

$$= \int_C f(z) |dz| = \int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt \quad (8)$$

である。。

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \quad (9) \{cs\}$$

(9) について。

$$\begin{aligned} &= \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(z(t)) z'(t)| dt \quad (\text{の (4)}) \\ &= \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt = \end{aligned}$$

とすると (8) はとなるが、これが曲線の弧長の定義である。例として、円周の長さを計算してみよう。円の助変数表示からとなり、

がえられ、これは期待されたものである。

解説

$-t = u$ とおくと $\tilde{x}(t) = x(u)$ 、 $\tilde{x}'(t) = -x'(u)$ 、 $=$ だから

$$\begin{aligned}\int_{-C} F &= \int_{-b}^{-a} (F(\tilde{x}(t))|\tilde{x}'(t))dt = - \int_a^b (F(x(u))|x'(u))du = - \int_C F \\ &[\int_{-b}^{-a} (F(x(-t))|\frac{d}{dt}x(-t))dt = \int_{-b}^{-a} (F(x(-t))|-\frac{d}{d\{-t\}}x(-t))dt = - \int_a^b (F(x(-t))|\frac{d}{d\{-t\}}x(-t))d\{-t\} \\ &= - \int_a^b (F(x(u))|\frac{d}{du}x(u))du]\end{aligned}$$

$$\int_{-3}^{-1} f(-t)dt = \int_1^3 f(u)du$$

$$f(-\{-2.5\})\{-2-\{-3\}\}+f(-\{-1.5\})\{-1-\{-2\}\}=f(1.5)\{2-1\}+f(2.5)\{3-2\}$$

[任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $d(\Delta) [= \text{Max}\{t_k - t_{k-1}\}] < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、代表点 $\xi_k()$ の取り方によらず常に

$$\begin{aligned}&| \quad \{u(x(\xi_1), y(\xi_1))x'(\xi_1) - v(x(\xi_1), y(\xi_1))y'(\xi_1)\}\{t_1 - t_0\} \\ &+ \quad \cdots \\ &+ \quad \{u(x(\xi_n), y(\xi_n))x'(\xi_n) - v(x(\xi_n), y(\xi_n))y'(\xi_n)\}\{t_n - t_{n-1}\} \\ &- \quad \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt \quad | < \varepsilon]\end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta \{Maxd(I_k) < \delta\},$$

$$\begin{aligned}&| \quad \{u(x(\xi_1), y(\xi_1))y'(\xi_1) + v(x(\xi_1), y(\xi_1))x'(\xi_1)\}\{t_1 - t_0\} \\ &+ \quad \cdots \\ &+ \quad \{u(x(\xi_n), y(\xi_n))y'(\xi_n) + v(x(\xi_n), y(\xi_n))x'(\xi_n)\}\{t_n - t_{n-1}\} \\ &- \quad \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\}dt \quad | < \varepsilon] \\ &|f(\xi_1)\{x_1 - x_0\} + \cdots + f(\xi_n)\{x_n - x_{n-1}\} - J| < \epsilon\end{aligned}$$

が成立つ]

解析入門 p235

定理

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (5.8)$$

証明

(5.8) の右辺は左辺において

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt \quad (5.10)$$

なる置換えをして、積分範囲を対応するものに改めたものである。このように変数変換の結果がなる代入を行うことによって自動的に得られる点に、

$$\begin{aligned}
 16 &= a \\
 &= b \\
 &= c
 \end{aligned}$$

、逆向きの曲線 $-\gamma$ を $z = z(-t), -b \leq t \leq -a$ で定義した。ゆえに、となり、変数変換をすれば、右辺は

となる。これで、次の公式をうる：

$f = u + iv$ とおき $\{j\}$ 積分を実部虚部にわけた形で

$$\int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx) \quad \{cj\}$$

と書くことができる。

。。不等式が (3) からえられる。

解説

*1

*2

$$Re \int_a^b f(t) dt = \int_a^b Re\{f(t)\} dt$$

*3 $|e^{-i\theta}| = 1$

*

複素線積分 { 複素解析 p108 ~ }

、 $f(t) = u(t) + iv(t)$ が区間 $[a, b]$ で定義された連続関数のとき、

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

と定義する。、 $c = \alpha + i\beta$ を複素数の定数とすると、

$$\int_a^b cf(t)dt = c \int_a^b f(t)dt \quad (2)$$

が成り立つ。何故なら、両辺は次式に等しいからである *1 :

$$\int_a^b (\alpha u - \beta v)dt + i \int_a^b (\alpha v + \beta u)dt$$

ab のとき、任意の複素関数 $f(t)$ に対し、基本的な不等式

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \quad (3)$$

が成立する。証明のために、 θ を実数として $c = e^{-i\theta}$ とおき (2) を用いると、

$$Re[e^{-i\theta} \int_a^b f(t)dt] = {}^{*2} \int_a^b Re[e^{-i\theta} f(t)]dt \leq {}^{*3} \int_a^b |f(t)|dt$$

が成立する。 $\theta = \arg \int_a^b f(t)dt$ ととると、左辺は積分の絶対値となり *、(3) が成立する。

、 $z = z(t), a \leq t \leq b$ で表された区分的に微分可能な曲線 γ を考える。関数 $f(z)$ が γ の上で定義され連続とすると {j} $f(z(t))$ は連続となり

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \quad \{c\}$$

$$[= \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt + i \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\}dt]$$

とおくことができる。これを、曲線 γ の上での $f(z)$ の複素線積分の {cj} われわれの定義とする {cj}

、逆向きの曲線 $-\gamma$ を $z = z(-t), -b \leq t \leq -a$ で定義した。ゆえに、

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))(-z'(-t))dt \quad \{c\}$$

となり、変数変換をすれば、右辺は

となる。これで、次の公式をうる :

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz \quad \{c\}$$

$f = u + iv$ とおき {j} 積分を実部虚部にわけた形で

$$\int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} (udy + vdx) \quad \{cj\}$$

と書くことができる。

..、定義は

$$\int_{\gamma} f|dz| = \int_{\gamma} f(z(t))|z'(t)|dt$$

である。。

..、不等式

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \quad \{c\}$$

$$\left| \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t))z'(t)|dt = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt$$

が (3) からえられる。

とするととはなるが、これが曲線の弧長の定義である。例として、円周の長さを計算してみよう。円の助変数表示からとなり、

がえられ、これは期待されたものである。

解説

*1

$$\begin{aligned} \int_a^b \{\alpha + i\beta\}\{u + iv\}dt &= \int_a^b \{\alpha u - \beta v\} + i\{\alpha v + \beta u\}dt \\ &= \int_a^b \{\alpha u - \beta v\}dt + i \int_a^b \{\alpha v + \beta u\}dt \\ \{\alpha + i\beta\}\left\{\int_a^b udt + i \int_a^b vdt\right\} &= \{\alpha \int_a^b udt - \beta \int_a^b vdt\} + i\{\alpha \int_a^b vdt + \beta \int_a^b udt\} \end{aligned}$$

*2

$$Re \int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re\{f(t)\}dt$$

*3 $|e^{-i\theta}| = 1$

*

$$\int_a^b f(t)dt = \text{複素定数} = re^{i\theta}$$

とおくと、 $|e^{i\theta}| = 1$ だから、

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| = r$$

$$r = e^{-i\theta} \int_a^b f(t)dt = Re \int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt \quad (r = \text{実数であるから、})$$

[任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $d(\Delta) [= \text{Max}\{t_k - t_{k-1}\}] < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、代表点 $\xi_k()$ の取り方によらず常に

$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} & \{u(x(\xi_1), y(\xi_1))x'(\xi_1) - v(x(\xi_1), y(\xi_1))y'(\xi_1)\}\{t_1 - t_0\} \\ & + \dots \\ & + \{u(x(\xi_n), y(\xi_n))x'(\xi_n) - v(x(\xi_n), y(\xi_n))y'(\xi_n)\}\{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt \end{aligned} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta \{Max(I_k) < \delta\},$$

$$\begin{aligned}
& | \{u(x(\xi_1), y(\xi_1))y'(\xi_1) + v(x(\xi_1), y(\xi_1))x'(\xi_1)\}\{t_1 - t_0\} \\
& + \cdots \\
& + \{u(x(\xi_n), y(\xi_n))y'(\xi_n) + v(x(\xi_n), y(\xi_n))x'(\xi_n)\}\{t_n - t_{n-1}\} \\
& - \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\}dt \quad | < \varepsilon] \\
& |f(\xi_1)\{x_1 - x_0\} + \cdots + f(\xi_n)\{x_n - x_{n-1}\} - J| < \epsilon
\end{aligned}$$

が成立つ]

解析入門 p235

定理

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (5.8)$$

証明

(5.8) の右辺は左辺において

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t)dt \quad (5.10)$$

なる置換えをして、積分範囲を対応するものに改めたものである。このように変数変換の結果がなる代入を行うことによって自動的に得られる点に、

以下は自分用のメモ

{ ある領域で定義された連続な関数 $f(z)$ に対して、領域内の曲線 C に沿っての積分を定義するにはどうしたらよいだろうか? }

[区間 I の任意の分割 Δ 、各小区間 I_k の代表点 ξ_k を取

I_k の代表点 ξ_k のとり方によらず

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta \{ \text{Max}\{t_k - t_{k-1}\} < \delta \},$$

$$\begin{aligned} & | \quad \{u(x(\xi_1), y(\xi_1))x'(\xi_1) - v(x(\xi_1), y(\xi_1))y'(\xi_1)\}\{t_1 - t_0\} \\ & + \quad \cdots \\ & + \quad \{u(x(\xi_n), y(\xi_n))x'(\xi_n) - v(x(\xi_n), y(\xi_n))y'(\xi_n)\}\{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \quad \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt \quad | < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta \{ \text{Maxd}(I_k) < \delta \},$$

$$\begin{aligned} & | \quad \{u(x(\xi_1), y(\xi_1))y'(\xi_1) + v(x(\xi_1), y(\xi_1))x'(\xi_1)\}\{t_1 - t_0\} \\ & + \quad \cdots \\ & + \quad \{u(x(\xi_n), y(\xi_n))y'(\xi_n) + v(x(\xi_n), y(\xi_n))x'(\xi_n)\}\{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \quad \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\}dt \quad | < \varepsilon \end{aligned}$$

となることが積分の定義からわかる。]

{ $\gamma: z(t)$ 、 $a \leq t \leq b$ 、を D 内に在る級の曲線、 $f(z)$ を D で連続な z の関数とする }

複素線積分 { 解析入門 IIp235 ~ }

定義 1 複素数体 \mathbb{C} [の領域 D] 内の区分的に C^1 級の径数付曲線 $C: z = z(t) \quad (t \in [a, b] = I)$ と、 C の跡 $S_p C$ 上の複素数値連続関数 f に対し $\{C: z = z(t) [= x(t) + iy(t)] \quad (t \in [a, b] [= \{t \in R | a \leq t \leq b\}] = I)$ を D 内に在る区分的に C^1 級の径数付曲線、 $f(z) [= u(x, y) + iv(x, y)]$ を D で連続な z の関数とする。} C 上の複素線積分 $\int_C f(z)dz$ を

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

$$[= \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt + i \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\}dt]$$

によって定義する。{この式の右辺において $z'(t)$ は I の有限個の点 $a \leq t_0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq b$ を除いて存在して有界連続であるから、}

[区間 I の任意の分割 Δ 、各小区間 I_k の代表点 ξ_k を取

I_k の代表点 ξ_k のとり方によらず

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta \{Max\{t_k - t_{k-1}\} < \delta\},$$

$$\begin{aligned} & | \{u(x(\xi_1), y(\xi_1))x'(\xi_1) - v(x(\xi_1), y(\xi_1))y'(\xi_1)\}\{t_1 - t_0\} \\ & + \dots \\ & + \{u(x(\xi_n), y(\xi_n))x'(\xi_n) - v(x(\xi_n), y(\xi_n))y'(\xi_n)\}\{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt \quad | < \varepsilon \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta \{Maxd(I_k) < \delta\},$$

$$\begin{aligned} & | \{u(x(\xi_1), y(\xi_1))y'(\xi_1) + v(x(\xi_1), y(\xi_1))x'(\xi_1)\}\{t_1 - t_0\} \\ & + \dots \\ & + \{u(x(\xi_n), y(\xi_n))y'(\xi_n) + v(x(\xi_n), y(\xi_n))x'(\xi_n)\}\{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \int_a^b \{u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)\}dt \quad | < \varepsilon \end{aligned}$$

となることが積分の定義からわかる。]

例

$$\{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\}\{x + iy\}'(t)$$

$D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$ で定義された $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$ は $I = \{t | 0 \leq t \leq 1\}$ で定義された $x(t) + iy(t) = t^2 + i2t$ 上で可積分

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、 $Maxd(I_k) < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} & | \{\{\xi_1^2\}^2 - \{2\xi_1\}^2 + i2\{\xi_1^2\}\{2\xi_1\}\}\{2\xi_1 + i2\}\{t_1 - t_0\} \\ & + \dots \\ & + \{\{\xi_n^2\}^2 - \{2\xi_n\}^2 + i2\{\xi_n^2\}\{2\xi_n\}\}\{2\xi_n + i2\}\{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \{-14 + i2\} \quad | < \varepsilon \end{aligned}$$

となる。

$\epsilon = 20$ に対し、 $\delta = 0.5$ { ちなみに $n = 3$ となる } $Maxd[0, 0.2], [0.2, 0.65], [0.65, 1] < 0.5$ 、

$$\begin{aligned}
& | \quad \{0.1^2\}^2 - \{2 \cdot 0.1\}^2 + i2\{0.1^2\}\{2 \cdot 0.1\}\{2 \cdot 0.1 + i2\}\{0.2 - 0\} \\
& + \quad \{0.45^2\}^2 - \{2 \cdot 0.45\}^2 + i2\{0.45^2\}\{2 \cdot 0.45\}\{2 \cdot 0.45 + i2\}\{0.65 - 0.2\} \\
& + \quad \{0.7^2\}^2 - \{2 \cdot 0.7\}^2 + i2\{0.7^2\}\{2 \cdot 0.7\}\{2 \cdot 0.7 + i2\}\{1 - 0.65\} \\
& - \quad \{-14 + i2\} \quad \quad \quad | < 20
\end{aligned}$$

$Maxd[0, 0.11], [0.11, 0.3], [0.3, 0.5], [0.5, 0.8], [0.8, 1] < 0.5$ 、

$$\begin{aligned}
& | \quad \{0.1^2\}^2 - \{2 \cdot 0.1\}^2 + i2\{0.1^2\}\{2 \cdot 0.1\}\{2 \cdot 0.1 + i2\}\{0.11 - 0\} \\
& + \quad \{0.2^2\}^2 - \{2 \cdot 0.2\}^2 + i2\{0.2^2\}\{2 \cdot 0.2\}\{2 \cdot 0.2 + i2\}\{0.3 - 0.11\} \\
& + \quad \{0.4^2\}^2 - \{2 \cdot 0.4\}^2 + i2\{0.4^2\}\{2 \cdot 0.4\}\{2 \cdot 0.4 + i2\}\{0.5 - 0.3\} \\
& + \quad \{0.7^2\}^2 - \{2 \cdot 0.7\}^2 + i2\{0.7^2\}\{2 \cdot 0.7\}\{2 \cdot 0.7 + i2\}\{0.8 - 0.5\} \\
& + \quad \{0.9^2\}^2 - \{2 \cdot 0.9\}^2 + i2\{0.9^2\}\{2 \cdot 0.9\}\{2 \cdot 0.9 + i2\}\{1 - 0.8\} \\
& - \quad \{-14 + i2\} \quad \quad \quad | < 20
\end{aligned}$$

$\epsilon = \dots$

{ 解析入門 IIP235、解析入門 P207 ~ 208、複素関数入門 p56 ~、複素解析 p35、 }

複素線積分 { 複素解析 p108 ~ }

、 $f(t) = u(t) + iv(t)$ が区間 $[a, b]$ で定義された連続関数のとき、

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

と定義する。、、 $c = \alpha + i\beta$ を複素数の定数とすると、

$$\int_a^b cf(t)dt = c \int_a^b f(t)dt \quad (2)$$

が成り立つ。何故なら、両辺は次式に等しいからである：

$$\int_a^b (\alpha u - \beta v)dt + i \int_a^b (\alpha v + \beta u)dt$$

ab のとき、任意の複素関数 $f(t)$ に対し、基本的な不等式

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \quad (3)$$

が成立する。証明のために、 θ を実数として $c = e^{-i\theta}$ とおき (2) を用いると、

$$\operatorname{Re}[e^{-i\theta} \int_a^b f(t)dt] = \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta} f(t)]dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

が成立する。 $\theta = \arg \int_a^b f(t)dt$ ととると、左辺は積分の絶対値となり、(3) が成立する。

、 $z = z(t), a \leq t \leq b$ で表された区分的に微分可能な曲線 γ を考える。関数 $f(z)$ が γ の上で定義され連続とすると $\{j\}$ $f(z(t))$ は連続となり

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \quad \{c\}$$

とおくことができる。これを、曲線 γ の上での $f(z)$ の複素線積分の $\{cj\}$ われわれの定義とする $\{cj\}$

、逆向きの曲線 $-\gamma$ を $z = z(-t), -b \leq t \leq -a$ で定義した。ゆえに、

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))(-z'(-t))dt \quad \{c\}$$

となり、変数変換をすれば、右辺は

となる。これで、次の公式をうる：

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz \quad \{c\}$$

$f = u + iv$ とおき $\{j\}$ 積分を実部虚部にわけた形で

$$\int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} (udy + vdx) \quad \{cj\}$$

と書くことができる。

..、定義は

$$\int_{\gamma} f|dz| = \int_{\gamma} f(z(t))|z'(t)|dt$$

である。。

..、不等式

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \quad \{c\}$$

$$\left| \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t))z'(t)|dt = \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt$$

が (3) からえられる。

とするととはなるが、これが曲線の弧長の定義である。例として、円周の長さを計算してみよう。円の助変数表示からとなり、

がえられ、これは期待されたものである。

チャーチル p70 ~ 72

実数変数 t の複素数値関数

$$w(t) :=$$

の区間における定積分を

$$\int_a^b w(t)dt := \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

と定義する。

定理

次の関係式が成り立つ。

$$(2)$$

$$(3)$$

$$(4)$$

証明 (2) について。

(3) について。とすると、

(4) について。

チャーチル p74

積分路を表す曲線 C を関数

$$C :$$

で定めよう。。

関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ は上で区分的に連続な関数、実部である $u(x(t), y(t))$ および虚部である $v(x(t), y(t))$ がともに実変数の実数値関数として区分的に連続 () であるとする。

このとき、に沿うの線積分を

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

で定義する。積分路は区分的になめらかな弧であるのが普通である。

$z'(t)$ が区分的に連続であるとする、の右辺の積分は、の実変数 t の複素数値関数の積分として一定の値が存在する：

とも表されるから、上の複素数値関数の積分は

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i \int_C (vdx + udy)$$

の形に書ける。...

の曲線に対して、からを結ぶ曲線、曲線の形そのものは同じであるが向きを逆と見たものを表す：

に沿うの積分は

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))(-z'(-t))dt$$

である。

定理

。

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz \quad (5)$$

(9)

(9)において、

$$\int_C g(z)|dz| := \int_a^b g(z(t))|z'(t)|dt$$

と定義する (のは、これの特別な場合 $= 1$ である)。

証明 (5) について、とくと、(4) より

{ 解析入門 P235 }

定義 1 複素数体内の区分的に級の径数付曲線 $C : z = z(t)(t[a, b] = I)$ と、 C の跡上の複素数値連続関数 f に対し、 C 上の f の複素線積分 $\int_C f(z)dz$ を

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

$$[\int_C \{u(x, y) + iv(x, y)\}d\{x + iy\} = \int_a^b \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\}\{x'(t) + iy'(t)\}dt]$$

によって定義する。この式の右辺において $z'(t)$ は I の有限個の点を除いて存在して有界連続であるから、の右辺の被積分関数 $f(z(t))z'(t)$ (の実部、虚部) は I 上可積分である。

およびを実部、虚部に分けて

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z(t) = x(t) + iy(t)$$

とすれば、複素線積分は次のように実数値関数の線積分に帰着される。

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b \{u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)\}dt + i \int_a^b \{u(z(t))y'(t) + v(z(t))x'(t)\}dt$$

すなわち区間 $I = [a, b]$ の任意の分割

と各小区間 $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ の代表点 s_k を取り、 $z_k = z(t_k)$ 、 $\xi_k = z(s_k)$ () とすれば、

$$\int_C f(z)dz = \lim_{d(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

となることが積分の定義からわかる。

またの逆向き曲線 $-C : z = \tilde{z}(t) = z(-t)(t[-b, -a])$ に対して、変数変換公式により

$$\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz$$

が成立つ (と同じ)。

は曲線の長さ (弧長) である。そこで弧長の微分を ds で表わし、弧長に関する線積分を

$$\int_C f(z)|dz| = \int_a^b f(z(t))|z'(t)|dt$$

によって定義する。

$$\{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x'(t) + iy'(t)\}$$

p159

なる区分的級数付曲線に対し

$$\tilde{x} : [-b, -a] \rightarrow R^n, \tilde{x}(t) = x(-t)$$

で定義される径数は曲線を、逆向きの径数付曲線という。

命題

$$\int_{-C} F = - \int_C F$$

証明

$-t = u$ とおくと $\tilde{x}(t) = x(u)$ 、 $\tilde{x}'(t) = -x'(u)$ 、 $dt = -du$ だから

$$\begin{aligned} \int_{-C} F &= \int_{-b}^{-a} (F(\tilde{x}(t))|\tilde{x}'(t)|)dt = - \int_a^b (F(x(u))|x'(u)|)du = - \int_C F \\ &= \int_{-b}^{-a} (F(x(-t))|\frac{d}{dt}x(-t)|)dt = \int_{-b}^{-a} (F(x(-t))|-\frac{d}{d\{-t\}}x(-t)|)dt \\ &= \int_b^a (F(x(u))|\frac{d}{du}x(u)|)du = - \int_a^b (F(x(u))|\frac{d}{du}x(u)|)du \end{aligned}$$

関数論と微分方程式 p108

別法として、経路積分は、とを結ぶ道筋を特定した上で
のように定義することもできる。

複素関数入門 p56 ~

関数が複素数の値をとるときには、

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt \quad (3.13)$$

によってその積分を 定義する。

p59

ある領域で定義された連続な関数 $f(z)$ に対して、領域内の曲線 C に沿っての積分を定義するにはどうしたらよいだろうか？、分点のとり方をどんどん細かくしていったときの区分和の極限として複素積分を定義するのが自然だろう。が滑らかならば、この極限は存在して

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))\frac{dz}{dt}dt \quad (3.15)$$

の右辺に収束することを示すことができる (右辺は実変数の積分 (3.13))。、が滑らかなとき (3.15) を複素積分の定義に採用してしまうことにする。また区分的に滑らかな曲線についてはによって定義する。なお線積分の概念を使えばは

$$= \int_C (udx - vdy) + i \int_C (udy + vdx) \quad (f(z) = u(x, y) + iv(x, y))$$

と表される。

{ 複素解析 P109 }

実積分のまず最初的一般化は、実区間の上での複素数値関数の定積分である。が区間で定義された連続関数のとき、

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

と定義する。

さて、 $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ で表された区分的に微分可能な曲線 γ を考える。関数 $f(z)$ が γ の上で定義され連続とすると、 $f(z(t))$ は連続となり

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

とおくことができる。これを、曲線 γ の上での $f(z)$ の複素線積分の、われわれの定義とする。

とおき、積分を実部虚部にわけた形で

と書くことができる。

もちろん、

の形の積分を定義することから始めることもできた。その場合は (7) が積分 (4) の定義になるだろう。どちらをとるかは趣味の問題である。

解析概論 P204

本節では領域 K において $f(z)$ の連続性のみを仮定する。 K 内で点 z_0 を点 z に結ぶ曲線 C が与えられているとする。

$$= \sum_{i=1}^n f(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

を考察する。弧の長さをして、の最大値とするならば、のときは曲線の分割法およびのとり方に無関係なる一定の極限を有する。それを曲線 C に関する $f(z)$ の積分

$$I = \int_C f(z) dz$$

という。

p134

定義 道 C に沿う、からまでの複素積分を

$$\int_C f(z)dz = \lim \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)(z_{i+1} - z_i)$$

によって定義する。

最大幅

を 0 に近づけたときの極限值を示している。

この極限值が存在することは、の連続性から () 示すことができる。

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

複素関数 p52

複素解析 p35

定義 $\gamma : t \rightarrow \gamma(t)$ 、 $a \leq t \leq b$ 、を D 内に在る級の曲線、 $f(z)$ を D で連続な z の関数とする。
このときをの曲線上の積分といい、で表す：

$$= \max(t_k - t_{k-1})$$

$$z_k - z_{k-1} =$$

記号

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b \{u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)\}dt + i \int_a^b \{u(z(t))y'(t) + v(z(t))x'(t)\}dt \quad (\text{杉 1.2})$$

可積分の定義 { 解析入門 P235、複素解析 P53 } { 解析入門 P207~208、30 講 P134 }

定義 1 複素数体 C の領域 D 内の区分的に C^1 級の径数付曲線 $C: x(t) + iy(t) \quad \{t \in \{t \in R | a \leq t \leq b\} = I\}$ と、 D で定義された連続関数 $u(x, y) + iv(x, y)$

区間 I の任意の分割 Δ に対し、 Δ によって生ずる各小区間 I_k の中から任意に一点 ξ_k を取
 $u(x, y) + iv(x, y)$ が C 上で可積分であるとは、ある複素数 $J + iL$ が存在して、 I_k の代表点 ξ_k のとり方によらず

任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $Maxd(I_k) < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、

$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} & \{u(x(\xi_1), y(\xi_1)) + iv(x(\xi_1), y(\xi_1))\} \{x + iy\}'(\xi_1) \{t_1 - t_0\} \\ & + \dots \\ & + \{u(x(\xi_n), y(\xi_n)) + iv(x(\xi_n), y(\xi_n))\} \{x + iy\}'(\xi_n) \{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \{J + iL\} \end{aligned} \right| < \epsilon \end{aligned}$$

が成立つことを意味する。そして

$$J + iL = \int_a^b \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt$$

等と記す。

例

$$\{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t)$$

$D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$ で定義された $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$ は $I = \{t | 0 \leq t \leq 1\}$ で定義された $x(t) + iy(t) = t^2 + i2t$ 上で可積分

任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $Maxd(I_k) < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、

$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} & \{\{\xi_1^2\}^2 - \{2\xi_1\}^2 + i2\{\xi_1^2\}\{2\xi_1\}\} \{2\xi_1 + i2\} \{t_1 - t_0\} \\ & + \dots \\ & + \{\{\xi_n^2\}^2 - \{2\xi_n\}^2 + i2\{\xi_n^2\}\{2\xi_n\}\} \{2\xi_n + i2\} \{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \{-14 + i2\} \end{aligned} \right| < \epsilon \end{aligned}$$

が成立つ。

[次のページへ続く。]

$\epsilon = 20$ の場合、 $\delta = 0.5$ は OK { ちなみに $n = 3$ となる } $Maxd[0, 0.2], [0.2, 0.65], [0.65, 1] < 0.5$ 、

$$\begin{aligned}
& | \quad \{ \{0.1^2\}^2 - \{2 \cdot 0.1\}^2 + i2\{0.1^2\}\{2 \cdot 0.1\} \} \{2 \cdot 0.1 + i2\} \{0.2 - 0\} \\
& + \quad \{ \{0.45^2\}^2 - \{2 \cdot 0.45\}^2 + i2\{0.45^2\}\{2 \cdot 0.45\} \} \{2 \cdot 0.45 + i2\} \{0.65 - 0.2\} \\
& + \quad \{ \{0.7^2\}^2 - \{2 \cdot 0.7\}^2 + i2\{0.7^2\}\{2 \cdot 0.7\} \} \{2 \cdot 0.7 + i2\} \{1 - 0.65\} \\
& - \quad \{-14 + i2\} \quad \quad \quad | < 20
\end{aligned}$$

$Maxd[0, 0.11], [0.11, 0.3], [0.3, 0.5], [0.5, 0.8], [0.8, 1] < 0.5$ 、

$$\begin{aligned}
& | \quad \{ \{0.1^2\}^2 - \{2 \cdot 0.1\}^2 + i2\{0.1^2\}\{2 \cdot 0.1\} \} \{2 \cdot 0.1 + i2\} \{0.11 - 0\} \\
& + \quad \{ \{0.2^2\}^2 - \{2 \cdot 0.2\}^2 + i2\{0.2^2\}\{2 \cdot 0.2\} \} \{2 \cdot 0.2 + i2\} \{0.3 - 0.11\} \\
& + \quad \{ \{0.4^2\}^2 - \{2 \cdot 0.4\}^2 + i2\{0.4^2\}\{2 \cdot 0.4\} \} \{2 \cdot 0.4 + i2\} \{0.5 - 0.3\} \\
& + \quad \{ \{0.7^2\}^2 - \{2 \cdot 0.7\}^2 + i2\{0.7^2\}\{2 \cdot 0.7\} \} \{2 \cdot 0.7 + i2\} \{0.8 - 0.5\} \\
& + \quad \{ \{0.9^2\}^2 - \{2 \cdot 0.9\}^2 + i2\{0.9^2\}\{2 \cdot 0.9\} \} \{2 \cdot 0.9 + i2\} \{1 - 0.8\} \\
& - \quad \{-14 + i2\} \quad \quad \quad | < 20
\end{aligned}$$

$\epsilon = \dots$

{ 解析入門 P207 ~ 208 }

定義 1 区間 I の任意の分割 Δ に対し、 Δ によって生ずる各小区間 I_k の中から任意に一点 ξ_k を取

$$s(f; \Delta; \xi) = \sum_k f(\xi_k) v(I_k)$$

ある実数 J が存在して、 I_k の代表点 ξ_k のとり方によらず

そして

$$J = \int_I f(x) dx$$

等と記す。

任意の $\epsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在して、 $\text{Max} d(I_k) < \delta$ となる任意の分割 Δ に対し、

$$|s(f; \Delta; \xi) - J| < \epsilon$$

が成立つことを意味する。

{ 解析入門 P235 }

$$J = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$[J = \int_a^b \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt]$$

大学院別入試問題と解法 P49

[6]

大学院別入試問題と解法 P135

[5]

$d()$ は 30 講に無い

複素線積分 { 解析入門 p235 }

定義 1 複素数体 C の領域 D 内の区分的に C^1 級の径数付曲線 $C: x(t) + iy(t) \quad \{t \in \{t \in R | a \leq t \leq b\} = I\}$ と、 D で定義された連続関数 $u(x, y) + iv(x, y)$ に対し、 C 上の複素線積分を

$$\int_a^b \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt$$

によって定義する。函数 $\{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t)$ は I 上可積分である。

区間 I の任意の分割 Δ 、各小区間 I_k の代表点 ξ_k を取

I_k の代表点 ξ_k のとり方によらず

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Delta \{Maxd(I_k) < \delta\},$$

$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} & \{u(x(\xi_1), y(\xi_1)) + iv(x(\xi_1), y(\xi_1))\} \{x + iy\}'(\xi_1) \{t_1 - t_0\} \\ & + \cdots \\ & + \{u(x(\xi_n), y(\xi_n)) + iv(x(\xi_n), y(\xi_n))\} \{x + iy\}'(\xi_n) \{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \int_a^b \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt \end{aligned} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

となることが積分の定義からわかる。

例

$$\{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t)$$

$D = \{x + iy | |x + iy| < 10\}$ で定義された $u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$ は $I = \{t | 0 \leq t \leq 1\}$ で定義された $x(t) + iy(t) = t^2 + i2t$ 上で可積分

任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、 $Maxd(I_k) < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} & \left| \begin{aligned} & \{\xi_1^2\}^2 - \{2\xi_1\}^2 + i2\{\xi_1^2\}\{2\xi_1\}\{2\xi_1 + i2\}\{t_1 - t_0\} \\ & + \cdots \\ & + \{\xi_n^2\}^2 - \{2\xi_n\}^2 + i2\{\xi_n^2\}\{2\xi_n\}\{2\xi_n + i2\}\{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \{-14 + i2\} \end{aligned} \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

となる。

[次のページへ続く。]

可積分の定義 { 解析入門 P235 }

定義 1 複素数体 \mathbb{C} の領域 D 内の区分的に C^1 級の径数付曲線 $C: x(t) + iy(t) \{t \in \{t | a \leq t \leq b\} = I\}$ と、 D で定義された連続関数 $u(x, y) + iv(x, y)$

区間 I の任意の分割によって生ずる各小区間 I_k から任意に ξ_k を取

$u(x, y) + iv(x, y)$ が \mathbb{C} 上で可積分であるとは、ある複素数 $J + iL$ が存在して、 I_k の ξ_k のとり方によらず

$$\{\forall \epsilon > 0\} \{\exists \delta > 0\} \{\forall \Delta\}$$

$$\begin{aligned} \{Maxd(I_k) < \delta \implies & \quad | \quad \{u(x(\xi_1), y(\xi_1)) + iv(x(\xi_1), y(\xi_1))\} \{x + iy\}'(\xi_1) \{t_1 - t_0\} \\ & + \quad \dots \\ & + \quad \{u(x(\xi_n), y(\xi_n)) + iv(x(\xi_n), y(\xi_n))\} \{x + iy\}'(\xi_n) \{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \quad \{J + iL\} \quad \quad \quad | < \epsilon \} \end{aligned}$$

となることをいう。このとき

$$J + iL = \int_a^b \{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t) dt$$

等と記す。

例と説明

$$\{u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))\} \{x + iy\}'(t)$$

$$D = \{x + iy | |x + iy| < 10\} \text{ で定義された } u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy \text{ は } I = \{t | 0 \leq t \leq 1\}$$

で定義された $x(t) + iy(t) = t^2 + i2t$ 上で可積分

ϵ にどんな数 $\{\epsilon > 0\}$ を選んでも、 $Maxd(I_k) < \delta$ となるどんな Δ においても

$$\begin{aligned} & | \quad \{\{\xi_1^2\}^2 - \{2\xi_1\}^2 + i2\{\xi_1^2\}\{2\xi_1\}\} \{2\xi_1 + i2\} \{t_1 - t_0\} \\ & + \quad \dots \\ & + \quad \{\{\xi_n^2\}^2 - \{2\xi_n\}^2 + i2\{\xi_n^2\}\{2\xi_n\}\} \{2\xi_n + i2\} \{t_n - t_{n-1}\} \\ & - \quad \{-14 + i2\} \quad \quad \quad | < \epsilon \end{aligned}$$

となる。そういう δ が選べる。

$\epsilon = 20$ のとき $\delta = 0.5$ で OK ということは { ちなみに $n = 3$ となる }

例えば $I_1 = [0, 0.2], I_2 = [0.2, 0.65], I_3 = [0.65, 1]$ や

$I_1 = [0, 0.11], I_2 = [0.11, 0.3], I_3 = [0.3, 0.5], I_4 = [0.5, 0.8], I_5 = [0.8, 1]$ 等でよいということである。{ 小区間の幅の最大値が 0.5 より小 }